12. *Чернюк В.В., Піцишин Б.С. Течія води між неспіввісними ротором і статором // Теплоенергетика. Інженерія довкілля. Автоматизація. Вісн. Нац. ун-ту "Львів. політехн.". – 2001. – № 432. – С.3-5.*

13. *Чернюк В.В., Пицишин Б.С., Орел В.И., Жук В.М. Влияние добавок полиакриламида на потери напора во внезапных сужениях и расширениях труб // Инж.-физ. ж. – 2002. – Т.75, №4. – С.115-122.*

14. *Куо, Коважный. Снижающие сопротивление полимеры в гелиокоидальном течении // Теор. основы инж. расчетов: Тр. Амер. об-ва инж.-мех. – 1981. – Т.103, № 4. – С.98-103.*

УДК 614

А.М. Бобиляк, Я.І. Єлейко, д.ф.-м.н., проф. (Львівський національний університет ім. І.Франка)
Р.Я. Лозинський, к.т.н., А.В. Камінський (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАФІКУ ВИПРОБОВУВАННЯ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ ПОЖЕЖОГАСІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ МОДЕЛІ МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Побудована в статі модель марковського процесу прийняття рішень може зацікавити не тільки спеціалістів у галузі пожежної безпеки, але і математиків-прикладників, економістів та інженерів.

Досліджувана у даній статі марковська модель прийняття рішень має безпосереднє практичне застосування, а саме в системному аналізі, теорії надійності, діагностиці, управління запасами, прогнозуванні. Також велику практичну цінність та значний економічний ефект розроблені алгоритми можуть дати в моделюванні діяльності фірми, формуванні ринкових портфелів, пошуку оптимальних стратегій керування.

Нехай технічний засіб пожежогасіння (ТЗП) може знаходитись в одному із станів: s_1 - справний, працює; s_2 – несправний, але відмова не виявлена, дає збій; s_3 – несправність виявлена, ведеться огляд; s_4 - ремонтується; s_5 – замінюється новим. Виходячи з конкретної задачі та типу вогнегасника, кожному стану $s_i \in S\left(i=\overline{1,5}\right)$ поставимо у відповідність скінчену множину M_i рішень (альтернатив), елементи якої позначимо, як $m = 1, 2, ..., M_i$. Простором політик M назвемо прямий добуток множин рішень, тобто $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_5$. Розглядається задача прийняття послідовних рішень, що складається в виборі рішень при настанні текучих станів в моменти $n = 1, 2, ...$.

Наприклад, залежно від частоти перевірки ТЗП на несправність можна розглядати різні рішення m в станах s_1, s_2. Використовуючи викладки статі [1], можна обчислити середній час нормальної роботи ТЗП, а значить станам s_1, s_2 можна поставити у відповідність рішення m (програма перевірки ТЗП на несправність), що залежить від частоти перевірки, та знайти середню величину затрат на виконання рішення m (програму перевірку ТЗП). В залежності від вибраного рішення (програми перевірки ТЗП) буде існувати різна ймовірність переходу в стан s_3 та s_4. Аналогічно коли ведеться огляд несправного ТЗП в стані s_3, то в залежності від ряду факторів можна розглядати різні рішення, які відповідають можливим ремонтам чи заміні ТЗП на нові. Так само обране рішення (тип ремонту) буде визначати ймовірність переходу в справний стан s_1. В загальному, підсумовуючи вище сказане, маємо для кожного з можливих станів $S=\{1,...,N\}$ скінчену множину рішень M_i таку, що кожне рішення m характеризується корисністю $I(m)$ та вектором ймовірностей переходу p_{ij}^m $(j\in S)$, де p_{ij}^m - ймовірність того, що система з стану i при виборі рішення m перейде в стан j, тобто $\sum_{j\in S} p_{ij}^m = 1,\ p_{ij}^m \geq 0$ при $i,j\in S,\ m\in M_i$. Під стратегією π будемо розуміти послідовність політик $\{f_n\in M, n=1,2,...\}$,тобто $\pi=(f_1,f_2,...,f_n,...)$, де f_n – вектор, i – й елемент якого, позначимо через $f_n(i)$, яке є рішенням, що приймається в стані $i\in S$ в момент n. Кожній політиці ставимо у відповідність вектор корисності $I(f)=\left(I(f(1)),...,I(f(N))\right)^T$. Зрозуміло, що незалежно від стратегії π даний процес в загальному являє собою неоднорідний ланцюг Маркова, для якого матриця ймовірностей переходу за n кроків має вигляд

$$P_n(\pi)=P(f_1)P(f_2)...P(f_n),\ n=1,2,...,$$

де $P(f_n)$ є матриця переходу розміром $N\times N$, (i,j) - й елемент якої рівний p_{ij}^m, $m=f_n(i)\in M_i$. Нехай при $n=0$ $P_0(\pi)=\mathbf{I}$ (одинична матриця розміром $N\times N$).

Для поняття оптимальної стратегії нам знадобиться поняття *вектора сумарної середньої корисності стратегії за критерієм* $k\in K$ та *вектора дисперсії стратегії за критерієм* $k\in K$. Для кожної політики $f\in M$ визначимо вектор-стовпець корисності $I_k'(f)$ розмірності N такий, що його i – й елемент є $I_{k,i}^m = I_k(m)$, де $m=f(i)\in M_i$. Надалі для простоти запису замість $I_k'(f)$ будемо писати $I_k(f)$. Тоді в цих позначеннях вектор-стовпці розмірності N, i – й елемент яких відповідає початковому стану процесу $i\in S$ будемо називати вектором сумарної середньої корисності стратегії π за критерієм $k\in K$ та вектор дисперсії стратегії π за критерієм $k\in K$ відповідно, які будуть мати вигляд

$$V_{k,\beta}(\pi)=\sum_{n=0}^{t}\beta^n P_n(\pi) I_k(f_{n+1}),$$

$$\sigma_{k,\beta}^2(\pi)=\sum_{n=0}^{t}\beta^n P_n(\pi)\,\mathrm{sqr}\left(I_k(f_{n+1})-\max_{\pi} V_{k,\beta}(\pi)\right),$$

де $0\leq\beta<1$, а β називають коефіцієнтом переоцінки, а відповідну модель – *модель з переоцінкою*. Зауважимо, що $\sigma_{k,\beta}^2(\pi)$ можна розглядати як $V_{k_1,\beta}(\pi)$, де $I_{k_1}(f)=\mathrm{sqr}\left(I_k(f)-V_{k,\beta}(\pi)\right)$. Якщо $\beta=1$, то модель називають *модель без переоцінки* і розглядають такі аналоги в перерахунку за одиницю часу тобто: $\Gamma(\pi)\equiv\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P_i(\pi)I_k(f_{i+1})$. Оскільки в даній статі ми розглядаємо модель без переоцінки з одним ергодичним класом, то $\Gamma(\pi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P^i(f)\cdot I_k(f)=P^*(f)\cdot I_k(f)$, де P^* - гранична матриця, яка складається з однакових рядків $\pi(f)=\left[\pi_i(f)\right]$. Оскільки рядки однакові, то вектор $\Gamma(\pi)$ складається з однакових елементів і ми можемо розглядати відповідний скаляр $\tau_k(\pi)$. Тоді сумарний вектор середніх доходів $V_{k,\beta}(\pi)$ заміняємо відповідним скаляром $\tau_k(\pi)$, що характеризує середній дохід від стратегії π за одиницю часу за критерієм k. А $\sigma^2_{k,\beta}(\pi)$ заміняємо на $\mathrm{D}\tau_k(\pi)=\tau_{k_1}(\pi)=$ $=\sum_{j\in S}\pi_j(f)\cdot\left[\mathrm{sqr}\left(I_k(f)-\tau_k(\pi)\cdot 1\right)\right]^j$. Для одного критерію без обмежень існує ітераційний алгоритм Ховарда [2]. Побудуємо алгоритми для різних типів багатокритеріальних задач.

Нехай модель прийняття рішень характеризується такими множинами: $\left\{S=\{1,...,N\}, M=M_1\times...\times M_N, K=\{K_1,...,K_l\}\leftrightarrow\{I_{k_1},...,I_{k_l}\}\right\}$, відповідно до множини станів, політик та критеріїв з взаємно відповідними обмеженими функціоналами оцінювання. Зміну станів системи вважаємо ланцюгом Маркова з матрицею переходу за n кроків $P_n(\pi)$. Вважаємо, що суб'єкт прийняття рішення шукає таку стратегію $\pi=\{f_1,f_2,...,f_n,...\}$, яка б задовольняла б такі умови:

$$\begin{cases}-\mathrm{D}\tau_{k_1}(\pi)\to\max\\ I_{k_1}(f)>r_1\\ \ldots\\ I_{k_s}(f)>r_s\end{cases}$$

де $r_1,...r_s\in\mathbf{R}^N$, $k_1,...,k_s\in K$.

Тоді для пошуку оптимальної стаціонарної стратегії можна використати такий алгоритм.

1. Процедура визначення ваг.

Вибираємо довільну політику $f\in M$ (наприклад за принципом максимуму $I_{k_1}(f)$, з покроковими змінами для виконання всіх решта умов) та розв'язуємо відповідну систему:

$$\begin{cases}\tau_{k_1}+v_i=I^m_{k_1,i}+\sum_{j=1}^{N-1}p^m_{ij}v_j\\ \tau'_{k_1}+v'_i=\left(I^m_{k_1,i}-\tau_{k_1}\right)^2+\sum_{j=1}^{N-1}p^m_{ij}v'_j\end{cases}$$

відносно $v_i, v'_i, \tau_{k_1}, \tau'_{k_1}$ $\left(i\in\{1,...,N-1\}\right)$, де $m=f(i)$, що відповідає вибраній стратегії $f\in M$.

2. Процедура поліпшення рішення.

Для деяких або всіх індексів i_1 (вибирається в залежності від конкретних даних задачі).

2.1.Для групи обмежень визначимо такі множини.

2.1.1. Серед $m\in M_{i_1}$ знайдемо таку підмножину $M_{i_1,1}\subset M_{i_1}$,

що відповідає другій умові:

$$\begin{cases}I^m_{k_1,i_1}>r_1,\ m\in M_{i_1,1}\\ I^m_{k_1,i_1}\le r_1,\ m\notin M_{i_1,1}\end{cases}$$

2.1.2. ….

2.1.3. Аналогічно серед $m\in M_{i_1,s-1}$ знайдемо таку підмножину $M_{i_1,s}\subset M_{i_1,s-1}$,

що відповідає третій умові :

$$\begin{cases}I^m_{k_s,i_1}>r_s,\ m\in M_{i_1,s}\\ I^m_{k_s,i_1}\le r_s,\ m\notin M_{i_1,s}\end{cases}$$

2.2.Використовуючи знайденні значення v_i, v_i', знайдемо таку підмножину $M_{i_1,s+1} \subset M_{i_1,s}$, що відповідає першій умові:

$$-\left[\left(I_{k_1,i_1}^m - \tau_{k_1}\right)^2 + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j'\right] > -\tau_{k_1}' - v_{i_1}',\ m \in M_{i_1,s+1} \Leftrightarrow \left(I_{k_1,i_1}^m - \tau_{k_1}\right)^2 + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j' < \tau_{k_1}' + v_{i_1}',\ m \in M_{i_1,s+1}$$

2.3. Аналогічні процедури пунктів 2.1-2.3 проводяться для решта індексів i, щонайменше до першої не порожньої множини $G(i,f) \equiv M_{i,s+1}$.

2.4. Якщо $\forall i\ G(i,f) = \varnothing$, то $\pi = f^{\infty}$ - шукана стратегія.

2.5. Позначимо множину індексів, для яких множина $G(i,f)$ непуста, як S_+. Тоді отримуємо кращу стратегію g^{∞} по наступному правилу: $g(i)$ - довільний елемент множини $G(i,f)$ при кожному $i \in S_+$, а при $i \notin S_+$ припускаємо $g(i) = f(i)$ і переходимо до пункту 1.*Процедура визначення ваг.*

Зауваження. В пункті 2.5 при існуванні двох і більше рішень з множини $G(i,f)$ при деякому $i \in S_+$, можна вибрати кращу стратегію з умов максимізації: $\max\limits_{m \in G(i,f)} \left[I_{k_1,j}^m + \sum\limits_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j \right]$

Аналогічно узагальнюється на більш загальний варіант:

$$\begin{cases} \tau_{k_1}(\pi) \to \max \\ I_{k_1}(f) > r_1 \\ \ldots \\ I_{k_s}(f) > r_s \\ \tau_{k_1'}(\pi) > \tau_1 \\ \ldots \\ \tau_{k_s'}(\pi) > \tau_s \\ -\mathrm{D}\,\tau_{k_1''}(\pi) > -\mathrm{D}\,\tau_1 \\ \ldots \\ -\mathrm{D}\,\tau_{k_s''}(\pi) > -\mathrm{D}\,\tau_s \end{cases}$$

Вище наведені моделі є моделі головного критерію, тобто оптимізація велася за одним критерієм з накладанням додаткових обмежень. Зараз розглянемо просту багатокритеріальну модель в якій оптимізація ведеться за декількома параметрами. Для простоти викладок не накладаємо додаткових обмежень за іншими критеріями, тому залежність середнього доходу та дисперсії від критерію можемо опустити.

Нехай суб'єкт прийняття рішення шукає таку стратегію $\pi = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$, яка б задовольняла такі умови:

$$\begin{cases} \tau(\pi) \to \max \\ -\mathrm{D}\,\tau(\pi) \to \max \end{cases}$$

Тоді для пошуку оптимальної стаціонарної стратегії запропонуємо такий алгоритм.

1. *Процедура визначення ваг.*

Вибираємо довільну політику $f \in M$ (наприклад за принципом максимуму $I(f)$) та розв'язуємо відповідну систему:

$$\begin{cases} \tau + v_i = [I(m)]^i + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j \\ \tau' + v_i' = \left([I(m)]^i - \tau\right)^2 + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j' \end{cases}$$

відносно τ, τ', v_i, v_i' $\left(i \in \{1,...,N-1\}\right)$, де $m = f(i)$, що відповідає вибраній стратегії $f \in M$, а $[I(m)]^i$ - i-а компонента вектора $I(m)$.

2. *Процедура поліпшення рішення.*

2.1. Використовуючи знайденні значення τ, τ', v_i, v_i' для кожного $i \in S$ знайдемо такі рішення $m \in G(i,f)$, щоб виконувались нерівності :

$$\begin{cases} [I(m)]^i + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j > \tau + v_i \\ -\left[\left([I(m)]^i - \tau\right)^2 + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j'\right] > -\tau' - v_i' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [I(m)]^i + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j > \tau + v_i \\ \left([I(m)]^i - \tau\right)^2 + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j' > \tau' + v_i' \end{cases}$$

2.2. Якщо $\forall i\ G(i,f) = \varnothing$, то $\pi = f^\infty$ - шукана стратегія.

2.3. Якщо ж існує хоча б один стан $i \in S$, для якого $G(i,f)$ порожня, то ту множину позначаємо як S_+. Тоді отримуємо кращу стратегію g^∞ за таким правилом: $g(i)$ - довільний елемент множини $G(i,f)$ при кожному $i \in S_+$, а при $i \notin S_+$ беремо $g(i) = f(i)$ і переходимо до пункту 1.*Процедура визначення ваг.*

Підсумовуючи вище сказане, можемо зробити висновок, що залежно від конкретної ситуації суб'єкт прийняття рішень може скористатись одним з побудованих алгоритмів для знаходження оптимальної стратегії марковського багатокритеріального процесу прийняття рішень. Тобто в нашому випадку для моделі випробування технічного засобу пожежогасіння (ТЗП) можна знайти оптимальний графік перевірки на несправність, виходячи з принципу мінімізації за одиницю часу середніх витрат, варіативності (дисперсії) витрат та інших критеріїв залежно від конкретної ситуації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Я.І. Єлейко, О.М. Кінаш, В.В. Ковалишин. Статистичний аналіз випробовування технічних засобів пожежогасіння. – Л.: «Пожежна безпека – 2001», 2001.–*
2. *Бобиляк А.М. Модель прийняття рішень з багатьма обмеженнями в умовах ризику.- Л.:"Формування ринкової економіки України", №5, 1999.–*
3. *Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятие решений. – М.: Наука, 1977. – 176 с.*