

модуля поділу міста на зони обслуговування, алгоритм роботи якого базується на діаграмах Вороного.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. ДБН 360-92 "Містобудування. Планування і забудова міських і сільських населених пунктів".
2. СНиП 2.07.01-89* "Градостроительство. Планировка и застройка городских и сельских поселений".
3. Метод рационального размещения пожарных депо при проектировании и обновлении районов города: Автореф. дис. канд. техн. наук: 21.06.02 / А.Г. Коссе / Харк. держ. техн. ун-т буд-ва і архіт. – Х., 2001. – 19 с.
4. Панчишин А.О., Дідух І.М. Порівняльний аналіз методів визначення кількості пожежно-рятувальних частин // Пожежна безпека: Збірник наукових праць. – Львів: ЛДУ БЖД, 2008. – № 12. – С. 51-55.
5. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. – Томск: Изд.-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.
6. Електронна карта Львова Візіком-карта. – К.: Візіком, 2006. – www.visicom.ua.

УДК 539.3

О.М.Римар, к.т.н., доцент (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

ОБЧИСЛЕННЯ РОЗМІРІВ ПЛОЩАДКИ КОНТАКТУ ТА НАЙБІЛЬШИХ НОРМАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ПРОСТОРОВОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ

© Римар О.М., 2008

Наведено уточнені методики, розроблені машинні програми та результати обчислень переміщень вздовж осі z , розмірів площадки контакту та найбільших нормальних (контактних) напружень σ_z для нового розв'язку просторової задачі теорії пружності про контакт двох тіл подвійної кривини. Методики та програми можуть бути застосовані для оптимізації та підвищення надійності та довговічності технічних засобів пожежної та рятувальної техніки.

Вступ. Надійність та довговічність машин, в тому числі і пожежної та рятувальної техніки, які працюють в умовах контактної навантаження, визначаються за параметрами напруженого стану в небезпечних точках деталей машин. Параметри напруженого стану деталей обчислюються за допомогою теорій просторових контактних задач, розв'язки яких базуються на системах переміщень точок тіл вздовж осей x , y , z .

В роботі [1] нами знайдена нова система переміщень, яка задовольняє всі необхідні умови теорії пружності, а також необхідні краєві та граничні умови для задачі про контакт двох тіл подвійної кривини. Ця система переміщень визначає новий розв'язок, позбавлений багатьох недоліків відомого розв'язку Герца [2], [3], [4] задачі про контакт двох тіл подвійної кривини.

Постановка задачі. Новий розв'язок задачі про контакт двох тіл подвійної кривини може бути ефективно застосований для оптимізації та підвищення надійності та довговічності технічних засобів. Актуальною є, наприклад, задача про обчислення

контактної міцності зубчастих передач коробок відбору потужності та швидкостей, підшипників, кривошипних механізмів і т.і. пожежних та рятувальних технічних засобів.

Новий розв'язок, в порівнянні з відомим, дає точніші результати, в тому числі до 4% менші значення розмірів площадки контакту [3], відмінні значення переміщень та суттєво відмінні значення параметрів напруженого стану, особливо для точок площадки контакту. При цьому новий розв'язок визначає до 7...8% більший тиск p_0 в центрі площадки контакту. Але, для обох розв'язків, залишається незмінним розділ, який пов'язує розміри тіл з параметрами площадки контакту, тобто дозволяє визначити ексцентриситет еліпса площадки.

За умовою задачі задано величину прикладеного осьового зусилля P , значення постійних Ламе матеріалів тіл та параметри кривини ρ їх поверхонь в головних площинах кривини zx_i та zy_i .

Поверхні двох тіл у двох головних взаємно перпендикулярних площинах zx_i та zy_i в околиці точки O початкового контакту описуються радіусами R_{ij} , як це зображено на рис.1, де: а) - поверхні тіл $i=1,2$ та радіуси їх кривини R_{ij} в головних площинах zx ($j=1$) та zy ($j=2$); б) - площадки контакту з різними значеннями ексцентриситета еліпса k , який обчислюється за формулою

$$k = \sqrt{1 - k'^2},$$

де k' - коефіцієнт стискання еліпса, $k'=b/a$, при цьому b , a - мала та велика півосі еліпса.

В загальному випадку такі тіла можуть контактувати із кутовим зміщенням ω відносно осі z своїх головних площин кривини (рис. 2).

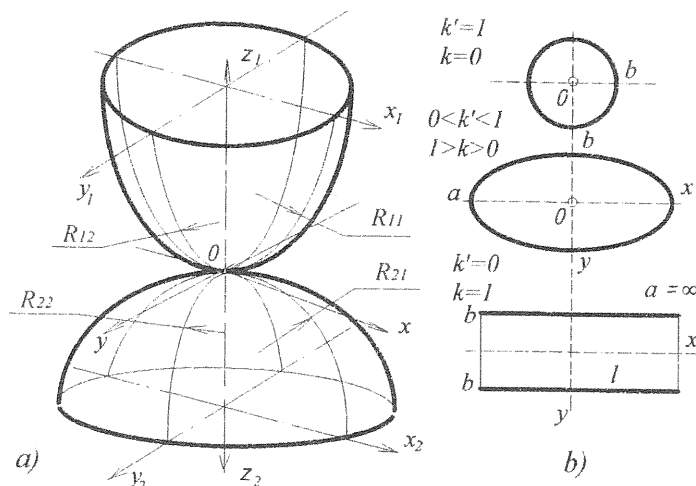


Рис.1. Початковий контакт двох тіл з головними площинами кривини zx_i та zy_i своїх поверхонь

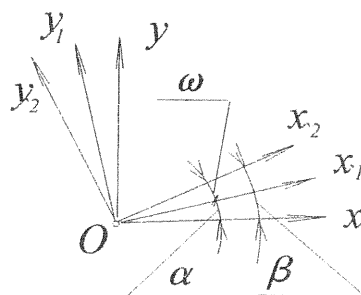


Рис. 2. Проекції головних площин кривини zx_i та zy_i поверхонь i -тих тіл на площину контакту xy при наявності відносного кутового зміщення ω аналогічних площин першого та другого тіл

Метою роботи є уточнення та спрощення методик обчислення переміщень точок тіл в напрямку осі z , розмірів площадки контакту та найбільших нормальних напружень $\sigma_z = p_o$ в точці O на основі створення програмного забезпечення в редакторі MathCAD.

Попередньо наведемо методики обчислень вказаних параметрів за обома, відомим та нашим, розв'язками, оскільки така інформація необхідна для розуміння сутності розроблених програм.

Обчислення параметрів кривини. Математичний апарат для обчислення параметрів кривини поверхонь контактуючих тіл відомий. Аналітично ця частина контактної задачі чітко описана в роботах [2], [3]. Кривина поверхонь в головних площинах першого тіла zx_1 та zy_1 відповідно

$$\rho_{11} = \frac{1}{R_{11}}, \quad \rho_{12} = \frac{1}{R_{12}} \quad (1)$$

і в головних площинах кривини zx_2 та zy_2 другого тіла (рис. 1)

$$\rho_{21} = \frac{1}{R_{21}}, \quad \rho_{22} = \frac{1}{R_{22}}. \quad (2)$$

Відома величина кута взаємного зміщення ω аналогічних головних площин кривини поверхонь тіл 1 та 2. Необхідно знайти приведені сумарні кривини $\sum \rho_a$ та $\sum \rho_b$ для осей x та y еліптичної площадки контакту. Для цього знаходять величину кута

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctg \left[- \frac{(\rho_{21} - \rho_{22}) \cdot \sin 2\omega}{(\rho_{11} - \rho_{12}) + (\rho_{21} - \rho_{22}) \cdot \cos 2\omega} \right]. \quad (3)$$

Сума та різниця кривин $\sum \rho_a$ і $\sum \rho_b$ обчислюються за формулами:

$$\sum \rho_a + \sum \rho_b = \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22} = \sum \rho = 2W, \quad (4)$$

$$\sum \rho_a - \sum \rho_b = (\rho_{11} - \rho_{12}) \cdot \cos 2\alpha + (\rho_{21} - \rho_{22}) \cdot \cos 2\beta = 2V, \quad (5)$$

де $\beta = \omega + \alpha$.

Допоміжний параметр τ обчислюється як

$$\tau = \arccos \left(\frac{\pm (\sum \rho_a - \sum \rho_b)}{\sum \rho_a + \sum \rho_b} \right). \quad (6)$$

Тепер знаходяться приведені параметри кривини

$$A = \frac{1}{2} \sum \rho \cdot \sin^2 \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum \rho_a, \quad B = \frac{1}{2} \sum \rho \cdot \cos^2 \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum \rho_b. \quad (7)$$

Якщо $\omega = 0$, то із формул (4),(5) приведені параметри кривини

$$\begin{aligned} \sum \rho_a &= \rho_{11} + \rho_{21}, & \sum \rho_b &= \rho_{12} + \rho_{22}, \\ A &= \frac{1}{2} \cdot (\rho_{11} + \rho_{21}), & B &= \frac{1}{2} \cdot (\rho_{12} + \rho_{22}). \end{aligned} \quad (8)$$

Зауважимо, що величина ρ має додатні значення, якщо центр кривини розташований тільки в середині тіла.

Обчислення переміщень. В одержаній системі [1] нового розв'язку переміщення для точок тіл $i = 1, 2$ [5]

$$w_i = \frac{\eta_i 3P}{4\pi} \int_i \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s}}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}} ds, \quad \eta_i = \frac{(1 + \nu_i)}{E_i(1 + 2\nu_i)}. \quad (9)$$

Для відомого розв'язку Герца [3], [4]

$$w_{iH} = \frac{\eta_{iH} 3P}{4\pi} \int_0^1 \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{s}}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}} ds, \quad \eta_{iH} = \frac{(1 - \nu_i^2)}{E_i}. \quad (10)$$

В формулах (9), (10) ν_i , E – коефіцієнти Пуассона і модулі пружності матеріалів контактуючих тіл, P - зусилля стискання,

$$P = \frac{2}{3} \pi a b p_0, \quad (11)$$

p_0 – тиск в точці O початкового контакту тіл.

В формулах (9), (10), (11), а також в усіх інших формулах даної роботи, розмірність параметрів визначається застосуванням тої чи іншої прийнятої системи одиниць.

Із формули (9), застосувавши тригонометричні підстановки, знайдемо, що для нового розв'язку

$$w_i = \frac{\eta_i 3P \cdot k'^2}{2\pi b} \left\{ K(k) - F(\varphi, k) - \frac{x^2}{a^2} \cdot k'^2 [D(k) - D(\varphi, k)] - \frac{y^2}{b^2} \cdot [B(k) - B(\varphi, k)] \right\}, \quad (12)$$

де $K(k)$, $D(k)$, $B(k)$ – повні еліптичні інтеграли [6], $K(\varphi, k)$, $D(\varphi, k)$, $B(\varphi, k)$ – неповні еліптичні інтеграли, k – ексцентриситет еліпса площадки контакту,

$$K(k) = B(k) + D(k),$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (13)$$

$$D(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}}, \quad D(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{\cos^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^3}}, \quad (14)$$

$$B(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad B(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{\cos^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \quad (15)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{t}}{b}, \quad (16)$$

а t є найбільшим коренем рівняння

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + t} - \frac{y^2}{b^2 + t} - \frac{z^2}{t} = 0. \quad (17)$$

Із формули (10) наближення достатньо віддалених точок контактуючих тіл за відомим розв'язком для координат $x = 0$, $y = 0$ визначається як

$$\delta = \frac{3\eta P}{2\pi a} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{3\eta P \cdot k'}{2\pi b} K(k), \quad (18)$$

де $\eta = \eta_{1H} + \eta_{2H}$.

Із формули (12) наближення δ двох точок, розташованих на осі z ($x = 0$, $y = 0$) контактуючих тіл з координатами Z_1 та Z_2 та з відповідними кутовими координатами $\varphi_1(z_1)$ і $\varphi_2(z_2)$ за формулою (16), для нового розв'язку [1], [8] визначається як

$$\delta = \frac{3\eta_1 P \cdot k'^{\varphi_1}}{2\pi b} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} + \frac{3\eta_2 P \cdot k'^{\varphi_2}}{2\pi b} \int_0^{\varphi_2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{3 \cdot P \cdot k'}{2\pi b} [\eta_1 \cdot F(\varphi_1, k) + \eta_2 \cdot F(\varphi_2, k)]. \quad (19)$$

Для нового розв'язку формули (19) дозволяють обчислити наближення δ із врахуванням реальних координат Z_1 та Z_2 . Для відомого розв'язку формули (18) враховують координати $Z_1 = \infty$, $Z_2 = \infty$, тобто не враховують реальні розміри тіл. Обчислення

переміщень та наближень за наведеними формулами не складає труднощів в математичних редакторах.

Із рівняння (17) ясно, що для $z=0$ параметр $t=0$. Звідси, для точок в площині xy , необхідно покласти $t = t_i = 0$ в формулах (9), (10), а також $\varphi = 0$ в формулі (16) та інтегралах (13), (14), (15).

В загальному випадку, якщо всі три координати $x, y, z > 0$, необхідно обчислити найбільший додатній корінь t кубічного рівняння (17). Аналітична методика такого обчислення з відповідним аналізом наведені в нашій роботі [7]. Ця методика, в загальному випадку складна та громіздка, покладена в основу створеної програми. Рівняння (17) можна представити у вигляді

$$q^3 + m_1 \cdot q^2 + m_2 \cdot q + m_3 = 0, \quad (20)$$

$$q = t/b^2,$$

де

$$m_1 = \frac{(1+k'^2)}{k'^2} - x^2 - y^2 - z^2, \quad m_2 = \frac{(1-y^2-z^2)}{k'^2} - x^2 - z^2, \quad m_3 = \frac{-z^2}{k'^2},$$

при цьому

$$\varphi = \arctg \sqrt{q}.$$

Обчислення найбільшого кореня q рівняння (17) з заданою високою точністю $TOL=10^{-10}$ до одинадцятого знаку після коми легко здійснюється в редакторі MathCAD 2000 за допомогою оператора $\text{polyroots}(v) = \mathbf{v}$. За заданими безрозмірними параметрами x, y, z та ексцентриситетом k обчислюється відносний параметр q , точність якого перевіряється підстановкою найбільшого кореня в кубічне рівняння, після чого уточнюється за допомогою оператора root . Після цього обчислюється значення кута φ . Програма 1 для обчислення параметра q :

```

rad      Обчислення параметра t =       $\sqrt{q}$  як кореня кубічного рівняння V
TOL := 10-10

k := -0.934675751481502      x := 0.7      y := 6      z := 3       $\varepsilon := \sqrt{1 - k^2}$ 
m1 :=  $\frac{(1 + \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} - x^2 - y^2 - z^2$       m2 :=  $\frac{(1 - y^2 - z^2)}{\varepsilon^2} - x^2 - z^2$       m3 :=  $\frac{-z^2}{\varepsilon^2}$ 
q3 + m1 · q2 + m2 · q + m3

v :=  $\begin{pmatrix} m_3 \\ m_2 \\ m_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$       polyroots (v) =  $\begin{pmatrix} -7.84639763920042 \times 10^0 \\ -2.03371421374086 \times 10^{-1} \\ 4.46272022648661 \times 10^1 \end{pmatrix}$        $\varepsilon = 3.55501391829188 \times 10^{-1}$ 
m3 =  $-7.12131011613755 \times 10^1$ 
m2 =  $-3.57642939011169 \times 10^2$ 
m1 =  $-3.65774332042916 \times 10^1$ 

Перевірка точності обчислення параметра
q :=  $4.46272022648661 \times 10^1$ 
q3 + q2 · m1 + q · m2 + m3 =  $-3.90940613215207 \times 10^{-11}$        $\sqrt{q} = 6.68035944129252 \times 10^0$ 
Уточнення значення кореня кубічного рівняння       $\phi := \text{atan}(\sqrt{q})$ 
q := 47       $\phi = 1.42220708314536 \times 10^0$ 
root (q3 + m1 · q2 + m2 · q + m3, q) =  $4.46272022648661 \times 10^1$ 

```

Для точок з відносними координатами

$$x = \bar{x} = \frac{x}{b} = 0.7, \quad y = \bar{y} = \frac{y}{b} = 6, \quad z = \bar{z} = \frac{z}{b} = 3$$

в програмі 1 параметр $q = 44.62720226$, для якого обчислене за формулою $\phi := \text{atan}(\sqrt{q})$ значення кута складає $\varphi = 1,42220708314536$ рад.

Обчислення розмірів площадки контакту та найбільших нормальних напружень.
Півосі площадки контакту визначаються за формулами [5]

$$\left. \begin{aligned} b^3 &= \frac{3\eta P k' B(k)}{2\pi B} \\ a^3 &= \frac{3\eta P D(k)}{2\pi A} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Із формул (21) знайдемо квадратне трансцендентне рівняння

$$k^2 - 1 + \frac{A}{B} \cdot \frac{B(k)}{D(k)} = 0, \quad (22)$$

із якого знаходиться ексцентриситет k .

Обчислення розмірів площадки контакту, переміщень та напружень з необхідною точністю можливо лише при точному обчисленні значень ексцентриситета k . В усіх відомих нам роботах та довідниках k вибирається із таблиць або графіків для заданого відношення параметрів кривини A/B , що не може забезпечити необхідну в теоретичних дослідженнях точність. Для обчислення кореня рівняння (22) створена програма, особливість якої в тому, що розв'язок дає оператор root, який "індукується" на точний машинний, без ітерацій, розв'язок командним блоком та оператором M. Блок обчислює значення M, циклічно збільшуючи значення ексцентриситета k . При досягненні близьких до істинних значень параметра k "включається" оператор root та із заданою точністю обчислює k .

Програма 2 для обчислення ексцентриситета k :

```

ω := 0.2
rad
Знаходження ексцентриситета k
ρ11 := 50    ρ12 := 10    ρ21 := 100    ρ22 := 20    TOL := 10-12
K11 := 1/ρ11  K12 := 1/ρ12  K21 := 1/ρ21  K22 := 1/ρ22
α := 1/2 * atan [ (K11 - K12) + (K21 - K22) * cos(2ω) / (-(K21 - K22) * sin(2ω)) ]
β := ω + α    W := 1/2 * (K11 + K12 + K21 + K22)
τ := acos(V/W)    τ = 0.856788930661202    V := 1/2 * [(K12 - K11) * cos(2 * α) + (K22 - K21) * cos(2 * β)]
A := 1/2 * (K11 + K12 + K21 + K22) * (sin(τ/2))2    S := A/B
B := 1/2 * (K11 + K12 + K21 + K22) * (cos(τ/2))2
k := if N > 1
      k
      k ← k + 0.000000000000000001
      break if N ≤ 0
      k
      k := root [ k2 - 1 + S * ( ∫0π/2 (cos(θ))2 / √(1 - k2 * sin(θ)2) dθ , k
                  k2 - 1 + S * ( ∫0π/2 (cos(θ))2 / √((1 - k2 * sin(θ)2)3) dθ
                  k = -0.934675751481502
                  N = 0
                  N := k2 - 1 + S * ( ∫0π/2 (cos(θ))2 / √(1 - k2 * sin(θ)2) dθ
                  N := k2 - 1 + S * ( ∫0π/2 (cos(θ))2 / √((1 - k2 * sin(θ)2)3) dθ
  
```


$$b = \sqrt[3]{\frac{3\eta P}{4\Sigma\rho_b}}, \quad p_o = \frac{2b\Sigma\rho_b}{\pi\eta}; \quad (28)$$

б) для лінійного контакту ($k' = 0$, $k = 1$, $B(k) = 1$, $A = 0$)

$$b = 2\sqrt{\frac{\eta q}{\pi\Sigma\rho_b}}, \quad p_o = \frac{b\Sigma\rho_b}{2\eta}, \quad \frac{3P}{2a} = 2q = \pi b p_o. \quad (29)$$

Результати обчислень. В програмі 3 наведено результати обчислень параметрів b , a , p_o для заданих значень постійних параметрів $\nu = 0,3$, $P = 9,8 \text{ КН}$, $E = 9,8 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \text{ Н/мм}^2$ та розмірів тіл, наведених в програмі 2.

Обчислення виконані за теоріями відомого (індекс параметрів – Н) та нового (індекс параметрів – Т) розв'язків просторової задачі. Зауважимо, що вказані індекси в програмі 3 записані після позначення відповідного параметра заголовними буквами. Таке “ігнорування” загальноприйнятих позначень *індексів* викликано особливостями математичного редактора. В програмі параметри δ , Δ показують відносну різницю значень між параметрами b та q_{\max} аналізованих розв'язків на 3,85 %. Для нашого випадку тиск $p_{o \max}$ для нового розв'язку (Tp_o) на 7,85 % більший за аналогічний параметр (Np_o) відомого.

Висновки

1. Розроблені програми для обчислення параметрів напруженого стану просторової задачі про контакт двох тіл подвійної кривини дозволяють використовувати їх з метою оптимізації довговічності та надійності деталей машин, агрегатів та приладів.

2. Такі програмні блоки можуть ефективно використовуватися в більш потужних програмах для дослідження фізичних та математичних моделей технічних засобів.

3. Сам метод з використанням взаємного *індуктивного* впливу операторів в математичному редакторі може бути застосований в програмуванні для будь-яких процесів, в тому числі стосовно всіх без винятків розділів пожежної та рятувальної справи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Римар О. М. Система переміщень точного розв'язку просторової контактної задачі // *Проектування, виробництво та експлуатація автотранспортних засобів і поїздів.* - Зб. наук. пр. - Львів: Асоціація “Автобус”, 2001. - Вип. 4. - С. 96-100.
2. Hertz H. *Über die Berührung fester elastischer Körper.* - *J. reine und angewandte Mathematic.* 1882, 92.– S.156-171.
3. Динник А. Н. *Удар и сжатие упругих тел.* - Киев: Из-во АН УССР, 1952.- Т. 1.- 151с.
4. Беляев Н. М. *Труды по теории упругости и пластичности.* - М.: Гостехиздат, 1957.– 632 с.
5. Римар О.М. *Переміщення і розміри площадки контакту для просторової контактної задачі* // *Вісник НУ “Львівська політехніка”.* - Львів:2000. -№ 412. - С. 92-96.
6. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции.* - М.: Наука, 1967.-300 с.
7. Римар О.М. *Визначення межі інтеграла ньютонівського потенціала простого шару* // *Зб. наук. пр.*- Львів: Асоціація “Автобус”, 2000.- Вип. 3.- С.103-105.
8. Римар О.М., Римар М. О. *Пружна податливість деталей машин в умовах контактного навантаження* // *Зб. наук. пр.* – Львів: Асоціація “Автобус”, 2002. – Вип. 6. – С. 158-160.