

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. ГОСТ 9029-72 Стволы пожарные лафетные комбинированные. Технические условия. – М.: Изд-во стандартов, 1972. – 42 с.
2. ГОСТ 9923-67 Стволы пожарные ручные. Технические условия – М.: Изд-во стандартов, 1967. – 48 с.
3. ДСТУ 2802-94. Стволи пожежні лафетні комбіновані. Технічні умови Чинний 01.07.1996. – К: Держстандарт України, 2000. – 12.
4. Гавриш А.П., Ямпольський Л.С. «Гибкие робототехнические системы: Учебник. – К.: Выща школа. Головное издательство, 1989. – 407 с.
5. Офіційна інтернет-сторінка сайту <http://www.roboclub.ru/>
6. Офіційна інтернет-сторінка сайту <http://www.rantex.ru/>

УДК 539.3

*О.М.Римар, к.т.н., доцент (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)*

### ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ ДЛЯ УМОВ ЛІНІЙНОГО КОНТАКТНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Знайдено формули для визначення дотичних напружень для умов лінійного контактного навантаження  $k=1$ . Врахування таких напружень збільшує ефективність розрахунку машин та механізмів, в тому числі і пожежної техніки, на надійність та довговічність. Це стосується роликів підшипників кочення, зубчастих передач і т. і. Виконано аналіз напруженого стану контактуючих деталей та показано наявність дотичних напружень  $\tau_{yz}$  в точках площини  $z = 0$ .

**Вступ.** Напружений стан, зношування та довговічність машин та механізмів, деталі яких працюють в умовах контактної навантаження, визначаються нормальними та дотичними напруженнями. В роботі [1] запропонований розв'язок просторової контактної задачі теорії пружності про стискання двох тіл подвійної кривизни нормальним зовнішнім зусиллям, який показує наявність в точках площадки контакту дотичних напружень  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ . Такі напруження виникають при відсутності однонаправлених вздовж осей  $x$  та (або)  $y$  зовнішніх дотичних зусиль в області контакту двох пружних тіл, де поверхні тіл ідеальні та гладкі. Дотичні напруження впливають на надійність та довговічність технічних засобів протипожежної техніки, деталі яких працюють в умовах лінійного навантаження просторової контактної задачі. Це стосується пожежних насосів, вузлів з роликівими підшипниками кочення та інших складових протипожежної техніки, а тому аналіз такого напруженого стану важливий при конструюванні та оптимізації геометричних параметрів технічних засобів.

В роботах [2,3] нами одержано формули, що визначають дотичні напруження для довільної точки тіла в загальному випадку еліптичної площадки контакту просторової задачі теорії пружності.

В роботі (4) для часткового випадку цієї задачі – лінійного контакту  $k=1$  – одержано формули, які можна представити в тригонометричній формі, використавши підстановку  $t = b^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi$ :

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{p_o}{1+2\nu} \cdot \bar{y} \cdot \left\{ \frac{\bar{z}^2 \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos^4 \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)} \left[ 1 - \frac{\bar{x}^2 \cdot k'^2 \cdot \cos^4 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^2} - \bar{y}^2 \cdot \cos^4 \varphi \right]} + \nu \cdot ab^2 \cdot I_7 \right\}, \quad (2)$$

де

$$I_7 = \frac{2}{ab^2} \int_{\varphi}^{\pi/2} \cos \psi d\psi = \frac{2}{ab^2} (1 - \sin \varphi) \quad (3)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t}}{b}, \quad (4)$$

$$k' = b/a, \quad k^2 = 1 - k'^2, \quad (5)$$

$k$  – ексцентриситет еліпса площадки контакту,  $k'$  – коефіцієнт деформації цього ж еліпса,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $a, b$  – півосі еліпса площадки контакту,  $t$  – найбільший корінь [5] рівняння

$$\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{t} - 1 = 0, \quad (6)$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  – безрозмірні координати,  $\bar{x} = \frac{x}{b}$  .... ;  $p_o = \frac{3P}{2\pi ab}$  – тиск в точці  $x = O$ , розташованій на лінії початкового контакту тіл. Для нашої задачі цей тиск знаходиться за формулою

$$p_o = \frac{2P}{l\pi b},$$

де  $l$  – довжина лінії контакту,  $P$  – зусилля стискування.

**Постановка задачі.** Наведені вище формули громіздкі та складні для практичного використання в інженерній практиці. Знайдемо формули для визначення дотичних напружень у частковому випадку  $k=1$ , тобто для початкового контакту двох тіл по лінії, та на їх основі виконаємо аналіз особливостей напруженого стану контактуючих тіл.

**Дослідження.** Для точок тіл  $z > 0$ , які початково контактують по лінії ( $k=1, k'=0, a \rightarrow \infty$ ) формулу (2), після перетворень із врахуванням формул (3),(4),(5),(6), представимо у вигляді:

$$\tau_{yz} = -\frac{p_o}{1+2\nu} \cdot \bar{y} \cdot \left\{ \frac{[l - \bar{y}^2 \cdot \cos^2 \varphi] \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{[l - \bar{y}^2 \cdot \cos^4 \varphi]} + 2\nu \cdot (1 - \sin \varphi) \right\}. \quad (7)$$

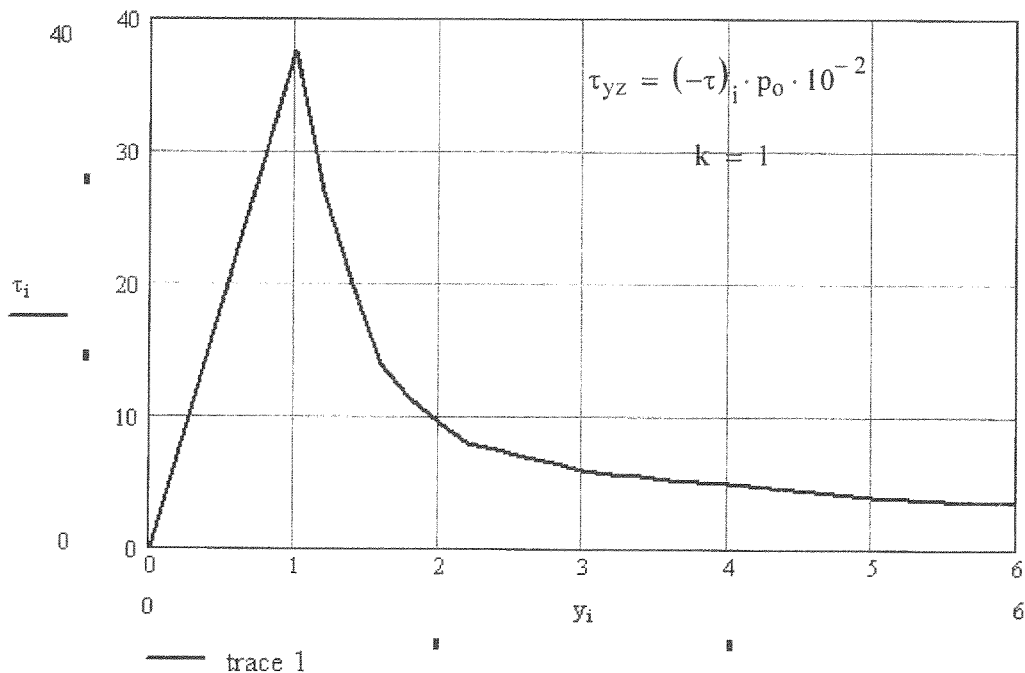


Рис. Розподіл дотичних напружень  $\tau_{yz}$  вздовж безрозмірної осі  $y = \bar{y}$  площини  $z = 0$  півпростору ( $\nu = 0,3$ ) для лінійного контакту, де точка 1 обмежує контур площадки контакту

Для початкового контакту по лінії ( $k = 1$ ,  $k' = 0$ ,  $a \rightarrow \infty$ ,  $t \neq 0$ ) із рівняння (6), ввівши підстановку  $t = b^2 \cdot \text{tg}^2 \varphi$ , одержимо формулу для обчислення кута  $\varphi$  для точок тіла  $z > 0$ :

$$\text{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - 1 + \sqrt{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - 1)^2 + 4 \cdot \bar{z}^2}}{2}}. \quad (8)$$

Для обчислення кута  $\varphi$  в точках площини  $z = 0$  за межами площадки контакту  $y > b$  одержимо формулу із (8), тобто

$$\varphi = \text{arctg} \sqrt{\bar{y}^2 - 1}. \quad (9)$$

Одержана формула (7) є простою в користуванні та дозволяє легко обчислювати дотичні напруження  $\tau_{yz}$ . Формули (1) показують відсутність дотичних напружень  $\tau_{xy}$  та  $\tau_{xz}$  у всіх точках контактуючих тіл, що відповідає фізичній сутності контактування та особливостей розподілу нормальних напружень у даному частковому випадку.

Розглянемо особливості розподілу дотичних напружень  $\tau_{yz}$ . Із формул (2), (7) чітко видно, що ці напруження є функцією тільки двох координат  $y$  та  $z$ .

Найцікавішою є поведінка цих напружень для точок площини  $z = 0$ . Формула (7) визначає величину таких напружень для точок площадки контакту та за її межами.

Для точок площадки контакту обох контактуючих тіл  $z=0$ ,  $t=0$ , тому за формулою (4)  $\varphi = 0$ .

Тепер, із формул (1), (7), для точок площадки контакту обох тіл виникає, що:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, \quad \tau_{xz} = 0, \\ \tau_{yz} &= -p_0 \bar{y} \frac{2\nu}{1+2\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Аналіз формули (10) показує, що напруження  $\tau_{yz}$  в точках площадки контакту не залежать від радіусів кривизни контактуючих тіл. Розподіли напружень  $\tau_{yz}$  в межах площадки контакту для обох тіл, одне із яких може бути і півпростором, є ідентичними лише

тоді, якщо для тіл ідентичними є сталі Ламе (10). В інших випадках розподіли є подібними, але в конкретних точках площадки контакту для кожного тіла напруження різні за величиною. Для значення коефіцієнта Пуассона  $\nu \rightarrow 0$  напруження  $\tau_{zy} \rightarrow 0$ . У випадку, якщо  $\nu \rightarrow 0,5$  - напруження  $\tau_{zy} \rightarrow \max$ . Або, узагальнюючи: у контакті двох тіл, твердого та надзвичайно пружного, площадка контакту утвориться за рахунок деформації останнього. При цьому для нього  $\tau_{zy} \rightarrow \max$ . Для твердого тіла деформації будуть відсутні, а  $\tau_{zy} \rightarrow 0$ . Звідси важливий висновок: **напруження  $\tau_{zy}$  в межах площадки контакту виникають внаслідок її утворення**, тобто в результаті деформування поверхні кожного тіла в околиці  $z \rightarrow 0$  в умовну площину  $z = 0$  - площадку контакту.

Тепер можна знайти напруження  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$  для площини  $z = 0$  у випадку контактування циліндричного тіла з пружним півпростором.

Для півпростору напруження  $\tau_{zy}$ , на основі формули (7), будуть визначатися за формулою

$$\tau_{zy} = -\frac{P_0}{1+2\nu} \cdot \bar{y} \cdot \{2\nu \cdot (1 - \sin\varphi)\}, \quad (11)$$

де для точок за межами площадки контакту  $\varphi$  визначається формулою (9), а для точок площадки контакту  $\varphi = 0$ .

На рис. відображені особливості розподілу дотичних напружень  $\tau_{zy}$  вздовж осі  $y$  площини  $z = 0$  півпростору. В точці  $y = b$  виникає значна концентрація таких напружень, величиною  $0,375 p_0$ . Тут малоймовірно часткове проковзування в контакті, оскільки напруження в точці  $y = b$  не прямують до безмежності. При зростанні координати  $y$  ці напруження асимптотично наближаються до нуля на безмежності. Такі напруження розташовані по обидві сторони точки  $0$ , є симетричними відносно площини  $xOz$  та **змінюють знак** для від'ємної осі  $y$ , тобто вони не є однонаправленими вздовж осі  $y$  та, для півпростору, виникають і в точках за межами площадки контакту.

Для точок циліндричного тіла в площині  $z=0$  ці напруження визначаються формулами (10) в межах площадки контакту, оскільки за межами площадки  $z > 0$  за рахунок кривизни тіла.

Очевидно, що для точок циліндричного тіла за межами площадки контакту  $y > b$  напруження  $\tau_{zy}$  не зникають: вони переходять на зовнішню циліндричну поверхню з радіусом кривизни в площині  $yOz$ . В точках циліндричної поверхні обертання з радіусом кривизни  $R$  напруження  $\tau_{zy}$  обчислюються для конкретного значення радіуса  $R$  за формулою (7), але при цьому безрозмірні координати для точок на поверхні зв'язані формулою

$$\bar{z} = \sqrt{R^2 - 1} - \sqrt{R^2 - \bar{y}^2}.$$

У частковому випадку  $k=1$ ,  $z=0$  виявлені дотичні напруження  $\tau_{zy}$  не можуть виникати внаслідок тертя в контакті від направленої вздовж осі  $y$  зовнішньої дотичної зусилля (таке зусилля за умовами задачі відсутнє), з причини шорсткості контактуючих поверхонь (такі параметри не враховують математична та фізична моделі задачі), внаслідок адгезії чи тертя в точках площадки контакту тіл (такі напруження наявні за межами площадки контакту та після максимуму в точці  $y = b$  асимптотично прямують до нуля в точках  $\varphi \rightarrow \pi/2$ ). Для контактуючих тіл із ідентичними радіусами кривизни в площині  $zOy$  та із одного матеріалу (ідентичними сталими Ламе) в конкретних точках площадки контакту обох тіл з ідентичними координатами  $(x,y)$  напруження  $\tau_{zy}$  однакові за величиною для кожного тіла, при цьому контактуючі ідентичні точки обох тіл не можуть *переміщуватися одна відносно другої* в будь-якому напрямку, тобто між ними *неможливе тертя ковзання* і т.і. Але такі точки кожного тіла будуть переміщуватися відносно точок - своїх сусідів - із координатами  $(x \pm \delta x, y \pm \delta y)$  в перпендикулярному відносно площини  $z = 0$  напрямку, утворюючи при

цьому площадку контакту внаслідок деформації кривизни тіла. Ось такі переміщення і є найімовірнішою причиною виникнення напружень  $\tau_{zy}$ . В даному випадку такі напруження виникають тільки в площині  $yOz$ , де наявна та більша від нуля сумарна кривизна контактуючих тіл !!

Нам невідомі чіткі пояснення та означення причин виникнення цього явища у відомих дослідженнях.

Враховуючи вище наведені аргументи, вводимо гіпотезу про те, що напруження  $\tau_{zy}$  появляються в результаті **утворення площадки контакту** і ілюструють для точок цієї площадки явище контактного деформування тіл, кожне з яких ( в тому числі і півпростір) діє як пружно деформуючий фактор - "пружний слабкий індентор" - стосовно іншого. З цієї точки зору для  $k = 1$  логічно обумовлена відсутність напружень  $\tau_{xz}$  (1), оскільки в площині  $xOz$  відсутня кривизна обох тіл.

### **Висновки**

1. Знайдено формули (7), (10), (11) для визначення дотичних напружень у частковому випадку просторової задачі теорії пружності для умов лінійного контактного навантаження  $k=1$ . Врахування таких напружень збільшує ефективність розрахунку машин та механізмів, в тому числі і пожежної техніки, на надійність та довговічність.

2. Для точок площини  $xOz$  і лінії початкового контакту всі дотичні напруження відсутні, що відповідає прийнятій передумові про відсутність зовнішніх дотичних навантажень, однонаправлених вздовж осей  $x$  та (або)  $y$ .

3. Виконано аналіз напруженого стану контактуючих деталей та виявлено наявність дотичних напружень  $\tau_{zy}$  в точках площини  $z = 0$ .

4. На контурі площадки контакту ( $y=b$ ) в площині  $z = 0$  виникає значна концентрація дотичних напружень, наприклад,  $\tau_{zy} = 0,375 p_0$  для  $\nu = 0,3$ .

5. Розподіли напружень  $\tau_{zy}$  в межах площадки контакту для обох тіл, одне із яких може бути і півпростором, є ідентичними лише тоді, якщо ідентичними є сталі Ламе тіл. В іншому випадку розподіли є подібними, але в конкретних точках площадки для кожного тіла напруження різні за величиною.

6. Напруження  $\tau_{zy}$  виникають тільки в площині  $yOz$ , де наявна та більша від нуля сумарна кривизна контактуючих тіл.

7. Напруження  $\tau_{zy}$  розташовані по обидві сторони точки  $0$ , є симетричними відносно площини  $xOz$  та **змінюють знак** для від'ємної осі  $y$ , тобто вони не є однонаправленими вздовж осі  $y$  та виникають в точках, які обмежують тіла за межами площадки контакту, в тому числі і для точок площини  $z = 0$ .

8. Для ідеальних та гладких поверхонь наявність дотичних напружень та особливості їхнього розподілу в площині  $z = 0$  дозволяють ввести гіпотезу про те, що такі напруження появляються в результаті **утворення площадки контакту**.

### **СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:**

1. Римар О.М. Система переміщень точного розв'язку просторової контактної задачі // Зб. наук. пр. – Львів: Асоціація "Автобус", 2000 – Вип.4. – С. 96-100.
2. Римар О.М., Римар М.О. Загальний вигляд формул для дотичних напружень задачі Герца // Зб. наук. пр. – Львів, Асоціація "Автобус", 2001 – Вип.5. – С. 130-133.
3. Римар О.М., Штангрет Б.С. Дотичні напруження для еліптичного контакту просторової задачі // Вісник НУ "Львівська політехніка". – Львів, 2002. – №442. – С.112-117.
4. Римар О.М. Дотичні напруження для лінійного контакту задачі Герца // Зб. наук. пр.- Пожежна безпека. – Львів: ЛШПБ, 2002. – № 2. – С.161 – 164.
5. Римар О.М. Визначення меж інтеграла ньютонівського потенціала простого шару // Зб. наук. пр.- Львів: Асоціація "Автобус", 2000. – Вип.3. – С. 103-105.