

Д.Н. Откидач, к.т.н., доцент, Ю.В. Цапко, к.т.н., с.н.с. (Украинский научно-исследовательский институт пожарной безопасности МЧС Украины)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ В НАСЫПИ РАСТИТЕЛЬНОГО СЫРЬЯ

Определена зависимость и проведено моделирование динамики тепловыделения в насыпи растительного сырья от роста и размеров популяции активных микроорганизмов

По данным [1] биологическое окисление в клетках микроорганизмов чаще всего происходит путём дегидрогенизации. Перенос электрона водорода от окислителя к акцептору осуществляется различными окислительными ферментами. По конечному акцептору водорода окисление классифицируется как аэробное и анаэробное.

При аэробном окислении растительного сырья процесс осуществляется за счёт кислорода воздуха. Конечными продуктами являются вода и диоксид углерода. В случае анаэробного процесса дыхания (брожения) окисление происходит без расходования кислорода воздуха, а конечными акцепторами водорода служат органические и неорганические соединения, возникает не только спиртовое, но и молочно-кислое брожение.

Принимаем, что тепловыделение в процессе биохимического обмена энергии активными микроорганизмами растительного сырья с окружающей газовой средой – пропорционально размерам (численности) их популяции в насыпи, а именно:

$$\psi = q_0 \frac{N}{V} X, \quad (1)$$

где q_0 – мощность тепловыделения в результате жизнедеятельности отдельного микроорганизма, Вт;

N – численность (размер) популяции активных (живых) микроорганизмов в объёме насыпи V (в m^3),

X – доля объёма насыпи, принимающая участие в биохимическом обменном процессе.

В соответствии с [2, 3], размер популяции микроорганизмов может быть определён из системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= (\alpha - \beta \cdot R) \cdot N, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma \cdot N, \\ \frac{dX}{dt} &= k \cdot (a - X) \cdot N, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где α , β , γ , k и a – константы, определяемые экспериментально [2, 4];

R – функция отравляющих веществ, значения которой равны доле микроорганизмов, прекративших жизнедеятельность в результате неблагоприятных условий: накопления продуктов распада ферментативной деятельности; выделения отравляющих веществ в ходе обменных процессов; повышения температуры.

Предположим, что значения функции количества активных микроорганизмов в органической массе в начальный момент времени $N(0) = N_0$ и по данным экспериментов эта функция обязательно имеет точку глобального максимума (максимального из возможного количества микроорганизмов) $t = t_m$, в которой $N(t_m) = N_m$.

По нашему мнению – величины α , β , γ , k и a являются константами интегрирования, а экспериментально должны определяться N_m и t_m . Кроме того, уже по физическому содержанию, часть из них не зависит от краевых условий. Например, в третьем уравнении системы (2) заведомо нужно принять $a = 1$, поскольку величина X не может превышать 1 или принимать отрицательные значения. Ниже представлено решение задачи динамики размеров популяции микроорганизмов в ином, более удобном для исследований виде, и доказано сделанное утверждение о константах уравнений.

Из первого уравнения системы (2) находим функцию динамики отравляющих веществ

$$R = \frac{\alpha N - \frac{dN}{dt}}{\beta N} = \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right). \quad (3)$$

Дифференцируем это выражение по времени и результат подставляем в левую часть второго уравнения системы (2), имеем

$$\frac{d^2 N}{dt^2} - \frac{1}{N} \left(\frac{dN}{dt} \right)^2 = -\beta \gamma N^2. \quad (4)$$

Делаем замену [5]:

$$\frac{dN}{dt} = p, \quad \frac{d^2 N}{dt^2} = p \frac{dp}{dN}, \quad (5)$$

тогда после подстановки выражений (5) в уравнение (4) получается уравнение Бернулли [5]:

$$p \frac{dp}{dN} - \frac{1}{N} p^2 = -\beta \gamma N^2. \quad (6)$$

В результате очередной замены

$$z = p^2; \quad \frac{dz}{dN} = 2p \frac{dp}{dN} \quad (7)$$

уравнение (6) преобразуется в линейное уравнение

$$\frac{dz}{dN} - 2 \frac{1}{N} z = -2 \beta \gamma N^2. \quad (8)$$

Для отыскания общего решения неоднородного уравнения (8) применим метод вариации произвольной постоянной [5] и искомое решение будет иметь вид:

$$N = -2 \frac{A^2}{\beta \gamma} \frac{\bar{A} e^{At}}{(1 - \bar{A} e^{At})^2}. \quad (9)$$

С учётом
$$\frac{4 \cdot \bar{A} e^{At}}{(1 - \bar{A} e^{At})^2} = \frac{1}{ch^2 \left[\frac{1}{2} (\Delta + At) \right]}, \quad (10)$$

где $\Delta = \ln(-\bar{A})$

решение (9) можно представить в удобном для исследований виде:

$$N = \frac{A^2}{2\beta\gamma} \frac{1}{ch^2 \left[\frac{1}{2} (\Delta + At) \right]}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что при t_m функция N ограничена и имеет максимум N_m в случае

$$A^2 = 2N_m \beta \gamma. \quad (12)$$

В этом случае, в соответствии с (9)

$$N = -4N_m \frac{\bar{A}e^{At}}{(1 - \bar{A}e^{At})^2}, \quad (13)$$

а согласно (11):

$$N = \frac{N_m}{\operatorname{ch}^2 \left[\frac{1}{2}(\Delta + At) \right]}. \quad (14)$$

По начальному условию и известному значению функции в точке максимума, на основании (13) составляем систему уравнений относительно констант A и \bar{A} :

$$N_0 = -4N_m \frac{\bar{A}}{(1 - \bar{A})^2}; \quad N_m = -4N_m \frac{\bar{A}e^{At_m}}{(1 - \bar{A}e^{At_m})^2}. \quad (15)$$

Из первого уравнения следует квадратное уравнение относительно \bar{A} :

$$\bar{A}^2 - 2 \left(1 - 2 \frac{N_m}{N_0} \right) \bar{A} + 1 = 0, \quad \text{с решением } \bar{A} = 1 - 2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{N_0}{N_m}} \right) \frac{N_m}{N_0} = 1 - 2\delta \frac{N_m}{N_0}. \quad (16)$$

где $1 + \sqrt{1 - \frac{N_0}{N_m}} = \delta$.

Решением (13) будет уравнение в виде

$$N = -4N_m \frac{\left(1 - 2\delta \frac{N_m}{N_0} \right) \exp(At)}{\left\{ \left(1 - 2\delta \frac{N_m}{N_0} \right) \exp(At) - 1 \right\}^2}, \quad (17)$$

где $A = -\frac{1}{t_m} \ln(-\bar{A})$.

Если же использовать общее решение в виде (14), то в начальный момент

$$N_0 = \frac{N_m}{\operatorname{ch}^2(\Delta/2)}, \quad (18)$$

откуда, с учетом $\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, для $x \geq 1$, получим

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot \ln \left[\sqrt{\frac{N_m}{N_0}} + \sqrt{\left(\frac{N_m}{N_0} \right)^2 - 1} \right] = \ln \left[2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{N_0}{N_m}} \right) \frac{N_m}{N_0} - 1 \right] = \\ &= \ln \left(2 \cdot \delta \frac{N_m}{N_0} - 1 \right) = \ln(-\bar{A}) = -A \cdot t_m. \end{aligned} \quad (19)$$

С учётом (19) формула (14) представляется в следующем виде

$$N = \frac{N_m}{\operatorname{ch}^2 \left[\left(1 - \frac{t}{t_m} \right) \cdot \frac{\Delta}{2} \right]}, \quad (20)$$

и которую используем в дальнейших исследованиях.

Используя выражение (20), находим производную

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\Delta}{t_m} N \cdot \operatorname{th} \left[\left(1 - \frac{t}{t_m} \right) \cdot \frac{\Delta}{2} \right]. \quad (21)$$

Подставляя (21) в уравнение (3), приходим к выводу, что функция отравляющих

веществ должна удовлетворять уравнению:

$$R = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} \frac{\Delta}{t_m} \operatorname{th} \left[\left(1 - \frac{t}{t_m} \right) \frac{\Delta}{2} \right], \quad (22)$$

с другой стороны, если во второе уравнение системы (2) в правую часть подставить вместо N – его выражение (20), то после интегрирования полученного уравнения имеем:

$$R = B - 2\gamma \frac{t_m}{\Delta} \operatorname{th} \left[\left(1 - \frac{t}{t_m} \right) \frac{\Delta}{2} \right], \quad (23)$$

где B – константа интегрирования.

Сравнивая выражения (22) и (23), приходим к выводу, что

$$B = \frac{\alpha}{\beta}; \quad 2\gamma \frac{t_m}{\Delta} N_m = \frac{1}{\beta} \frac{\Delta}{t_m}. \quad (24)$$

В соответствии с (19):

$$A^2 = \frac{\Delta^2}{t_m^2}, \quad (25)$$

тогда из условия наличия глобальной точки максимума (12) следует

$$\gamma = \frac{1}{2N_m} \frac{\Delta^2}{t_m^2} \frac{1}{\beta}. \quad (26)$$

После подстановки выражений (24) в (23) для функции отравляющих веществ получается выражение

$$R = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} \frac{\Delta}{t_m} \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{t_m} \right) \cdot \Delta \right]. \quad (27)$$

Поскольку при любой, в том числе достаточно большой длительности процесса биохимического обмена ($t \rightarrow \infty$) функция отравляющих веществ не может превысить 1 (все микроорганизмы погибают), то с учётом $\operatorname{th}(-\infty) \rightarrow -1$ и на основании выражения (26) и (27) должно выполняться условие

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta} \frac{\Delta}{t_m} = 1, \text{ при } \alpha = \frac{\Delta}{t_m}; \quad \beta = 2\alpha = 2 \frac{\Delta}{t_m}, \quad \gamma = \frac{1}{4N_m} \frac{\Delta}{t_m}. \quad (28)$$

После подстановки выражения (28) в уравнение (27) получаем окончательное решение для функции отравляющих веществ

$$R = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{t_m} \right) \cdot \Delta \right] \right\}. \quad (29)$$

Определим количество органического вещества X , принимающего участие в процессе разложения. В результате интегрирования третьего уравнения системы (2) после подстановке в его правую часть вместо N выражений (17) и (20) соответственно получаем

$$X = 1 - e^{-2kN_m \frac{t_m}{\Delta} \left\{ \operatorname{th} \frac{\Delta}{2} - \operatorname{th} \left[\left(1 - \frac{t}{t_m} \right) \frac{\Delta}{2} \right] \right\}}. \quad (30)$$

Результаты прогноза динамики количества активных микроорганизмов и функции отравляющих веществ по формуле (20) и (29) приведены на рис. 1, 2.

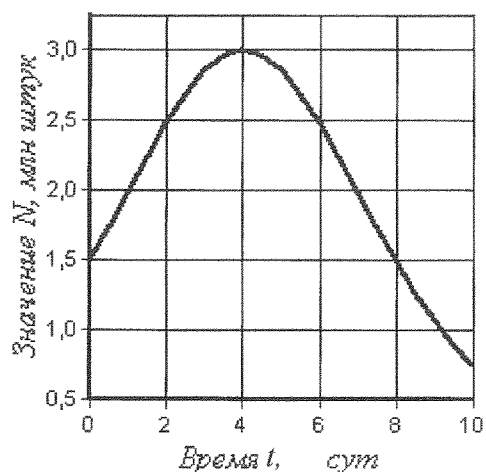


Рис. 1. Динамика популяции активных микроорганизмов

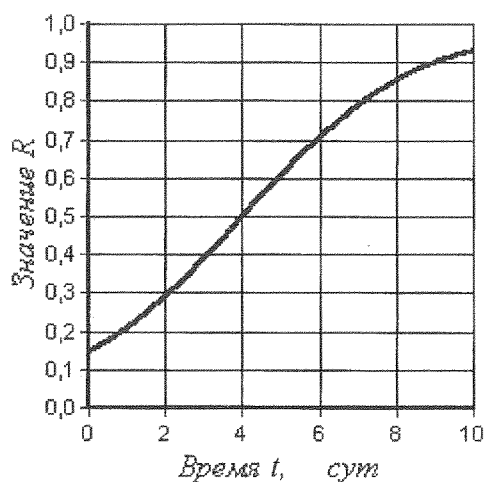


Рис. 2. Функция отравляющих веществ

Таким образом, в результате проведенных исследований определена зависимость динамики тепловыделения в насыпи от роста размеров популяции активных (живых) микроорганизмов (растительных клеток, бактерий, клещей и др.) в растительном материале. Это позволит прогнозировать динамику тепловыделения в насыпи на основании её зависимости от N в соответствии с (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Откідач Д.М., Альбоций В.М. Вибухобезпека зберігання та перероблення продукції сільськогосподарського виробництва. Теорія та практика. – Київ: УкрНДІПБ МНС України, 2006. – 288 с.
2. Гнатышин Я.М., Поберейко Б.П., Ацбергер И.Л. Математическая модель анаэробного процесса // Первая в Украине международная конференция “Энергия из биомассы” 23 – 26.09.02. – Киев. – 2002.
3. Hefner P., Ohnesorge B. Zur Situation des Vorratsschutzes in Mühlen und Lagerbetrieben Baden-Württemberg // Gesunde Pflanzen. - 1988, 40, s. 10-13.
4. Еременко В.М., Брудная А.А., Меншова Л.П. и др. Руководство по борьбе с вредителями хлебных запасов. - М: Колос, 1967 – 336 с.
5. Игнатъева А.В., Краснощёкова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1964. – 684 с.