

Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен, Л. С. Шипот

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМІ ДВОХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗА УМОВ ПОЖЕЖІ

Запропонована робота присвячена застосуванню прямого методу до дослідження процесів теплообміну в системі «суцільний циліндр всередині циліндричної оболонки». Припускається, що між ними існує ідеальний тепловий контакт, а закон зміни температури навколишнього середовища, яке омиває поверхню конструкції, є довільною функцією часу, та рівномірно розподілений по поверхні. Отже, ізотерми всередині цієї конструкції являють собою концентричні кола, тобто задача є симетричною і в такій постановці розв'язана вперше. Для розв'язування такої задачі паралельно ставиться допоміжна задача про визначення розподілу нестационарного температурного поля у двошаровій порожнистій циліндричній конструкції з «вилученим» циліндром достатньо малого радіуса. При цьому умова симетрії вихідної задачі замінюється умовою другого роду на внутрішній поверхні цієї конструкції. Реалізація розв'язку допоміжної задачі проводиться шляхом застосування методу редукції із використанням концепції квазіпохідних. Надалі використовується схема Фур'є із застосуванням модифікованого методу власних функцій.

Для знаходження розв'язку вихідної задачі використано ідею граничного переходу шляхом прямування радіуса вилученого циліндра до нуля. Встановлено, що при такому підході всі власні функції відповідної задачі на власні значення не мають особливостей в нулі, а це означає, що й розв'язки вихідної задачі є обмеженими у всій конструкції. Для ілюстрації запропонованого методу розв'язано модельний приклад про знаходження розподілу температурного поля у колоні круглого поперечного перерізу (бетон в сталевій оболонці) за умов впливу стандартного температурного режиму пожежі. Результати обчислень представлені у вигляді об'ємного графіка зміни температури залежно від часу та просторової координати.

Узагальнення отриманих результатів на випадок будь-якої скінченної кількості циліндричних оболонок є задачею суто технічною, а не принциповою. Зауважимо, що при цьому заміна крайової умови третього роду на будь-яку іншу крайову умову (наприклад, першого роду) не впливає на схему розв'язування аналогічно поставлених задач. Оскільки загальна схема дослідження розподілу температурних полів у багатошарових конструкціях з довільною кількістю шарів за умов наявності внутрішніх джерел тепла детально вивчена, то постановка та розв'язування таких задач для системи «суцільний циліндр всередині циліндричної оболонки» не викликає жодних труднощів.

Ключові слова: циліндрична конструкція, квазіпохідна, прямий метод, граничний перехід.

Вступ. Застосування прямого методу до розв'язування задач теплообміну в багатошарових порожнистих циліндричних та сферичних конструкціях описано в численних публікаціях [1-3]. Актуальними задачами сьогодення є знаходження розподілу температурного поля в циліндричних та сферичних конструкціях типу «куля в сферичній оболонці» або «суцільний циліндр всередині циліндричної оболонки». Типовими є, наприклад, задачі про нагрів трубобетонних колон, сферичних резервуарів (газгольдерів), тепловидільних елементів циліндричної та сферичної форм у ядерних реакторах АЕС, тощо.

Ймовірно, що перша і найпростіша постановка таких задач на охолодження таких тіл була поставлена і розв'язана операційним методом в монографії [4]. На жаль, алгоритмів розв'язування цих задач, в цитованій монографії, не наведено. Крім того, в задачі про охолодження системи «суціль-

ний циліндр в циліндрі» припускається, що оболонка є настільки тонкою, що її в першому наближенні можна вважати плоскою. Це припущення суттєво спрощує розв'язування такої задачі, але питання про величину отриманої при цьому похибки до цього часу залишається відкритим.

Запропонований нами метод не накладає жодних обмежень на товщину оболонки. Крім того, на зовнішній поверхні розглядається крайова умова найбільш загального типу.

1. Постановка вихідної задачі. Розглядається нескінченний суцільний циліндр радіусом $r = r_0$ всередині циліндричної оболонки (порожнистого циліндра) з радіусом $r = r_1$. Між ними існує ідеальний тепловий контакт. В початковий момент часу $\tau = 0$, система цих двох циліндрів має однакову початкову температуру $T = T_0$, яка співпадає з температурою навколишнього середовища.

Вважається, що температура навколишнього середовища, яке омиває зовнішню поверхню системи змінюється за деяким законом $\psi(\tau)$. Теплообмін між циліндричною оболонкою та середовищем відбувається за законом Ньютона-Ріхмана, тобто виконуються крайові умови третього роду. Необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля $T(r, \tau)$ у будь-який момент часу τ в системі цих двох циліндричних тіл (рис.1).

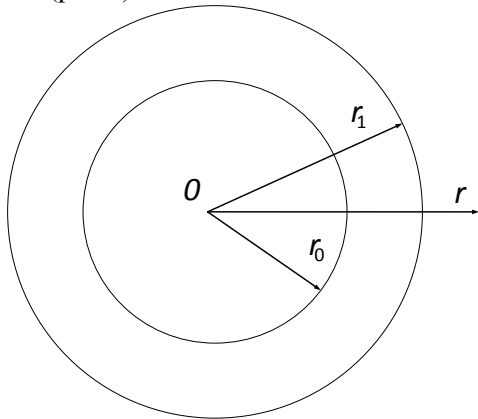


Рисунок 1 – Схема системи двох циліндричних тіл (діаметральний переріз)

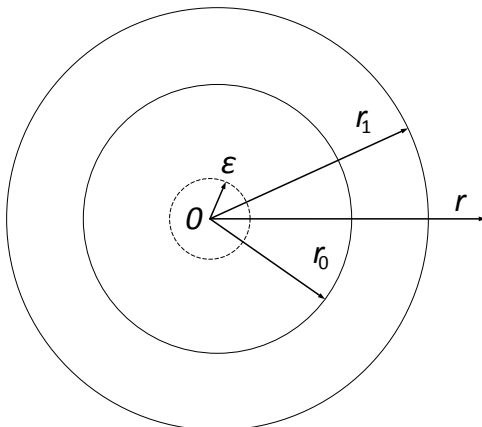


Рисунок 2 – Схема двошарової порожнистої циліндричної конструкції

Вважається, що закон зміни температури $\psi(\tau)$ рівномірно розподілений по поверхні циліндричної оболонки так, що ізотерми всередині цієї конструкції являють собою концентричні кола. Це значить, що температура $T(r, \tau)$ залежить лише від радіуса r та часу τ і задача є симетричною.

Така постановка задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності [4]

$$c\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad r \in (0, r_1), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

з крайовою умовою третього роду

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r_1, \tau) = \alpha(T(r_1, \tau) - \psi(\tau)), \quad (2)$$

умовою симетрії

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(0, \tau) = 0 \quad (3)$$

та початковою умовою

$$T(r, 0) = T_0. \quad (4)$$

Тут позначено: c — питома масова теплоємність, Дж/(кг·°C); r — координата, м; t — температура, °C; α — коефіцієнт теплообміну, Вт/(м²·°C); λ — коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·°C); ρ — густина, кг/м³; τ — час, с; $\psi(\tau)$ — закон зміни температури навколишнього середовища, °C.

2. Допоміжна задача. У системі двох циліндричних тіл «вилучимо» циліндр радіусом $r = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < r_0$ та розглянемо мішану задачу теплопровідності у двошаровій порожнистій циліндричній конструкції зображеній, на рис. 2.

Нехай θ_i — характеристична функція [1] на проміжках $[\varepsilon, r_0)$ та $[r_0, r_1]$, тобто

$$\theta_0(r) = \begin{cases} 1, & r \in [\varepsilon, r_0), \\ 0, & r \notin [\varepsilon, r_0), \end{cases} \quad \theta_1(r) = \begin{cases} 1, & r \in [r_0, r_1], \\ 0, & r \notin [r_0, r_1]. \end{cases}$$

Позначимо

$$\lambda(r) = \sum_{i=0}^1 \lambda_i \theta_i, \quad c(r) \rho(r) = \sum_{i=0}^1 c_i \rho_i \theta_i,$$

$$\lambda_i > 0, \quad c_i \rho_i > 0, \quad \forall i = \overline{0, 1}, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i \in R.$$

Для знаходження розподілу нестационарного температурного поля у цій двошаровій порожнистій циліндричній конструкції необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності [2]

$$c\rho \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad r \in (\varepsilon, r_1), \quad \tau > 0, \quad (5)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial t}{\partial r}(\varepsilon, \tau) = 0, \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}(r_1, \tau) = \alpha(t(r_1, \tau) - \psi(\tau)) \end{cases} \quad (6)$$

та початковою умовою

$$t(r, 0) = t_0. \quad (7)$$

Розв'язок задачі (5)-(7) шукатимемо за допомогою методу редукції [5, 6]

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau), \quad (8)$$

де одна з функцій ($u(r, \tau)$ або $v(r, \tau)$) вибирається спеціальним чином, а інша вже визначається однозначно.

2.1. Крайова задача для $u(r, \tau)$ та мішана задача для $v(r, \tau)$. Введемо позначення $r\lambda u_r' = u^{[1]}$. Визначимо функцію $u(r, \tau)$ як розв'язок крайової (квазістаціонарної) задачі:

$$(r\lambda u_r')' = 0, \quad (9)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u^{[1]}(\varepsilon) = 0, \\ \alpha r_1 u(r_1, \tau) + u^{[1]}(r_1, \tau) = \alpha r_1 \psi(\tau). \end{cases} \quad (10)$$

Підставляючи (8) у рівняння (5), з урахування (9), послідовно отримуємо мішану задачу для функції $v(r, \tau)$

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial}{\partial \tau}(u+v) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial}{\partial r}(u+v) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки крайові умови (10) для функції $u(r, \tau)$ справджують крайові умови (6) для функції $t(r, \tau)$, отримаємо нульові крайові умови для визначення функції $v(r, \tau)$, тобто

$$\begin{cases} v^{[1]}(\varepsilon, \tau) = 0, \\ \alpha r_1 v(r_1, \tau) + v^{[1]}(r_1, \tau) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

а початкова умова набуде вигляду

$$v(r, 0) = t_0 - u(r, 0) \equiv t_0. \quad (13)$$

2.2. Розв'язування крайової задачі (9), (10). В роботах [2, 7] встановлено, що на кожному з проміжків $[\varepsilon, r_0]$, $[r_0, r_1]$ розв'язок задачі (9), (10) має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(r, \tau) &= B_0(r, \varepsilon) \cdot \mathbf{P}_0, \\ \mathbf{u}_1(r, \tau) &= B_1(r, r_0) \cdot B(r_0, \varepsilon) \cdot \mathbf{P}_0, \end{aligned}$$

де \mathbf{P}_0 – початковий вектор. Для визначення початкового вектора \mathbf{P}_0 використаємо формулу [1, 2]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= (P + Q \cdot B(r_1, \varepsilon))^{-1} \cdot \Gamma = \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r_0) - \ln(\varepsilon)}{\lambda_0} + \frac{\ln(r_1) - \ln(r_0)}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha r_1 \psi(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

де $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_1^2 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma = (0, \alpha r_1^2 \psi(\tau))^T$,

$$B_0(r, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r) - \ln(\varepsilon)}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1(r, r_0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r) - \ln(r_0)}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B(r_1, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r_0) - \ln(\varepsilon)}{\lambda_0} + \frac{\ln(r_1) - \ln(r_0)}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідно, розв'язок задачі (9), (10) на кожному з проміжків $[\varepsilon, r_0]$ та $[r_0, r_1]$ зображується так:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(r) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r) - \ln(\varepsilon)}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_1(r) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r_0) - \ln(\varepsilon)}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln(r) - \ln(r_0)}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Отже, розв'язок крайової задачі (9), (10) $u(r, t) \equiv \psi(\tau)$, тобто не залежить від радіуса r .

2.3. Розв'язування мішаної неоднорідної задачі для функції $v(r, \tau)$. Оскільки функція $u(r, \tau)$ вже є відомою, то задача (11) для функції $v(r, \tau)$ набуде вигляду

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \psi'(\tau), \quad (14)$$

з нульовими крайовими умовами (12) при початковій умові (13).

2.3.1. Метод Фур'є та задача на власні значення. Нетривіальні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (15)$$

з крайовими умовами (12) шукатимемо у вигляді [5]

$$v(r, \tau) = e^{-\omega \tau} \cdot R(r), \quad (16)$$

де ω – параметр, а $R(r)$ – невідома функція.

Підставляючи праву частину (16) у рівняння (15) отримуємо квазідиференціальне рівняння [2]

$$(r\lambda R')' + \omega c\rho r R = 0, \quad (17)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} R^{[1]}(\varepsilon) = 0, \\ \alpha r_1 R(r_1) + R^{[1]}(r_1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Задача (17), (18) є класичною задачею на власні значення, у якій необхідно знайти значення ω_k (власні значення) при яких існують відповідні їм нетривіальні розв'язки $R_k(r, \omega_k)$ (власні функції) задачі (17), (18). Як відомо [5], всі власні значення цієї задачі є додатними та різними.

2.3.2. Конструктивна побудова власних функцій. Ввівши квазіпохідну $R^{[1]} \stackrel{df}{=} r\lambda R'$, вектор $\mathbf{R} = (R, R^{[1]})^T$ та матрицю

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda(r)} \\ -\omega c(r)\rho(r)r & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{зведемо квазі-}$$

диференціальне рівняння (17) до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}. \quad (19)$$

Під розв'язком системи (19) розуміємо абсолютно-неперервну вектор-функцію на $[\varepsilon, r_1]$, що справджує її майже всюди. Це еквівалентне умові ідеального теплового контакту на поверхні $r = r_0$.

Відповідну систему на проміжках $[\varepsilon, r_0]$ та $[r_0, r_1]$ запишемо у вигляді

$$\mathbf{R}'_0 = A_0 \cdot \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{R}'_1 = A_1 \cdot \mathbf{R}_1, \quad (20)$$

з матрицями

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda_0} \\ -\omega c_0 \rho_0 r & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda_1} \\ -\omega c_1 \rho_1 r & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння (17) можна переписати у вигляді

$$(rR')' + \beta_i^2 rR = 0,$$

де позначено $\beta_i = \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}} \quad i = 0, 1$.

У роботі [2] встановлено, що матриця Коші системи (20) має вигляд

$$B_i(r, s, \omega) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{pmatrix},$$

$$b_{11}^i = \frac{\pi \beta_i s (J_1(\beta_i, s) Y_0(\beta_i, r) - J_0(\beta_i, r) Y_1(\beta_i, s))}{2};$$

$$b_{12}^i = \frac{\pi (J_0(\beta_i, s) Y_0(\beta_i, r) - J_0(\beta_i, r) Y_0(\beta_i, s))}{2\lambda_i};$$

$$b_{21}^i = \frac{\pi \lambda_i \beta_i^2 r s (J_1(\beta_i, r) Y_1(\beta_i, s) - J_1(\beta_i, s) Y_1(\beta_i, r))}{2};$$

$$b_{22}^i = \frac{\pi \beta_i r (J_1(\beta_i, r) Y_0(\beta_i, s) - J_0(\beta_i, s) Y_1(\beta_i, r))}{2};$$

$$i = 0, 1.$$

Нетривіальні розв'язки $\mathbf{R}(r, \omega)$ системи (20) шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{R}(r, \omega) = B(r, \varepsilon, \omega) \cdot \mathbf{C}, \quad (21)$$

де $B(r, \varepsilon, \omega) = B_0(r, \varepsilon, \omega)\theta_0 + B_1(r, r_0, \omega)B_0(r_0, \varepsilon, \omega)\theta_1$, а

$\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$ – деякий ненульовий вектор.

Застосувавши до рівності (21) крайові умови (18) (при $\Gamma(\tau) \equiv \mathbf{0}$), отримаємо

$$P \cdot \mathbf{R}(\varepsilon, \omega) + Q \cdot \mathbf{R}(r_1, \omega) = \\ = [P \cdot B(\varepsilon, \varepsilon, \omega) + Q \cdot B(r_1, \varepsilon, \omega)] \cdot \mathbf{C} = 0.$$

Оскільки $B(\varepsilon, \varepsilon, \omega) = E$, де E – одинична матриця, приходимо до рівності

$$[P + Q \cdot B(r_1, \varepsilon, \omega)] \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (22)$$

Для існування нетривіального вектора \mathbf{C} у (22) необхідно та достатньо щоб виконувалась така умова

$$\Delta(\varepsilon) \stackrel{df}{=} \det [P + Q \cdot B(r_1, \varepsilon, \omega)] = 0. \quad (23)$$

Рівняння (23) – характеристичне рівняння задачі на власні значення (17), (18).

$$\det [P + Q \cdot B(r_1, \varepsilon, \omega)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det [P + Q \cdot B_1(r_1, r_0, \omega) \cdot B_0(r_0, \varepsilon, \omega)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\alpha r_1 b_{11}^1 + b_{21}^1) b_{11}^0 + (\alpha r_1 b_{12}^1 + b_{22}^1) b_{21}^0 = 0 \quad (24)$$

Для знаходження нетривіального вектора $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$ покладемо у рівність (22) ω_k замість ω . Використавши позначення (24) прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\alpha r_1 b_{11}^1 + b_{21}^1) b_{11}^0 + (\alpha r_1 b_{12}^1 + b_{22}^1) b_{21}^0 & (\alpha r_1 b_{11}^1 + b_{21}^1) b_{12}^0 + (\alpha r_1 b_{12}^1 + b_{22}^1) b_{22}^0 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ \left\{ \begin{aligned} & ((\alpha r_1 b_{11}^1 + b_{21}^1) b_{11}^0 + (\alpha r_1 b_{12}^1 + b_{22}^1) b_{21}^0) C_1 + \\ & + ((\alpha r_1 b_{11}^1 + b_{21}^1) b_{12}^0 + (\alpha r_1 b_{12}^1 + b_{22}^1) b_{22}^0) C_2 = 0. \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи дорівнює нулю, то одне з рівнянь (наприклад друге) можна відкинути.

Звідси випливає, що $C_2 = 0$ при будь-якому ненульовому значенні C_1 . Поклавши, наприклад, $C_1 = 1$, отримуємо, що нетривіальний вектор \mathbf{C} можна записати у вигляді:

$$\mathbf{C} = (1, 0)^T.$$

Нетривіальний розв'язок відповідної до (17) системи тоді запишеться у вигляді

$$\mathbf{R}_k(r, \omega_k) = \tilde{B}(r, \varepsilon, \omega) \cdot (1, 0)^T \stackrel{df}{=} \mathbf{R}_{k0} \theta_0 + \mathbf{R}_{k1} \theta_1, \\ k = 1, 2, 3, \dots$$

На проміжках $[\varepsilon, r_0]$ та $[r_0, r_1]$ власні вектори мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) &= \tilde{B}_0(r, \varepsilon, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = \\ &= (b_{11}^0, b_{21}^0)^T, \\ \mathbf{R}_{k1}(r, \omega_k) &= \tilde{B}_1(r, r_0, \omega_k) \cdot \tilde{B}_0(r_0, \varepsilon, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = \\ &= \tilde{B}_1(r, r_0, \omega_k) (b_{11}^0, b_{21}^0)^T. \end{aligned} \quad (25)$$

2.3.3. Побудова розв'язку $v(r, \tau)$ мішаної задачі (14), (12), (13). Схема побудови розв'язку цієї задачі методом власних функцій детально описана в роботах [1-3, 7-9]. Цей розв'язок зображується у такому вигляді:

$$\begin{aligned} v(r, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_k(r, \omega_k) = \\ &= \sum_{i=0}^1 v_i(r, \tau) \cdot \theta_i, \\ v_i(r, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k), \end{aligned} \quad (26)$$

де f_k та u_k коефіцієнти розвинення початкової умови та функції $\psi(\tau)$ відповідно в ряди Фур'є за системою власних функцій $R_k(r, \omega_k)$.

3. Граничний перехід при $\varepsilon \rightarrow 0$ та зображення розв'язку вихідної задачі (1)-(4). На основі методу редукції розв'язок вихідної задачі зображується у вигляді

$$\begin{aligned} T(r, \tau) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u(r, \tau) + v(r, \tau)) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\psi(\tau) + \sum_{i=0}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{ki} \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_{ki}(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k) \theta_i \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Запишемо характеристичне рівняння (24) задачі на власні значення (17), (18) в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} &(\alpha r_1 b_{11}^1 + b_{21}^1) \frac{\pi \beta_0 \varepsilon (J_1(\beta_0, \varepsilon) Y_0(\beta_0, r_0) - J_0(\beta_0, r_0) Y_1(\beta_0, \varepsilon))}{2} + \\ &+ (\alpha r_1 b_{12}^1 + b_{22}^1) \frac{\pi \lambda_0 \beta_0^2 r_0 \varepsilon (J_1(\beta_0, r_0) Y_1(\beta_0, \varepsilon) - J_1(\beta_0, \varepsilon) Y_1(\beta_0, r_0))}{2} = 0, \end{aligned}$$

Оскільки (див напр. [10]) $J_1(\beta_0 \varepsilon) = \frac{\beta_0 \varepsilon}{2} + \dots$,

$$Y_1(\beta_0 \varepsilon) = \frac{2}{\pi} J_1(\beta_0 \varepsilon) \left(\ln \frac{\beta_0 \varepsilon}{2} + const \right) -$$

$$- \frac{2}{\pi \beta_0 \varepsilon} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m \beta_0 \varepsilon}{m! (m+1)!} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \right],$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon (J_1(\beta_0, \varepsilon) Y_0(\beta_0, r_0) - J_0(\beta_0, r_0) Y_1(\beta_0, \varepsilon)) &= \frac{2J_0(\beta_0, r_0)}{\pi \beta_0}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon (J_1(\beta_0, r_0) Y_1(\beta_0, \varepsilon) - J_1(\beta_0, \varepsilon) Y_1(\beta_0, r_0)) &= -\frac{2J_1(\beta_0, r_0)}{\pi \beta_0}, \end{aligned} \quad (28)$$

На основі (28) отримуємо характеристичне рівняння (24) задачі на власні значення (17), (18) після граничного переходу

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(\varepsilon) &= (\alpha r_1 b_{11}^1 + b_{21}^1) J_0(\beta_0 r_0) - \\ &- (\alpha r_1 b_{12}^1 + b_{22}^1) \lambda_0 \beta_0 r_0 J_1(\beta_0 r_0) = 0, \end{aligned}$$

Відповідні власні вектори (25) зобразяться так:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) &= \tilde{B}_0(r, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T = \\ &= (J_0(\beta_0 \cdot r), -\lambda_0 \beta_0 r J_0(\beta_0 \cdot r))^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k1}(r, \omega_k) &= \tilde{B}_1(r, r_0, \omega) \cdot \tilde{B}_0(r_0, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T = \\ &= \tilde{B}_1(r, r_0, \omega) \cdot (J_0(\beta_0 \cdot r), -\lambda_0 \beta_0 r J_0(\beta_0 \cdot r))^T. \end{aligned}$$

Зауважмо, що $\mathbf{R}_{k0}(0, \omega_k) = (1, 0)^T$.

4. Модельний приклад. У якості прикладу розглянемо колону круглого перерізу, яка складається зі сталеві оболонки, середина якої заповнена бетоном. Необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля у цій конструкції за умов впливу стандартного температурного режиму пожежі. Теплотехнічні характеристики матеріалів, з яких виготовлено колону, та вихідні дані для розрахунку, наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Теплотехнічні характеристики матеріалів		
Параметр	Бетон	Сталь
Радіус $r, \text{м}$	$r_0 = 0,1$	$r_1 = 0,18$
Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$	1,5	56
Питома масова теплоємність $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$	840	470
Густина $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	2200	7800
Початкова температура $t(r, 0), ^\circ\text{C}$	20	20
Закон зміни температури у зовнішньому приповерхневому шарі $\psi(\tau), ^\circ\text{C}$	$\psi(\tau) = 345 \lg \left(\frac{8\tau}{60} + 1 \right) + 20$	
Коефіцієнт теплообміну між поверхнею та навколишнім середовищем $\alpha, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$	$\alpha = 25$	

Використавши запропонований метод розрахунку розподілу нестационарного температурного поля у системі двох циліндричних тіл та програмне забезпечення Maple 13 [9], отримуємо розв'язок поставленої задачі у вигляді графіка (рис. 3). Слід зауважити, що для одержання результату із заданою точністю при обчисленні було використано перших 50 коренів характеристичного рівняння (табл. 2).

Корені характеристичного рівняння ω_k

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
0.00008668007186	0.09333863426	0.3656367729	0.8111078251	1.427003847
0.0008935061046	0.1052424036	0.3862003442	0.8497402108	1.494661345
0.004142438241	0.1276712068	0.4231077702	0.8915719642	1.536848229
0.009930438239	0.1540434430	0.4696547560	0.9568323902	1.615912769
0.01784944188	0.1825454458	0.5190588049	1.026983111	1.706276271
0.02420948014	0.2074288320	0.5670331336	1.097752108	1.798919104
0.03133633815	0.2232306294	0.5949685343	1.150011316	1.882168113
0.04444824322	0.2538606652	0.6355766957	1.191664541	1.928430606
0.06054522676	0.2904124930	0.6917849470	1.264847205	2.010170122
0.07866348379	0.3293642741	0.7516016426	1.345204595	2.110217369

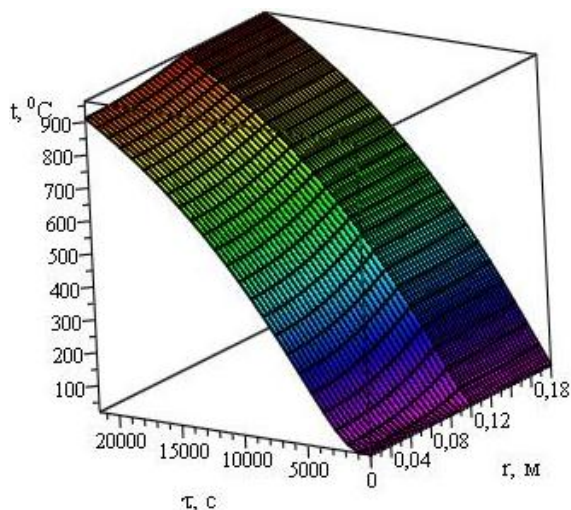


Рисунок 3 – Розподіл нестационарного температурного поля у системі двох циліндричних тіл

Висновки. До розв'язування вихідної задачі застосовано прямий метод, причому вперше використано ідею граничного переходу. У загальній постановці (функція $\psi(\tau)$ вважається довільною, не накладається жодних обмежень на товщину оболонки) таку задачу розв'язано вперше. Узагальнення отриманих результатів на випадок будь-якої скінченної кількості вкладених циліндричних тіл є задачею суто технічною, а не принциповою.

Структура отриманих точних формул (14), (26) та (27) дозволяє створити алгоритм розрахунку температурного поля у вигляді автоматизованих програм, де достатньо лише ввести початкові дані. Зауважимо, що такі алгоритми включають в себе: а) обчислення коренів характеристичного рівняння; б) множення скінченного числа відомих матриць; в) обчислення визначених інтегралів; г) сумування необхідної кількості членів ряду для отримання заданої точності розрахунку.

Розв'язаний приклад є модельним, що ілюструє лише можливість запропонованого методу.

Список літератури:

1. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2016. vol. 89, no. 2. pp. 357-368. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>.
2. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2018. vol. 91, no. 6. pp. 1373-1384. DOI 10.1007/s10891-018-1871-3.
3. Тацій Р.М. Стасюк М.Ф., Пазен О.Ю. Прямой метод расчета температурного поля в многослойной полой сферической конструкции. *Вестник Кокшетауского технического института: Кокшетау: КТИКЧСМВД Республики Казахстан*. 2018. № 1(29). С.9-20.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.
5. Арсенин В.Я. Методы математической физики. М. : Наука, 1974. 432 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977. 735 с.
7. Тацій Р. М., Пазен О.Ю. Прямий метод розрахунку нестационарного температурного поля за умов пожежі. *Збірник наукових праць Пожежна безпека*. Львів. 2015. № 26. С. 135-141.
8. Тацій Р. М., Ушак Т.І., Пазен О.Ю. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла. *Збірник наукових праць Пожежна безпека*. Львів. 2015. № 27. С. 120-126.
9. Pazen O.Yu. Mathematical modelling and computer simulation of direct method for studying boundary value problem of thermal conductivity" *Problems of Infocommunications. Science and Technology*. 2017. pp. 73-76. 2017. DOI:10.1109/INFOCOMMST.2017.8246353.
10. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М. : Физмалит, 1960. 390 с.

References:

1. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2016. vol. 89, no. 2. pp. 357-368. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>.
2. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2018. vol. 91, no. 6. pp. 1373-1384. DOI 10.1007/s10891-018-1871-3.
3. Tatsiy R. M., Stasyuk M. F., Pazen O. Yu. Pryamoy metod rascheta temperaturnogo polya v mnogosloynnoy poloy sfericheskoy konstruksii [Direct method for calculating the temperature field in a multilayer hollow spherical structure]. *Vestnik Kokshetauskogo tekhnicheskogo instituta: Kokshetau: KTIKCHSMVD Respubliki Kazakhstan*. 2018. № 1(29). S.9-20.
4. Lykov, A.V. Teoriia teploprovodnosti [The theory of heat conduction]. Moscow : Vysshaya shkola, 1967. USSR.
5. Arsenin, V.Ya. Metody matematicheskoi fizyky [Methods of Mathematical physics]. Moscow : Nauka, 1974. USSR.
6. Tihonov, A.N. and Samarskii, A.A. Uravnenie matematicheskoi fizyky [Mathematical physics equation]. Moscow : Nauka, 1977. USSR.
7. Tatsiy R. M., Pazen O. Yu. Pryamyy metod rozrakhunku nestatsionarnoho temperaturnoho polya za umov pozhezhi [Direct method of calculation unsteady temperature field in a fire]. *Zbirnyk naukovykh prats Pozhezhna bezpeka*. Lviv. 2015. № 26. S. 135-141.
8. Tatsiy R. M. Ushak T. I., Pazen O. Yu. Zahalna tretya krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovodnosti z kuskovo-stalymy koefitsiyentamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla [General third boundary value problem for the heat equation with piecewise constant coefficients and internal heat sources]. *Zbirnyk naukovykh prats Pozhezhna bezpeka*. Lviv. 2015. № 27. S. 120-126.
9. Pazen O.Yu. Mathematical modelling and computer simulation of direct method for studying boundary value problem of thermal conductivity" *Problems of Infocommunications. Science and Technology*. 2017. pp. 73-76. 2017. DOI:10.1109/INFOCOMMST.2017.8246353.
10. Tolstov G.P. Ryady Fur'ye [Fourier series]. Moscow : Fizmatlit. 1960. USSR.

R. Tatsii, O. Pazen, L. Shypot

DETERMINATION OF THE NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN THE SYSTEM OF TWO CYLINDRICAL SHELL UNDER THE FIRE CONDITIONS

The proposed work is devoted to the application of the direct method to the study of heat transfer processes in the system "solid cylinder inside a cylindrical shell". It is assumed that there is an ideal thermal contact between them, and the law of changing the ambient temperature, which rinses the surface of the structure, is an arbitrary function of time, and evenly distributed over the surface. Consequently, isotherms inside this construction are concentric circles, that is, the problem is symmetric and is solved for the first time in such a statement. To solve such a problem, the auxiliary problem of determining the distribution of a non-stationary temperature field in a two-layer hollow cylindrical structure with a "withdrawn" cylinder of sufficiently small radius is raised in parallel. In this case the symmetry condition of the original problem is replaced by the condition of the second kind on the inner surface of this construction. The implementation of the solution of the auxiliary problem is carried out by applying a reduction method using the concept of quasi-derivatives. In the future, the Fourier scheme is used with the use of the modified eigenfunctions method.

To find the solution of the original problem, the idea of the boundary transition is used by passing the radius of the withdrawn cylinder to zero. It is established that in this approach all the eigenfunctions of the corresponding problem on the eigenvalues have no singularities at zero, which means that the solutions of the original problem are constrained throughout the design. In order to illustrate the proposed method, a model example of finding the temperature field distribution in a column of a circular cross-section (concrete in a steel shell) is solved under the influence of the standard temperature regime of the fire. The results of the calculations are presented in a bulk schedule of temperature changes, depending on time and spatial coordinates.

The generalization of the results obtained in the case of any finite number of cylindrical shells is a purely technical problem, and not a fundamental one. Note that while changing the boundary condition of the third kind to any other boundary condition (for example, the first kind) does not affect the scheme of solving similar tasks. Since the general scheme of studying the distribution of temperature fields in multi-layered structures with an arbitrary number of layers in the presence of internal sources of heat is studied in detail, the setting and solving of such problems for the system of "solid cylinder inside a cylindrical shell" is not without difficulty.

Key words: cylindrical structure, quasi-derivative, direct method, boundary transition.