

2. Подгорный А.Л., Запривода В.И. К вопросу создания геометрической модели процесса поступления солнечной радиации на поверхности оболочек // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1987.- Вып. 44. – С. 11 – 15.
3. Мазуренко Е.Д. Геометрическое моделирование катакаустик и отражательных кривых на плоскости. - Дисс... кандидата техн. наук: 05.05.01. – Харьков, 1996. –195 с.
4. Серета Н.І. Геометричне моделювання перебігу променів в еліптичних та параболічних відбивальних системах. - Дисс... кандидата техн. наук: 05.05.01. – Харків, 1999. –158 с.
5. Рева Г.В. Метод розрахунку циліндричних відбивачів вибухових хвиль для гасіння лісових пожеж. - Дисс... кандидата техн. наук: 05.05.01. – Харків, 2000. –157 с.
6. Росоха С.В. Анімаційне комп'ютерне моделювання деяких процесів у задачах пожежної безпеки. - Дисс... кандидата техн. наук: 05.05.01. – Харків, 2003. –205 с.
7. Куценко Л.М. Визначення поверхні нерухомого відбивача у випадку рухомого джерела променів // Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. - Вып. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Том. 24. - Мелітополь: ТДАТА, - 2004 - С. 15 – 21
8. Куценко Л.М. Метод опису геометричної форми відбивача у випадку рухомого джерела променів // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2004. Вып. 6. - С. 3 - 8.
9. Куценко Л.Н., Росоха С.В. Анимационное моделирование в среде пакета Maple некоторых задач пожарной безопасности // Вестник Херсонского государственного технического университета. 2002. Т. 15, № 2. С. 262-266
10. Дворецкий А.Т. Геометрическое моделирование отраженных энергетических потоков в гелиотехнике. – Дисс... доктора техн. наук: 05.05.01. – Симферополь, 2001. – 335 с.

УДК 514.18 + 621

В.Г.Рева, (Державний центр сертифікації виробів протипожежного призначення МНС України)

ВИЗНАЧЕННЯ ПРОДУКТИВНОСТІ РОТАЦІЙНИХ ГІДРАВЛІЧНИХ МАШИН

Розглянуто метод визначення продуктивності ротаційних гідравлічних машин трохойдного типу на основі опису профілів їх роторів і корпусів за умови виконання спряженості контурів цих деталей.

Постановка проблеми. При ліквідації наслідків весняних повеней або затоплення шахт, коли виникає потреба якнайшвидше перемістити великі об'єми води, доцільно використовувати гідравлічні машини (гідронасоси) ротаційного типу, для яких характерними є високі економічні показники при малих габаритах і вазі [1, 2]. Характерною ознакою таких машин є те, що ротор і корпус здійснюють взаємне переміщення в просторі за допомогою планетарного механізму. Для вибору раціональної схеми дії ротаційної машини трохойдного типу необхідно здійснити системний аналіз всіх можливих схем дії машин цього класу. Задача стає особливо актуальною тепер, коли для удосконалення машин відкрилися нові можливості завдяки розв'язанню ряду проблем технологічного характеру та завдяки можливості геометричного моделювання їх дії засобами обчислювальної техніки.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1, 2] розглянуто класифікації схем ротаційних машин, одержані за допомогою графічної обкатки. Але для складання ефективних алгоритмів визначення продуктивності ротаційних машин трохойдного типу з високими економічними показниками необхідно мати їх повну класифікацію, реалізовану на аналітичній основі. В роботах [1 - 3] наведено методи визначення продуктивності ротаційної машини, які зводяться до обчислення об'єму простору між корпусом і ротором. Відзначається, що розрахунок цієї характеристики в часі є надто складною задачею. Тому її

розв'язання пропонується здійснювати із застосуванням комплексних функцій. Але при цьому виникають надто громіздкі аналітичні вирази, які не можливо перетворювати „вручну”. Виходом з положення може бути застосування математичного процесора – з його можливостями аналітичних перетворень та з його розвиненою графікою

Постановка задачі. Із застосуванням функцій комплексної змінної розробити метод опису профілів роторів і корпусів ротаційних машин з урахуванням умови їх взаємної спряженості, здійснити на цій основі класифікацію всіх можливих схем дії ротаційних машин, та розробити метод визначення їх продуктивності шляхом обчислення об'ємів простору між деталями ротаційних гідравлічних машин за вузловими точками.

Основна частина. Розв'язувати поставлену задачу будемо у два етапи. Перший етап полягає у пропонуванні усіляко можливих схем дій ротаційних гідравлічних машин та їх класифікації. На другому етапі визнається продуктивність ротаційних гідравлічних машин шляхом обчислення об'ємів простору за вузловими точками.

1. Нехай маємо коло радіуса $R-1$ з центром в початку координат O , а також рухоме коло радіуса R з центром O_1 , яке котиться без проковзування по нерухомому колу, яке розташоване всередині нього (рис. 1). Розглянемо *епітрохоїду*, що утворена рухомою точкою A , яка лежить на продовженні радіуса R зовні рухомого кола на відстані $d = O_1A$ від його центра ($d > R^2$). В комплексній площині рівняння епітрохоїди має вигляд

$$E(t) = e^{iRt} + \frac{d}{R} e^{-it} \quad (1)$$

Нехай також маємо коло радіуса R з центром в початку координат O , і рухоме коло радіуса $R-1$ з центром O_1 , яке котиться без проковзування по нерухомому колу всередині нього (рис. 2). Розглянемо *гіпотрохоїду*, яка утворена рухомою точкою A , що лежить на продовженні радіуса $R-1$ зовні рухомого кола на відстані $d = O_1A$ від його центра ($d > (R-1)^2$). В комплексній площині рівняння гіпотрохоїди має вигляд

$$G(t) = e^{i(R-1)t} + \frac{d}{R-1} e^{-it} \quad (2)$$

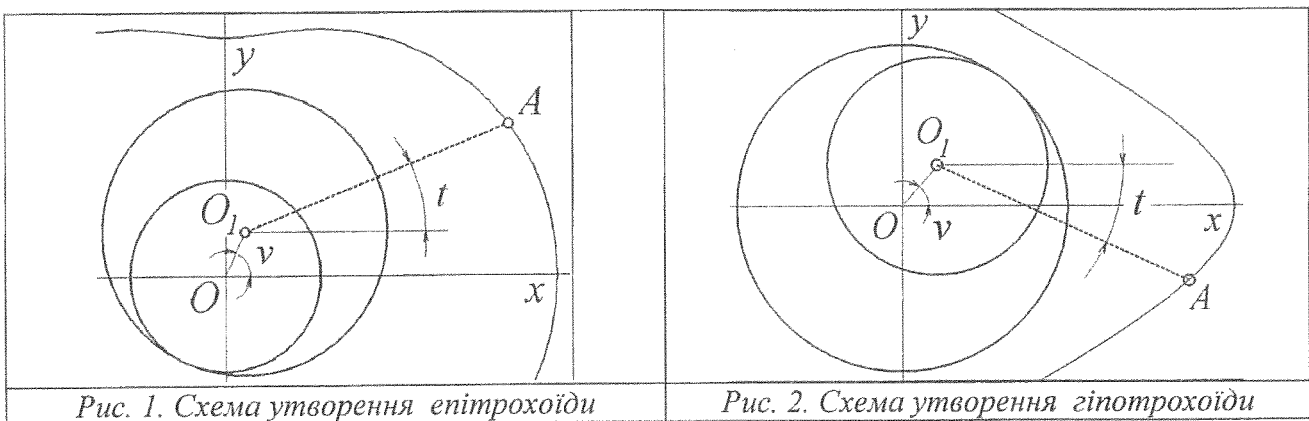


Рис. 1. Схема утворення епітрохоїди

Рис. 2. Схема утворення гіпотрохоїди

На рис. 3 та рис. 4 для деяких значень R наведено приклади, відповідно, епітрохоїд та гіпотрохоїд, в залежності від довжини d формуючого радіуса [3].

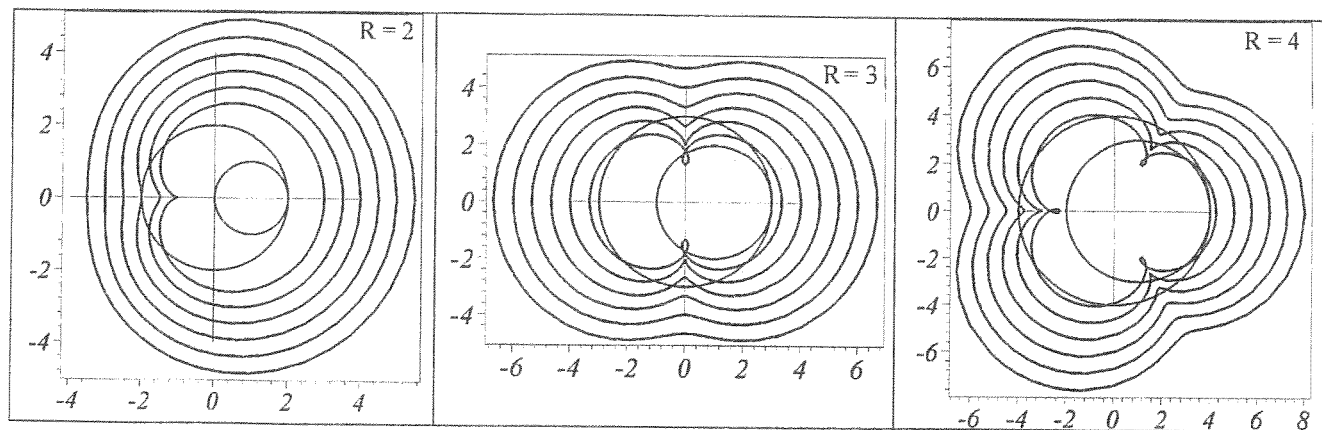


Рис. 3. Приклади епітрохайд в залежності від d для різних значень R

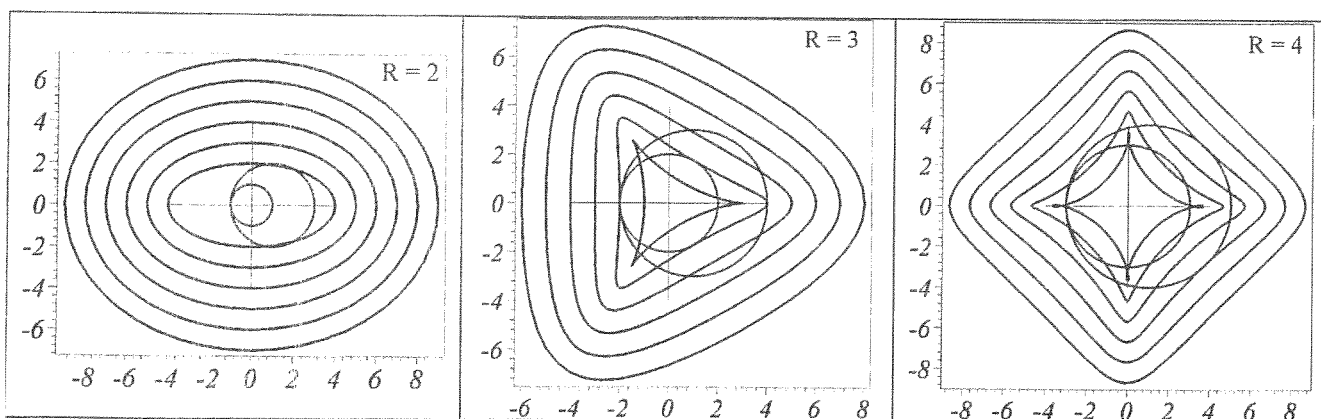


Рис. 4. Приклади гіпотрохайд в залежності від d для різних значень R

В основу опису профілів деталей та класифікації схем дії ротаційних гідравлічних машин пропонується покласти наступні твердження.

Твердження 1. Нехай на комплексній площині рівнянням $E(t)$ задано епітрохайд (1). При обкатці вважається, що епітрохайд становить одне ціле з колом радіуса $R-1$, яке котиться без ковзання всередині кола радіуса R . Тоді рівняння сім'ї епітрохайд матиме вигляд

$$W(t, v) = -e^{iv(R-1)} + E(t)e^{-iv}, \quad (3)$$

де t – параметр положення точки; v – параметр елемента сім'ї.

Твердження 2. Внутрішню і зовнішню обвідні сім'ї епітрохайд можна описати рівняннями (3), коли параметрові v надати значення

$$v = -\frac{i}{R} \left(iRt + \ln \left(\frac{Q}{R^4 + d^2 + 2dR^2 \cos(R-1)t} \right) \right), \quad (4)$$

де

$$Q = 2idR^2 \sin(R-1)t + id^2 \sin 2(R-1)t - \\ - R^4 - 2R^2d \cos(R-1)t - d^2 \cos 2(R-1)t$$

Твердження 3. Нехай на комплексній площині рівнянням $G(t)$ задано гіпотрохоїду (2). При обкатці вважається, що гіпотрохоїда становить ціле з колом радіуса R , яке котиться без ковзання своєю внутрішньою частиною по колу радіуса $R-1$. Тоді рівняння сім'ї гіпотрохоїд має вигляд

$$W(t, v) = e^{iRv} + G(t)e^{iv}, \quad (5)$$

де t – параметр положення точки; v – параметр елемента сім'ї.

Твердження 4. Внутрішню і зовнішню обвідні сім'ї гіпотрохоїд можна описати рівняннями (5), коли параметрові v надати значення

$$v = -\frac{i}{R-1} \left(it + \ln \left(\frac{Q}{(R-1)^4 + d^2 + 2d(R-1)^2 \cos Rt} \right) \right), \quad (6)$$

де

$$Q = 2id(R-1)^2 \sin Rt + id^2 \sin 2Rt - (R-1)^4 - 2(R-1)^2 d \cos Rt - d^2 \cos 2Rt$$

На рис. 5 та рис. 6 наведено приклади пар обвідних сім'ї епітрохоїд та гіпотрохоїд для деяких значень R . В результаті одержано рівняння кривих, для яких виконуються умови їх взаємної спряженості. Тобто взаємно спряженими будуть, відповідно, криві (1) і (3) - (4), та (2) і (5) - (6). При цьому значення d буде вільним параметром і виконуватиме роль “розміру конструкції”.

Складність полягає у тому, що обидві обвідні (внутрішня і зовнішня), одночасно входять до складу кривої, яка сама себе перетинає. На рис. 5 і 6 першу точку самоперетину позначено як D . В роботі [4] розв'язано питання визначення точок самоперетину кривої. Тоді гілками зовнішніх і внутрішніх обвідних будуть дуги AD і BD , відповідно.

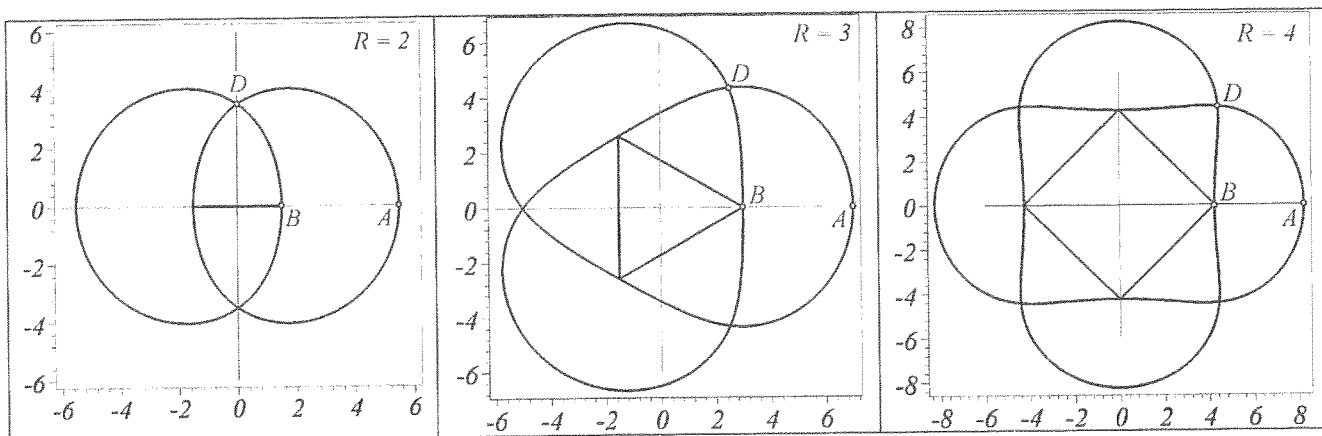


Рис. 5. Приклади пар обвідних сім'ї епітрохоїд для різних значень R

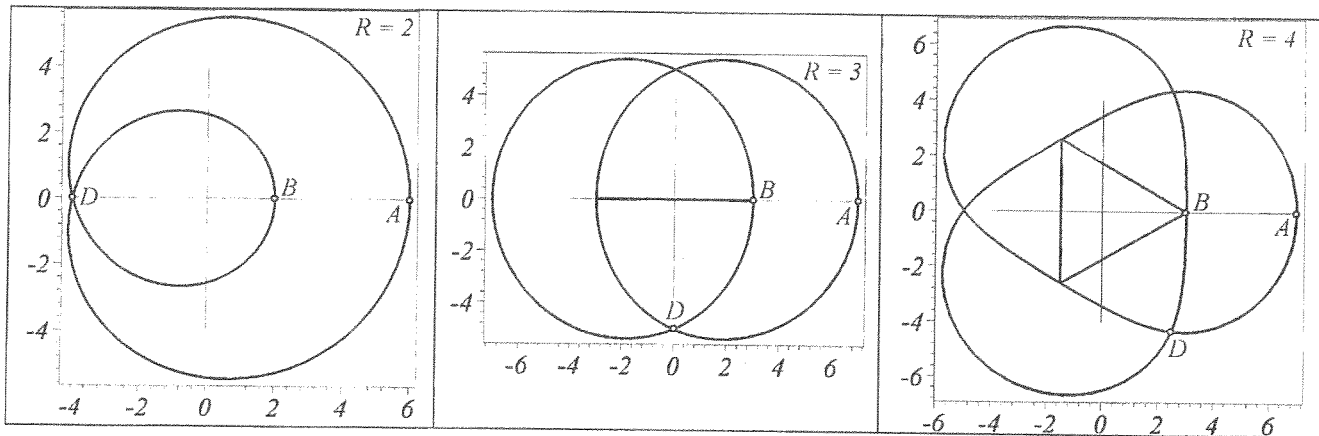


Рис. 6. Приклади пар обвідних сім'ї гіпотрохоїд для різних значень R

На рис. 7 - 10 запропоновано класифікацію усіляко можливих схем дій ротаційних гідравлічних машин в залежності від значень великого R та малого $r=R-1$ радіусів технологічних кіл планетарного механізму. Всі схеми побудовано за допомогою комп'ютера, причому, їх „дію” підтверджено засобами комп'ютерної анімації.

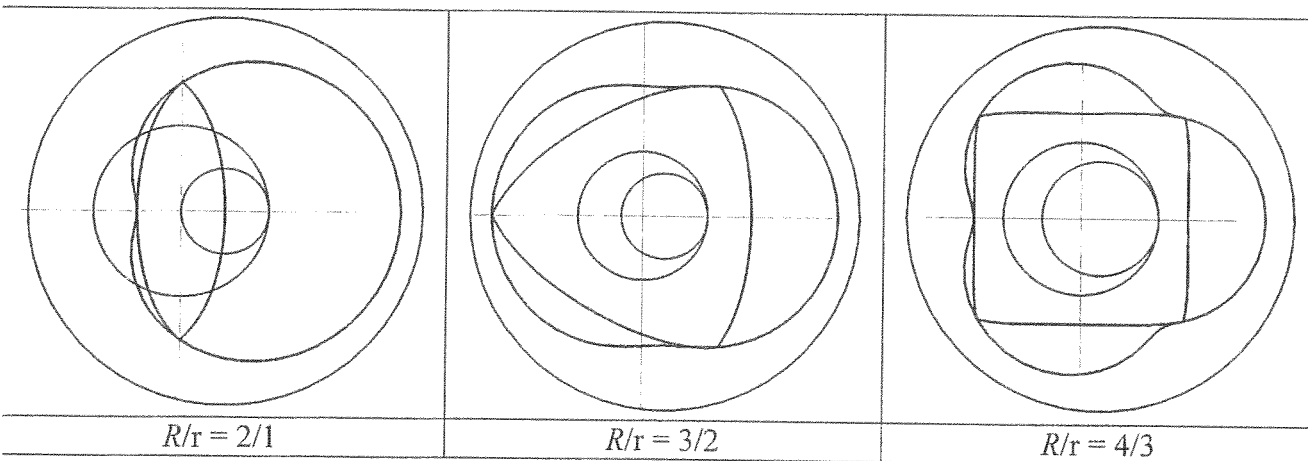


Рис. 7. Епітрохоїдні схеми дії ротаційних машин із внутрішньою обвідною

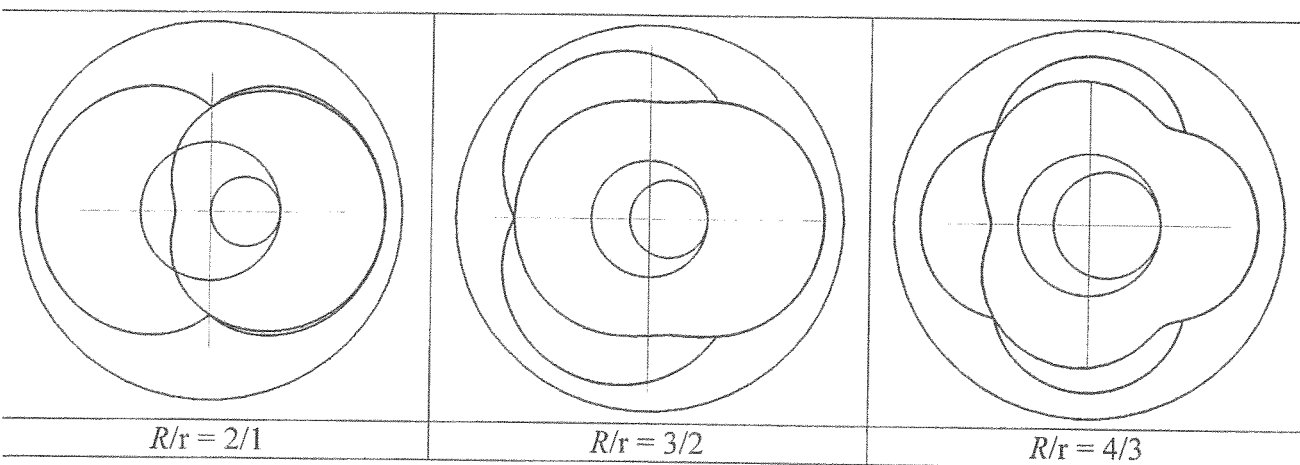


Рис. 8. Епітрохоїдні схеми дії ротаційних машин із зовнішньою обвідною

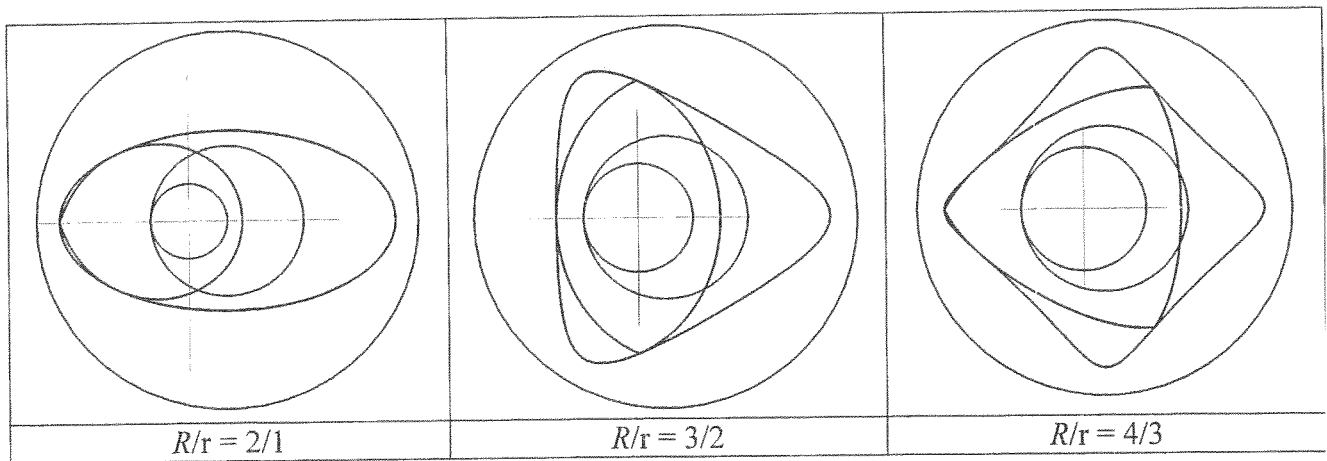


Рис. 9. Гіпотрохідні схеми дії ротаційних машин із внутрішньою обвідною

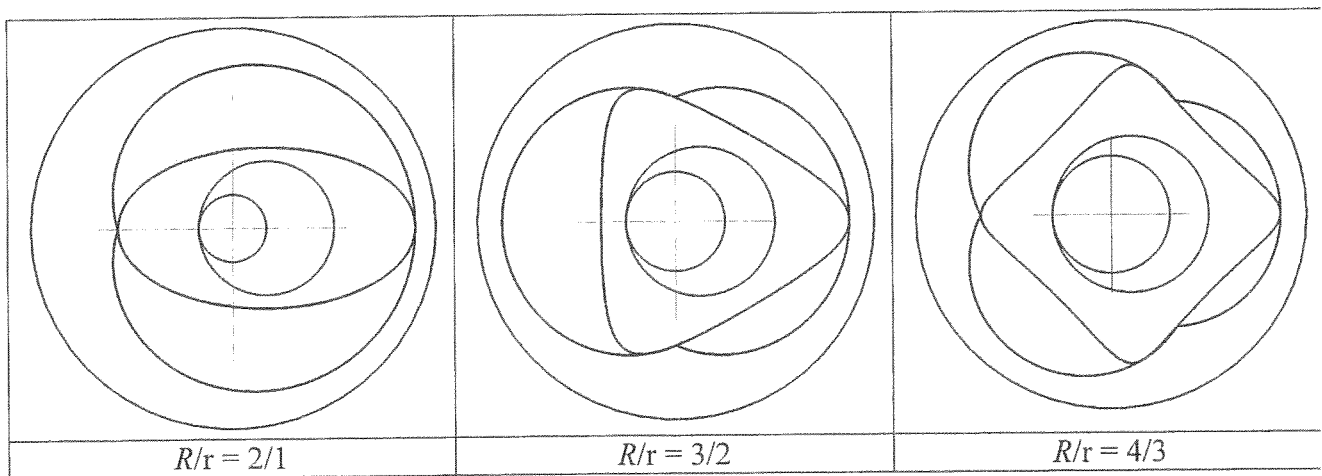


Рис. 10. Гіпотрохідні схеми дії ротаційних машин із зовнішньою обвідною

2. Продуктивність гідравлічних машини (гідронасосів) ротаційного типу визначається об'ємом простору між поверхнями ротора та корпусу. Причому, цей об'єм змінюється у часі завдяки переміщенню ротора за допомогою планетарного механізму. У випадку циліндричного оформлення гідравлічної машини, продуктивність визначатиметься площею фігури, яка розташована між контурами профілів ротора і корпусу.

Далі, для прикладу, розглянемо варіант розрахунку епітрохідної схеми дії ротаційної машини із внутрішньою та зовнішньою обвідними при $R/(R-1) = 3/2$ і $d = 21$.

Спочатку визначимо два значення параметра t , які забезпечують самоперетин кривої. Для цього на основі твердження 2 утворимо рівняння з уявної частини виразу (3)

$$\text{Im}(U(t)) = 0. \quad (7)$$

В результаті розв'язання рівняння (7) маємо два корені $t_1 = 1,0069$ і $t_2 = 2,1347$. Перейдемо до параметричного завдання кривої $x = x(t)$ і $y = y(t)$. Для складання масивів вузлових точок, які

будуть розташовані на обвідних, позначимо $t_i = \frac{i t_1}{N}$. Масив значення абсцис $XX[i]$ і ординат $YY[i]$ для внутрішньої обвідної слід формувати за правилами:

$$\begin{aligned} XX[i] &= x(t_i); & YY[i] &= y(t_i); \\ XX[i+N] &= x(t_i - t_1 + \pi); & YY[i+N] &= y(t_i - t_1 + \pi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
XX[i + 2N] &= x(t_i + \pi); & YY[i + 2N] &= y(t_i + \pi); \\
XX[i + 3N] &= x(t_i - t_1 + 2\pi); & YY[i + 3N] &= y(t_i - t_1 + 2\pi); \\
XX[i + 4N] &= x(t_i + 2\pi); & YY[i + 4N] &= y(t_i + 2\pi); \\
XX[i + 5N] &= x(t_i - t_1); & YY[i + 5N] &= y(t_i - t_1);
\end{aligned}$$

Позначимо $t_i = \frac{i \left(t_2 - \frac{\pi}{2} \right)}{N}$ для складання масивів вузлових значень абсцис $XX[i]$ і ординат $YY[i]$ точок для зовнішньої обвідної, які слід формувати за правилами:

$$\begin{aligned}
xx[i] &= x\left(t_i + \frac{\pi}{2}\right); & yy[i] &= y\left(t_i + \frac{\pi}{2}\right); \\
xx[i + N] &= x(t_i - t_2 + \pi); & yy[i + N] &= y(t_i - t_2 + \pi); \\
xx[i + 2N] &= x\left(t_i + \frac{3\pi}{2}\right); & yy[i + 2N] &= y\left(t_i + \frac{3\pi}{2}\right); \\
xx[i + 3N] &= x(t_i - t_2 + 2\pi); & yy[i + 3N] &= y(t_i - t_2 + 2\pi); \\
xx[i + 4N] &= x\left(t_i + \frac{5\pi}{2}\right); & yy[i + 4N] &= y\left(t_i + \frac{5\pi}{2}\right); \\
xx[i + 5N] &= x(t_i - t_2); & yy[i + 5N] &= y(t_i - t_2).
\end{aligned}$$

Такі правила формування масивів дозволяють розташувати вузлові точки підряд і синхронно на обох обвідних за умови їх проходження проти напрямку годинникової стрілки. В результаті цього можна скласти $6N$ рівнянь прямих, які проходять через пари точок

$$x = xx[i] + p(XX[i] - xx[i]); \quad y = yy[i] + p(YY[i] - yy[i]). \quad (8)$$

Якщо рівняння епітрохоїди у локальній системі координат OXY обрати у вигляді

$$f(X, Y) \equiv \left(\sin\left(3 \arccos\left(\frac{A^2 + 9 - d}{6A}\right)\right) + \frac{d}{18} \sqrt{36 - \left(\frac{A^2 + 9 - d}{A}\right)^2} \right)^2 - Y^2 = 0, \quad (9)$$

де $A = \left(27|X| + \sqrt{729X^2 + d^3 - 27d^2 + 243d - 729}\right)^{\frac{1}{3}}$, то опис її миттєвих положень при переміщенні на кут ν при планетарному русі у глобальній системі координат матиме вигляд

$$\begin{aligned}
f\left((x - \cos \nu) \cos \frac{\nu}{R-1} - (y - \sin \nu) \sin \frac{\nu}{R-1}, \right. \\
\left. (x - \cos \nu) \sin \frac{\nu}{R-1} + (y - \sin \nu) \cos \frac{\nu}{R-1} \right) = 0
\end{aligned} \quad (10)$$

На рис. 11 при $N = 15$ наведено зображення двох обвідних, вузлові точки на яких сполучені відрізками, та миттєві положення епітрохоїди для трьох значень кута ν .

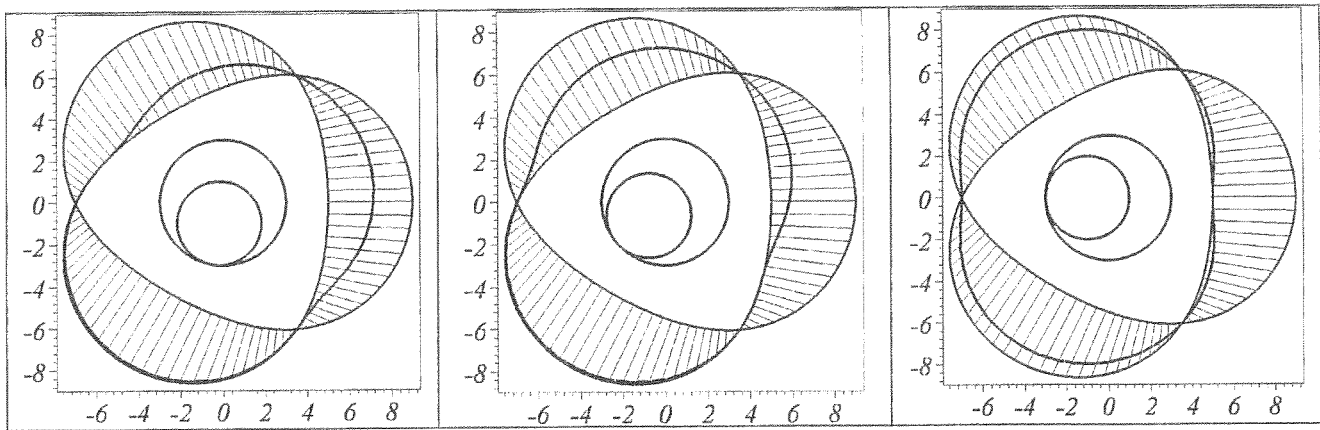


Рис. 11. Розташування вузлових точок на обвідних та миттєві положення епітрохоїди

Для визначення точок перетину миттєвих положень епітрохоїди з відрізками, необхідно розв'язати, відносно параметра p , систему рівнянь (8) і (10). Після обчислень одержимо масив значень абсцис $Xp[i]$ і ординат $Yp[i]$ точок, які дискретно представляють положення епітрохоїди. В результаті одержимо дві фігури між обвідними, які доцільно вважати об'єднанням множини чотирикутників. Площі чотирикутників обчислюємо за формулою Герона після розбиття їх на два трикутники. Для цього використаємо процедуру

```
S_4 := proc(xi, yi, Xi, Yi, xi1, yi1, Xi1, Yi1)
local a, b, c, d, d1, p1, p2;
a := sqrt((xi - Xi)^2 + (yi - Yi)^2);
b := sqrt((xi - xi1)^2 + (yi - yi1)^2);
c := sqrt((xi1 - Xi1)^2 + (yi1 - Yi1)^2);
d := sqrt((Xi - Xi1)^2 + (Yi - Yi1)^2);
d1 := sqrt((xi - Xi1)^2 + (yi - Yi1)^2);
p1 := (d1 + b + c)/2; p2 := (d1 + a + d)/2;
sqrt(p1*(p1-b)*(p1-c)*(p1-d1)) + sqrt(p2*(p2-a)*(p2-d)*(p2-d1))
end proc;
```

Тоді в залежності від розташування чотирикутника звертатися до процедури слід так:

```
S_4(xx[i],yy[i],xp[i],yp[i],xx[i+1],yy[i+1],xp[i+1],yp[i+1]):
S_4(xp[i],yp[i],XX[i],YY[i],xp[i+1],yp[i+1],XX[i+1],YY[i+1]):
```

Після підсумовування площ всіх прямокутників одержимо наближене значення двох площ між епітрохоїдою і кожною з обвідних. Змінюючи кут v , одержуємо графік зміни площ в залежності від кута повороту епітрохоїди v . У збіжності обчислювального процесу можна переконатися шляхом подвоєння значення N . На рис. 12 наведено графіки залежності площ між обвідними і миттєвими положеннями епітрохоїди. А саме, графік функції $S2_{vn}$ визначає зміну площі між епітрохоїдою і внутрішньою обвідною, а графік функції $S2_{na}$ – зміну площі між епітрохоїдою і зовнішньою обвідною. Для перевірки було побудовано також і графік суми цих функцій, який, з геометричних міркувань, повинен мати вигляд прямої лінії.