## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. *Вказівка МНС України від 28.02.2007 № 02-2257/142 про направлення Огляду з напрямку діяльності Відділу підготовки Оперативно-рятувальної служби цивільного захисту і пожежно-рятувальних сил Департаменту сил цивільного захисту.*
2. *Бут В.П., Куціщий Л.Б., Болібрух Б.В. Практичний посібник з пожежної тактики. – Львів: „Сполом", 2003. – 122 с.*
3. *Нормативи по пожежно-стройовій підготовці. Управління державної пожежної охорони МВС України. – Київ, 1996. 14 с.*
4. *СНиП 2.04.02-84* „Водоснабжение. Наружные сети и сооружения. Нормы проектирования" Утв. Госстроем СССР.—М. : Стройиздат, 1985.— 136 с.*
5. *Антіпов І.А., Кулєшов М.М., Петухова О.А. Протипожежне водопостачання. Підручник. – Харків: АЦЗ, 2004. – 255 с.*
6. *Polska norma PN–B–02863:1997 Przeciwpozarowe zaopatrzenie wodne. Siec wodociagova przeciwpozarowa. Polski Komitet Normalizacyjny dnia 28 listopada 1997 r. С. 1–3.*
7. *ГОСТ 8220-85 Гидранты пожарные подземные. Технические условия. – На заміну ГОСТ 8220—62.*
8. *ДБН Д.1.1–2–99 „ Ресурсні елементні кошторисні норми на будівельні роботи". Збірник № 22 „Водопровід-зовнішні мережі". К.: – 2000 р.*
9. *В.Городецький Служба «911» столиці Техасу // Пожежна безпека. – 2007 № 7(94)– С. 1.*

**УДК 621.86**

***А.П.Кушнір, к.т.н. (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)***

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПІДЙОМНОГО МЕХАНІЗМУ НА ОСНОВІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДЕНАВІТА-ХАРТЕНБЕРГА І МЕТОДУ ЛАГРАНЖА

Підйомні механізми дуже часто використовують при виникненні усякого роду надзвичайних ситуацій. Усі вони переважно працюють в екстремальних умовах, а тому до даних механізмів ставлять високі вимоги. В статті розроблено математичну модель підйомного механізму на основі представлення Денавіта-Хартенберга і методу Лагранжа. Дана математична модель детально описує динаміку механізму з врахуванням його конструктивних особливостей і є простою для реалізації на персональному комп'ютері.

**Постановка проблеми.** При виникненні усякого роду надзвичайних ситуацій, для рятування людей, гасіння пожеж і виконання певних робіт, дуже часто використовують підйомні механізми і висувні драбини. Усі вони переважно працюють в екстремальних умовах, а тому до даних механізмів усе частіше ставлять високі вимоги, а саме: висока швидкодія, точність позиціонування і, навіть, стабілізація на заданому рівні робочої площадки при русі платформи. Ручне керування, яке широко використовують в даних механізмах, не здатне забезпечити усі ці вимоги, а тому більшість цих функцій усе частіше покладають на систему автоматичного керування (САК). Для створення такої високоточної та швидкодіючої САК підйомним механізмом, а також для дослідження її характеристик, необхідно розробити математичну модель даного механізму. Така математична модель дозволила б досліджувати характеристики САК без проведення натурного експерименту, який вимагає значних затрат часу та коштів, а також досліджувати характеристики самого підйомного механізма та вибирати оптимальні параметри конструкції.

**Аналіз останніх досліджень.** Підйомно-транспортним машинам і підйомним механізмам присвячено багато публікацій. Однак більшість із літературних джерел обмежується лише описом даних машин на рівні їх поділу за технічними характеристиками та будовою. Так в [1, 2] подано основні технічні характеристики, які характеризують дані машини та їх класифікацію, наведено опис марок підйомників та їх будову. Що стосується їх математичного опису, то ця проблема до кінця не вирішена. Значну увагу приділено математичному опису кранів [3, 4], які також широко використовують для рятувальних робіт. Для їх опису використовують сучасний математичний апарат, що дозволяє створювати математичні моделі, які детально описують динаміку руху з врахуванням конструктивних особливостей механізму.

**Задачі дослідження.** В даній статті для розроблення математичної моделі підйомного механізму пропонується застосувати матрицево-векторний підхід на основі представлення Денавіта-Хартенберга з використанням лагранжевих формалізмів. Таке їх сумісне використання дасть можливість отримати рівняння динаміки механічної частини, які детально описують конструкцію виконавчого механізму з урахуванням конструктивних особливостей його елементів і на основі даної моделі синтезувати САК, а також дана математична модель не буде викликати складнощів при реалізації на персональному комп'ютері.

**Вирішення проблеми.** Денавітом і Хартенбергом для опису обертальних і поступальних зв'язків між сусідніми ланками був запропонований [5, 6] матричний метод послідовної побудови систем координат, зв'язаних з кожною ланкою кінематичної схеми. Суть представлення Денавіта-Хартенберга полягає в тому, що необхідно сформувати однорідну матрицю перетворення, яка має розмірність 4×4. Дана матриця описує положення системи координат кожної ланки відносно системи координат попередньої ланки. Це дає можливість послідовно перетворити останню систему координат, яка зв'язана нерухомо з кінцем останньої ланки в базову систему координат. Останньою ланкою в даному випадку є робоча площадка (корзина). Базова система координат є інерційною системою координат і нерухомо прив'язана до платформи машини.

Кінематична схема автомобільного підйомника показана на рис. 1. Механізм складається з нерухомої платформи 1 (опорна рама), поворотної платформи 2, нижнього коліна 3, середнього коліна 4, верхнього коліна 5, робочої площадки 6.

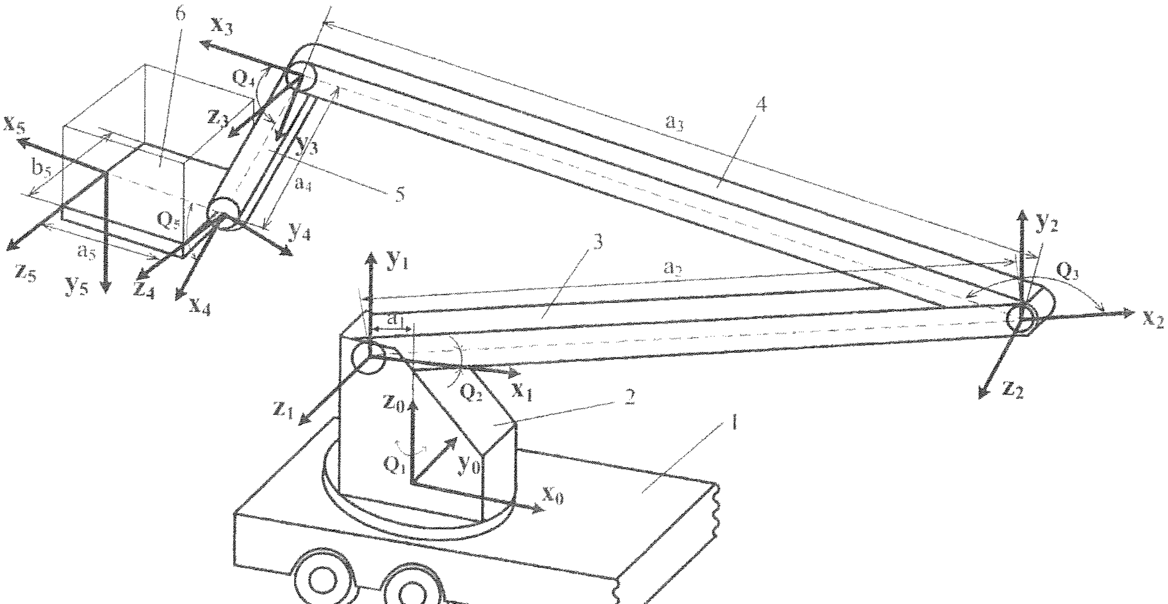


*Рис. 1. Кінематична схема автомобільного підйомника*

Згідно представлення Денавіта-Хартенберга і методу Лагранжа будемо вважати, що поворотна платформа – це перша ланка, нижнє коліно – друга ланка, середнє коліно – третя ланка, верхнє коліно – четверта ланка, робоча площадка – п'ята ланка. Система координат ланок формується згідно алгоритму описаному в [5]. Згідно рис. 1 приймемо наступні позначення: $a_2$ – довжина нижнього коліна; $a_3$ – довжина середнього коліна; $a_4$ – довжина верхнього коліна; $a_5$, $в_5$ – довжина і ширина робочої платформи; $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$, $m_5$ – маси поворотної платформи, нижнього, середнього і верхнього колін та робочої площадки відповідно. Параметри системи координат ланок підйомного механізму, з урахуванням цих позначень, наведені в табл. 1.

*Таблиця 1*

*Параметри системи координат*

| Зчленування | $\theta_i$ | $\alpha_i$ | $a_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\theta_1$ | 90° | $a_1$ | $d_1$ |
| 2 | $\theta_2$ | 0 | $a_2$ | 0 |
| 3 | $\theta_3$ | 0 | $a_3$ | 0 |
| 4 | $\theta_4$ | 0 | $a_4$ | 0 |
| 5 | $\theta_5$ | 0 | $a_5$ | 0 |

Однорідна матриця перетворення для обертального руху має вигляд [5, 6]:

$$^{i\text{-}1}\mathbf{A}_i = \begin{vmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

а для поступального руху:

$$^{i\text{-}1}\mathbf{A}_i = \begin{vmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Якщо задані координати точки $r_i$ в $i$-й системі координат, то використовуючи матрицю перетворення (1) або (2), можна знайти координати цієї точки в $i$-1 системі координат:

$$^{i\text{-}1}\mathbf{r}_i = {}^{i\text{-}1}\mathbf{A}_i\, {}^{i}\mathbf{r}_i,$$

де $^{i\text{-}1}\mathbf{r}_i = \begin{vmatrix} x_{i-1} & y_{i-1} & z_{i-1} & 1 \end{vmatrix}^T$ – координати точки $r_i$ в $i$-1-й системі координат;

$^{i}\mathbf{r}_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{vmatrix}^T$ – координати точки $r_i$ в $i$-й системі координат.

Перемноживши матриці перетворення для суміжних систем координат, знайдемо таку матрицю перетворення, яка в геометричному понятті визначає зв'язок між системою координат $i$-ланки і абсолютною системою координат (базовою системою координат).

$$^{0}\mathbf{A}_i = {}^{0}\mathbf{A}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{A}_2 \cdot {}^{2}\mathbf{A}_3 \cdot \ldots \cdot {}^{i\text{-}1}\mathbf{A}_i\,. \qquad (3)$$

Використовуючи вираз (3), можна знайти координати точки $r_i$, яка є нерухомою в і-й системі координат відносно базової системи координат.

Для прийнятих систем координат, на підставі табл. 1 та матриць $^{i\text{-}1}A_i$ (1) і (2), знайдемо однорідні матриці перетворення для підйомного механізму:

$$
{}^{0}A_1=\begin{vmatrix}\cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0\\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & d_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix},\ {}^{1}A_2=\begin{vmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_2\cos\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_2\sin\theta_2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix};
$$

$$
{}^{2}A_3=\begin{vmatrix}\cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & a_3\cos\theta_3\\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & a_3\sin\theta_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix};\ {}^{3}A_4=\begin{vmatrix}\cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & a_4\cos\theta_4\\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & a_4\sin\theta_4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix};
$$

$$
{}^{4}A_5=\begin{vmatrix}\cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & a_5\cos\theta_5\\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & a_5\sin\theta_5\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}. \qquad (4)
$$

Тоді, вираз (3) дозволить знайти: матриці, які зв'язують системи координат 2, 3, 4, 5 ланок з базовою ${}^{0}\mathbf{A}_2$, ${}^{0}\mathbf{A}_3$, ${}^{0}\mathbf{A}_4$, ${}^{0}\mathbf{A}_5$; матриці, які зв'язують системи координат 3, 4, 5 ланок з 1-ю ${}^{1}\mathbf{A}_3$, ${}^{1}\mathbf{A}_4$, ${}^{1}\mathbf{A}_5$; матриці, які зв'язують системи координат 4, 5 ланок з 2-ю ${}^{2}\mathbf{A}_4$, ${}^{3}\mathbf{A}_5$; матриці, які зв'язують системи координат 5 ланки з 3-ю ${}^{3}\mathbf{A}_5$; матрицю, яка зв'язує систему координат 5 ланки з 4-ю ${}^{4}\mathbf{A}_5$:

$$
{}^{0}\mathbf{A}_2={}^{0}\mathbf{A}_1\cdot{}^{1}\mathbf{A}_2;\ {}^{0}\mathbf{A}_3={}^{0}\mathbf{A}_1\cdot{}^{1}\mathbf{A}_2\cdot{}^{2}\mathbf{A}_3;\ {}^{0}\mathbf{A}_4={}^{0}\mathbf{A}_1\cdot{}^{1}\mathbf{A}_2\cdot{}^{2}\mathbf{A}_3\cdot{}^{3}\mathbf{A}_4;\ {}^{0}\mathbf{A}_5={}^{0}\mathbf{A}_1\cdot{}^{1}\mathbf{A}_2\cdot{}^{2}\mathbf{A}_3\cdot{}^{3}\mathbf{A}_4\cdot{}^{3}\mathbf{A}_4;
$$
$$
{}^{1}\mathbf{A}_3={}^{1}\mathbf{A}_2\cdot{}^{2}\mathbf{A}_3;\ {}^{1}\mathbf{A}_4={}^{1}\mathbf{A}_2\cdot{}^{2}\mathbf{A}_3\cdot{}^{3}\mathbf{A}_4;\ {}^{1}\mathbf{A}_5={}^{1}\mathbf{A}_2\cdot{}^{2}\mathbf{A}_3\cdot{}^{3}\mathbf{A}_4\cdot{}^{4}\mathbf{A}_5;\ {}^{2}\mathbf{A}_4={}^{2}\mathbf{A}_3\cdot{}^{3}\mathbf{A}_4;
$$
$$
{}^{2}\mathbf{A}_5={}^{2}\mathbf{A}_3\cdot{}^{3}\mathbf{A}_4\cdot{}^{4}\mathbf{A}_5;\ {}^{3}\mathbf{A}_5={}^{3}\mathbf{A}_4\cdot{}^{4}\mathbf{A}_5. \qquad (5)
$$

Для складання диференціальних рівнянь руху виконавчого механізму системи використаємо рівняння Лагранжа [5, 6]

$$
\tau_i=\sum_{k=1}^{n}D_{ik}\cdot\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}h_{ikm}\cdot\dot{q}_k\cdot\dot{q}_m+C_i\,, \qquad (6)
$$

де $D_{ik}$ – коефіцієнти, які встановлюють зв'язок сил, моментів, що діють у зчленуваннях з прискореннями приєднаних змінних; $h_{ikm}$ – коефіцієнти, які встановлюють зв'язок сил і моментів, що діють у зчленуваннях, із швидкостями зміни приєднаних змінних; $C_i$ – коефіцієнти, які враховують силу тяжіння, що діє на кожну ланку.

Вираз (6) також може бути записаним у векторно-матрицевій формі:

$$
\boldsymbol{\tau}(t)=\mathbf{D}(\mathbf{q}(t))\cdot\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{h}(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))+\mathbf{C}(\mathbf{q}(t)), \qquad (7)
$$

де $\boldsymbol{\tau}(t)=[\tau_1(t),\ \tau_2(t),\ \ldots\ \tau_n(t)]^T$ – вектор узагальнених сил (моментів), які створюються силовими приводами в зчленуваннях; $\mathbf{q}(t)=[q_1(t),\ q_2(t),\ \ldots\ q_n(t)]^T$ – вектор приєднаних змінних; $\dot{\mathbf{q}}(t)=[\dot{q}_1(t),\dot{q}_2(t),\ldots,\dot{q}_n(t)]^T$ – вектор узагальнених швидкостей; $\ddot{\mathbf{q}}(t)=[\ddot{q}_1(t),\ddot{q}_2(t),\ldots,\ddot{q}_n(t)]^T$ – вектор узагальнених прискорень; $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ – симетрична матриця розмірністю $n\times n$; $\mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=(h_1, h_2,\ldots,h_n)^T$ – вектор коріолісових і відцентрових сил; $\mathbf{C}(\mathbf{q})=(C_1, C_2,\ldots,C_n)^T$ – вектор гравітаційних сил (моментів).

Згідно з даним описом, векторно-матрицеве рівняння підйомного механізму (7) матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Елементи матриці $\mathbf{D}$ визначаються згідно виразу $D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^{n} Tr\left(\mathbf{U}_{jk}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{ji}^{\,T}\right)$ (де i, k = 1, 2, ... , n) та будуть мати такий вигляд:

$$D_{11} = Tr\left(\mathbf{U}_{11}\mathbf{J}_1\mathbf{U}_{11}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{21}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{31}\mathbf{J}_3\mathbf{U}_{31}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{41}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{41}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{51}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{51}^{\,T}\right);$$

$$D_{12} = D_{21} = Tr\left(\mathbf{U}_{22}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{32}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{31}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{42}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{41}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{52}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{51}^{\,T}\right);$$

$$D_{13} = D_{31} = Tr\left(\mathbf{U}_{33}\mathbf{J}_3\mathbf{U}_{31}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{43}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{41}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{53}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{51}^{\,T}\right);$$

$$D_{14} = D_{41} = Tr\left(\mathbf{U}_{44}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{41}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{54}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{51}^{\,T}\right); \; D_{15} = D_{51} = Tr\left(\mathbf{U}_{55}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{51}^{\,T}\right);$$

$$D_{22} = Tr\left(\mathbf{U}_{22}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{22}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{32}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{32}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{42}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{42}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{52}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{52}^{\,T}\right);$$

$$D_{23} = D_{32} = Tr\left(\mathbf{U}_{33}\mathbf{J}_3\mathbf{U}_{32}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{43}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{42}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{53}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{52}^{\,T}\right);$$

$$D_{24} = D_{42} = Tr\left(\mathbf{U}_{44}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{42}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{54}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{52}^{\,T}\right); \; D_{25} = D_{52} = Tr\left(\mathbf{U}_{55}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{52}^{\,T}\right);$$

$$D_{33} = Tr\left(\mathbf{U}_{33}\mathbf{J}_3\mathbf{U}_{33}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{43}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{43}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{53}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{53}^{\,T}\right);$$

$$D_{34} = D_{43} = Tr\left(\mathbf{U}_{44}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{43}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{54}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{53}^{\,T}\right);$$

$$D_{35} = D_{53} = Tr\left(\mathbf{U}_{55}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{53}^{\,T}\right); D_{44} = Tr\left(\mathbf{U}_{44}\mathbf{J}_4\mathbf{U}_{44}^{\,T}\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{54}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{54}^{\,T}\right);$$

$$D_{45} = D_{54} = Tr\left(\mathbf{U}_{55}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{54}^{\,T}\right); \; D_{55} = Tr\left(\mathbf{U}_{55}\mathbf{J}_5\mathbf{U}_{55}^{\,T}\right). \tag{9}$$

Тут матриця $\mathbf{U}_{ij}$ описує зміну положення i-ї ланки, яке спричинене рухом в j-му зчленуванні і обчислюється за виразом:

$$\mathbf{U}_{ij} = \frac{\partial\, {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{j-1} \cdot \mathbf{Q}_j \cdot {}^{j-1}\mathbf{A}_i, & \text{я я} \quad j \le i \\ 0, & \text{яякщ } j > i, \end{cases} \tag{10}$$

де матриця $\mathbf{Q}_i$ для обертового та поступального зчленувань має вигляд:

$$\mathbf{Q}_{i\,обер} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{i\,пост} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Звідси запишемо, що:

$$\mathbf{U}_{11} = \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_1; \; \mathbf{U}_{21} = \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_2; \; \mathbf{U}_{31} = \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_3; \; \mathbf{U}_{41} = \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_4; \; \mathbf{U}_{51} = \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0\mathbf{A}_5;$$

$$\mathbf{U}_{22} = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_2; \; \mathbf{U}_{32} = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_3; \; \mathbf{U}_{42} = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_4; \; \mathbf{U}_{52} = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1\mathbf{A}_5;$$

$$\mathbf{U}_{33} = {}^0\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}_3 \cdot {}^2\mathbf{A}_3; \; \mathbf{U}_{43} = {}^0\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}_3 \cdot {}^2\mathbf{A}_4; \; \mathbf{U}_{53} = {}^0\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}_3 \cdot {}^2\mathbf{A}_5; \; \mathbf{U}_{33} = {}^0\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}_3 \cdot {}^2\mathbf{A}_3;$$

$$\mathbf{U}_{44} = {}^0\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{Q}_4 \cdot {}^3\mathbf{A}_4; \; \mathbf{U}_{54} = {}^0\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{Q}_4 \cdot {}^3\mathbf{A}_5; \; \mathbf{U}_{55} = {}^0\mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{Q}_5 \cdot {}^4\mathbf{A}_5. \tag{11}$$

Згідно прийнятих систем координат в елементах підйомного механізму (див. рис. 1) та їх геометричних розмірів, знайдемо матрицю інерційності $J_i$ для кожної ланки. Елементи матриці $J_i$ обчислюються за відомими виразами [5]. Матриця інерційності для рухомої платформи, має вигляд:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{vmatrix} I_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 & -I_{24} \\ 0 & 0 & I_{33} & 0 \\ 0 & -I_{24} & 0 & m_1 \end{vmatrix}, \qquad (12)$$

де $I_{11}$, $I_{22}$, $I_{33}$, $I_{24}$ – елементи матриці $\mathbf{J}_1$ значення яких будуть залежати від форми і геометричних розмірів рухомої платформи.

Довжина колон є більшою від їх ширини і висоти, а отже моменти інерції відносно даної системи координат будуть незначними, то можна прийняти колони за однорідні стержні. Тоді матриці $\mathbf{J_2}$, $\mathbf{J_3}$, $\mathbf{J_4}$ будуть мати вигляд:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}a_2{}^2 m_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a_2 m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}a_2 m_2 & 0 & 0 & m_2 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{J}_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}a_3{}^2 m_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a_3 m_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}a_3 m_3 & 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}a_4{}^2 m_4 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a_4 m_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}a_4 m_4 & 0 & 0 & m_4 \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Оскільки довжина і ширина корзини є більшою за її товщину, тоді її можна прийняти за однорідну пластину. Матриця $\mathbf{J_5}$ буде мати вигляд:

$$\mathbf{J}_5 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}a_5{}^2 m_5 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a_5 m_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}b_5 m_5 & 0 \\ -\frac{1}{2}a_5 m_5 & 0 & 0 & m_5 \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Згідно виразів (9) і матриць (11), (12), (13), (14) можна знайти елементи матриці $\mathbf{D}$.

Для визначення складових, які описують відцентрові і коріолісові сили, використаємо вираз $h_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m$ (де $i = 1, 2, \dots, n$). Для нашого випадку вони мають вигляд:

$$h_1 = \sum_{k=1}^{5}\sum_{m=1}^{5} h_{1km}\dot{q}_k\dot{q}_m = h_{111}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + h_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h_{113}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + h_{114}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + h_{115}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + h_{121}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 +$$
$$+ h_{122}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 + h_{123}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + h_{124}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 + h_{125}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + h_{131}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + h_{132}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + h_{133}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_3 + h_{134}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 +$$
$$+ h_{135}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5 + h_{141}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_1 + h_{142}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_2 + h_{143}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_3 + h_{144}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_4 + h_{145}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + h_{151}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_1 + h_{152}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_2 +$$
$$+ h_{153}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_3 + h_{154}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_4 + h_{155}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_5;$$

$$h_2 = \sum_{k=2}^{5}\sum_{m=2}^{5} h_{2km}\dot{q}_k\dot{q}_m = h_{211}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + h_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h_{213}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + h_{214}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + h_{215}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + h_{221}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 +$$
$$+ h_{222}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 + h_{223}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + h_{224}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 + h_{225}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + h_{231}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + h_{232}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + h_{233}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_3 + h_{234}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 +$$
$$+ h_{235}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5 + h_{241}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_1 + h_{242}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_2 + h_{243}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_3 + h_{244}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_4 + h_{245}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + h_{251}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_1 + h_{252}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_2 +$$
$$+ h_{253}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_3 + h_{254}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_4 + h_{255}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_5;$$
$$h_3 = \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} h_{3km}\dot{q}_k\dot{q}_m = h_{311}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + h_{312}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h_{313}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + h_{314}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + h_{315}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + h_{321}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 +$$
$$+ h_{322}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 + h_{323}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + h_{324}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 + h_{325}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + h_{331}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + h_{332}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + h_{333}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_3 + h_{334}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 +$$
$$+ h_{335}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5 + h_{341}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_1 + h_{342}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_2 + h_{343}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_3 + h_{344}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_4 + h_{345}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + h_{351}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_1 + h_{352}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_2 +$$
$$+ h_{353}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_3 + h_{354}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_4 + h_{355}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_5;$$
$$h_4 = \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} h_{3km}\dot{q}_k\dot{q}_m = h_{411}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + h_{412}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h_{413}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + h_{414}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + h_{415}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + h_{421}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 +$$
$$+ h_{422}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 + h_{423}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + h_{424}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 + h_{425}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + h_{431}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + h_{432}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + h_{433}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_3 + h_{434}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 +$$
$$+ h_{435}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5 + h_{441}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_1 + h_{442}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_2 + h_{443}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_3 + h_{444}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_4 + h_{445}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + h_{451}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_1 + h_{452}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_2 +$$
$$+ h_{453}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_3 + h_{454}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_4 + h_{455}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_5;$$
$$h_5 = \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} h_{3km}\dot{q}_k\dot{q}_m = h_{511}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + h_{512}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h_{513}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + h_{514}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + h_{515}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + h_{521}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 +$$
$$+ h_{522}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 + h_{523}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + h_{524}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 + h_{525}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + h_{531}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + h_{532}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + h_{533}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_3 + h_{534}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 +$$
$$+ h_{535}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5 + h_{541}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_1 + h_{542}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_2 + h_{543}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_3 + h_{544}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_4 + h_{545}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + h_{551}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_1 + h_{552}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_2 +$$
$$+ h_{553}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_3 + h_{554}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_4 + h_{555}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_5. \qquad (15)$$

Коефіцієнти $h_{ikm}$ визначаємо з виразу

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^{n} Tr\left(\mathbf{U}_{jkm}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{ji}^{T}\right), \qquad (16)$$

де $i$, k, m = 1, 2, ... , n;

$$\mathbf{U}_{jkm} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{k-1}\cdot\mathbf{Q}_k\cdot{}^{k-1}\mathbf{A}_{m-1}\cdot\mathbf{Q}_m\cdot{}^{m-1}\mathbf{A}_m, & \text{якщо } j \ge m \ge k \\ {}^0\mathbf{A}_{m-1}\cdot\mathbf{Q}_m\cdot{}^{m-1}\mathbf{A}_{k-1}\cdot\mathbf{Q}_k\cdot{}^{k-1}\mathbf{A}_j, & \text{якщо } j \ge k \ge m \\ 0, & \text{якщо } j < k \text{ або } j < m. \end{cases}$$

Вплив гравітаційних сил (моментів), які діють на підйомний механізм, визначаються за формулою $C_i = \sum_{j=i}^{n}\left(-\mathbf{m}_j\mathbf{g}\mathbf{U}_{ji}{}^j\bar{\mathbf{r}}_j\right)$ (де $i$ = 1, 2, ... , n; $\mathbf{g} = |0 \quad 0 \quad -g \quad 0|$ – вектор рядок, що описує гравітаційне прискорення в базовій системі координат; ${}^i\bar{\mathbf{r}}_i$ – радіус-вектор центра мас $i$-ланки). Для нашого випадку вирази для їх обчислення запишуться таким чином:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\left(m_1\mathbf{g}\mathbf{U}_{11}{}^1\bar{\mathbf{r}}_1 + m_2\mathbf{g}\mathbf{U}_{21}{}^2\bar{\mathbf{r}}_2 + m_3\mathbf{g}\mathbf{U}_{31}{}^3\bar{\mathbf{r}}_3 + m_4\mathbf{g}\mathbf{U}_{41}{}^4\bar{\mathbf{r}}_4 + m_5\mathbf{g}\mathbf{U}_{51}{}^5\bar{\mathbf{r}}_5\right), \\ C_2 &= -\left(m_2\mathbf{g}\mathbf{U}_{22}{}^2\bar{\mathbf{r}}_2 + m_3\mathbf{g}\mathbf{U}_{32}{}^3\mathbf{r}_3 + m_4\mathbf{g}\mathbf{U}_{42}{}^4\mathbf{r}_4 + m_5\mathbf{g}\mathbf{U}_{52}{}^5\mathbf{r}_5\right), \\ C_3 &= -\left(m_3\mathbf{g}\mathbf{U}_{33}{}^3\bar{\mathbf{r}}_3 + m_4\mathbf{g}\mathbf{U}_{43}{}^4\mathbf{r}_4 + m_5\mathbf{g}\mathbf{U}_{53}{}^5\mathbf{r}_5\right), \\ C_4 &= -\left(m_4\mathbf{g}\mathbf{U}_{44}{}^4\mathbf{r}_4 + m_5\mathbf{g}\mathbf{U}_{54}{}^5\mathbf{r}_5\right), \\ C_5 &= -\left(m_5\mathbf{g}\mathbf{U}_{55}{}^5\mathbf{r}_5\right). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Вектор узагальнених моментів, які створюються зовнішніми впливами в зчленуваннях має вигляд:

$$\tau(t) = \begin{vmatrix} M_1 - M_{f1} \\ M_2 - M_{f2} \\ M_3 - M_{f3} \\ M_4 - M_{f4} \\ M_5 - M_{f5} \end{vmatrix}, \qquad (18)$$

де $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M_5$ – моменти, що діє на ланки підйомного механізму з боку приводів механізму переміщення;

$M_{f1}$, $M_{f2}$, $M_{f3}$, $M_{f4}$, $M_{f5}$ – моменти зовнішнього в'язкого тертя у відповідних зчленуваннях.

Підставивши знайдені вирази (9), (15), (17), (18) у (8) і провівши необхідні перетворення, отримаємо математичну модель, що описує динаміку руху підйомного механізму.

**Висновки.**

Розроблено математичну модель підйомного механізму на основі представлення Денавіта-Хартенберга і методу Лагранжа, яка дозволяє:

- досліджувати динаміку руху робочої площадки з урахуванням конструктивних особливостей підйомного механізму;
- досліджувати динамічні властивості підйомних механізмів, які знаходяться на стадії проектування, коли немає фізичної моделі на якій можна проводити дослідження;
- синтезувати високоточні САК, до яких ставляться високі вимоги та досліджувати їх характеристики в різних режимах роботи.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. *Поляков В.И. Машины для монтажных работ и вертикального транспорта.*
2. *Вайнсон А.А. Подъемно-транспортные машины: Учебник для вузов по специальности "Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машини и оборудование". – М.: Машиностроение, 1989. – 536с.*
3. *Іванченко Ф.К. Підйомно-транспортні машини: Підручник. – Вища шк., 1993. – 413с.*
4. *Александров. Подъемно-транспортные машины: Учеб. для машиностроительных спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 520с.*
5. *Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. – М.: Мир, 1989. – 624с.*
6. *Шахинпур М. Курс робототехники. – М.: Мир, 1990. – 327с.*