

*Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен, Т. Г. Березанський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛООБМІНУ В БАГАТОШАРОВІЙ ПОРОЖНИСТІЙ СФЕРИЧНІЙ КОНСТРУКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ВНУТРІШНІХ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА

Запропонована робота присвячена застосуванню прямого методу до дослідження процесів теплообміну в багатошаровій порожнистій сферичній конструкції за умов наявності внутрішніх (розподілених) джерел тепла. Припускається, що між шарами існує ідеальний тепловий контакт, а закони змін температур середовищ, які омивають приповерхневі (внутрішній та зовнішній) шари конструкції, є довільними функціями часу, та рівномірно розподілені по поверхнях. Тобто, передбачається наявність конвективного теплообміну з навколишнім середовищем та виконуються крайові умови третього. Отже, ізотерми всередині цієї конструкції являють собою концентричні кола. Коефіцієнти рівняння теплопровідності вважаються кусково-сталими функціями відносно просторової координати.

Розв'язування такої задачі проводиться шляхом застосування методу редукції, коли вихідна задача поділяється на дві, більш прості. Аналітичні дослідження проводились шляхом використання методу редукції, концепції квазіпохідних, сучасної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, методу Фур'є та модифікованого методу власних функцій з активним застосуванням комп'ютерних математичних середовищ. Чисельна реалізація методу проводилась за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple 13.

Для ілюстрації запропонованого методу розв'язано модельний приклад про знаходження розподілу температурного поля у чотиришаровій сферичній конструкції з наявними внутрішніми джерелами тепла за умов впливу температурного режиму зовнішньої пожежі. Результати обчислень представлені у вигляді графіка зміни температури залежно від часу та просторової координати. Слід зауважити, що задля досягнення результату із заданою точністю було використано 30 перших коренів характеристичного рівняння.

Отримані у роботі результати мають безпосереднє застосування у ряді прикладних задач. Поставлена задача описує процеси теплообміну як нагрівання, так і охолодження.

Ключові слова: сферична конструкція, квазіпохідна, прямий метод, теплообмін.

Постановка проблеми. Дослідження процесів теплообміну у багатошарових сферичних конструкціях не втрачають своєї актуальності, оскільки вони набувають все більш широкого застосування у різних галузях індустрії. Характерною особливістю таких елементів є поєднання різного роду механічних та теплофізичних характеристик шарів, а у таких елементах конструкцій як, наприклад, тепловидільні елементи реакторів атомних електростанцій – наявні внутрішні джерела тепла. Під час вивчення таких конструкцій виникають значні труднощі при розробці аналітичних методів їх дослідження. Тому розробка нових методів дослідження багатошарових, зокрема, сферичних конструкцій є актуальною задачею сьогодення.

Аналіз літературних джерел. Розв'язуванню проблеми теплообміну присвячені численні публікації. Основні методи дослідження задач про

визначення розподілу нестационарного температурного поля у багатошарових конструкціях умовно поділяються на три види: а) прямі або класичні, які базуються на методі відокремлення змінних [1], [2]; б) операційні, що використовують різного роду інтегральні перетворення [3]; в) наближені аналітичні та числові методи [4], [5]. Так, у роботі [6] досліджується розподіл температурного поля в багатошаровій порожнистій циліндричній конструкції з включенням внутрішнього джерела тепла, методом інтегрального перетворення Лапласа. За останні роки в [7], [8] розглядаються багатошарові порожнисті циліндричні та сферичні конструкції. В основу цих публікацій покладено пряму (класичну) схему дослідження, що базується на методі редукції, концепції квазіпохідних, сучасній теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, модифікованому методі власних функцій Фур'є.

Проблеми які залишаються невирішеними. Теоретично, аналітичні методи повинні застосовуватися до багатошарових конструкцій. Однак на практиці кількість шарів, як правило обмежується двома або трьома [6]. Це зумовлено тим фактором, що збільшення кількості шарів призводить до громіздких обчислень. Тому проблема ефективного аналітичного розв'язку задачі теплопровідності у багатошарових порожнистих сферичних конструкціях з урахуванням наявності внутрішніх джерел тепла залишається актуальною.

Постановка задачі та її математична модель. Розглянемо багатошарову сферичну конструкцію область якої обмежена радіусами $r = r_0$ та $r = r_n$ і розділена на n шарів. Кожен шар виготовлений з ізотропного матеріалу і наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності $\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$, питомою теплоємністю $c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, та густиною $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Крім цього, у шарах конструкції передбачена наявність внутрішніх джерел тепла $q_v, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$, а температура $t, ^\circ\text{C}$ залежить від координати $r, \text{м}$ і часу $\tau, \text{с}$.

Така постановка задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності [3], [7]

$$c(r)\rho(r)\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda(r) \frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r} \right) + q_v(r). \quad (1)$$

Вважатимемо, що на зовнішній та внутрішній поверхнях сферичної конструкції існує конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто наявні крайові умови третього роду [7].

$$\begin{cases} \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial r}(r_0, \tau) = \alpha_0 (t(r_0, \tau) - \psi_0(\tau)), \\ -\lambda_n \frac{\partial t}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha_n (t(r_n, \tau) - \psi_n(\tau)), \end{cases} \quad (2)$$

де $\psi_0(\tau)$ та $\psi_n(\tau)$ – закони змін температур середовищ, які омивають приповерхневі шари конструкції, α_0 та α_n – коефіцієнти теплообміну на поверхнях конструкції, $\alpha, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$.

Також у початковий момент часу відомий розподіл температурного поля (початкова умова)

$$t(r, 0) = \varphi(r). \quad (3)$$

Надалі використовуватимемо такі позначення [7], [9]: θ_i – характеристична функція напіввідкритого проміжку $[r_i, r_{i+1})$, тобто,

$$\theta_i = \begin{cases} 1, & r \in [r_i, r_{i+1}) \\ 0, & r \notin [r_i, r_{i+1}) \end{cases}, \quad t^{[1]}(r, \tau) \stackrel{\text{df}}{=} r^2 \lambda \frac{\partial t}{\partial r} - \text{квазіпо-}$$

хідна [7], $q(r, \tau) = \frac{t^{[1]}(r, \tau)}{r^2}$ – густина теплового

поток. Теплофізичні характеристики матеріалів вважатимемо незмінними для кожного із шарів, тому зобразимо їх як кусково-сталі функції

$$\lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i, \quad c(r) \cdot \rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot \rho_i \cdot \theta_i, \quad q_v(r) = \sum_{i=0}^{n-1} q_{vi} \cdot \theta_i, \\ \varphi(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \cdot \theta_i, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i, q_{vi} \in R, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i > 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Ввівши позначення квазіпохідної та помноживши крайові умови (2) на r^2 , отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0^2 t(r_0, \tau) + t^{[1]}(r_0, \tau) = \alpha_0 r_0^2 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n r_n^2 t(r_n, \tau) + t^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha_n r_n^2 \psi_n(\tau). \end{cases}$$

У математичній фізиці добре відомий метод редуції [10], [11], який враховує неоднорідність крайових умов та пов'язаний з виділенням квазістационарної частини. Тому розв'язок задачі (1)-(3) шукатимемо як суму двох взаємозв'язаних функцій

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau). \quad (4)$$

Будь-яку з функцій $u(r, \tau)$ або $v(r, \tau)$ можна вибрати спеціальним чином, тоді інша визначатиметься однозначно.

Вибір функції $u(r, \tau)$ та мішана задача для $v(r, \tau)$. *Задача для функції $u(r, \tau)$.* Визначимо функцію $u(r, \tau)$ як розв'язок крайової квазістационарної задачі [12][13]

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \lambda u')' + q_v = 0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0^2 u(r_0, \tau) - u^{[1]}(r_0, \tau) = \alpha_0 r_0^2 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n r_n^2 u(r_n, \tau) + u^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha_n r_n^2 \psi_n(\tau), \end{cases} \quad (6)$$

де $u^{[1]} \stackrel{\text{df}}{=} r^2 \lambda \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r}$ а також надалі $v^{[1]} \stackrel{\text{df}}{=} r^2 \lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r}$ – квазіпохідні.

$$\text{Ввівши вектори } \mathbf{u} = (u, u^{[1]})^T, \quad \mathbf{q} = (0 \quad r^2 q_v)^T$$

та матрицю $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ зведемо диференціальне

рівняння (5) до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку [13], [14]

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{q}. \quad (7)$$

Крайові умови (6) також напишемо у векторній формі [7], [15]

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}(r_0, \tau) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}(r_n, \tau) = \mathbf{\Gamma}(\tau), \quad (8)$$

де \mathbf{P} , \mathbf{Q} і $\mathbf{\Gamma}(\tau)$ мають вигляд

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha_0 r_0^2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n r_n^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}(\tau) = \begin{pmatrix} \alpha_0 r_0^2 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n r_n^2 \psi_n(\tau) \end{pmatrix}.$$

Під розв'язком системи (7) розуміємо абсолютно неперервну на проміжку $[r_0, r_n]$ вектор-функцію $\mathbf{u}(r)$, яка справджує цю систему майже всюди, крім, можливо, точок розриву коефіцієнтів c , ρ , λ , q_v .

На кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ система (7) має вигляд

$$\mathbf{u}'_i = \mathbf{A}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ r^2 q_{vi} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для відповідної (9) однорідної системи $\mathbf{u}'_i = \mathbf{A}_i \mathbf{u}_i$ вважатимемо відомою матрицю Коші $\mathbf{B}_i(r, s)$ що володіє такими властивостями [9]:

1) за змінною r вона справджує матричне рівняння $\frac{\partial \mathbf{B}_i(r, s)}{\partial r} = \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i(r, s)$;

2) $\mathbf{B}_i(s, s) = \mathbf{E}$, де \mathbf{E} – одинична матриця.

Безпосередньою перевіркою переконаємось, що

$$\mathbf{B}_i(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & K_i(r, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

задовольняє умови 1) – 2), де $K_i(r, s) = \frac{1}{\lambda_i} \int_s^r \frac{dz}{z^2}$.

Для довільного $k \geq i$ позначимо

$$\mathbf{B}(r_k, r_i) \stackrel{df}{=} \mathbf{B}_{k-1}(r_k, r_{k-1}) \cdot \mathbf{B}_{k-2}(r_{k-1}, r_{k-2}) \cdots \mathbf{B}_i(r_{i+1}, r_i). \quad (11)$$

Структура (10) матриці $\mathbf{B}_i(r, s)$ дає змогу встановити структуру матриці (11), а саме

$$\mathbf{B}(r_k, r_m) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=m}^{k-1} K_i(r, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

однак $\mathbf{B}(r_m, r_m) \stackrel{df}{=} \mathbf{E}$

У роботі [15] встановлено, що на кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1})$ розв'язок задачі (5), (6) зображується як вектор-функція $\mathbf{u}_i(r, \tau)$, де першою координатою є шукана функція $u_i(r, \tau)$, як розв'язок рівняння (5), а другою – її квазіпохідна

$$\mathbf{u}_i(r, \tau) = \mathbf{B}_i(r, r_i) \cdot \mathbf{B}(r_i, r_0) \cdot \mathbf{P}_0 + \mathbf{B}_i(r, r_i) \cdot \quad (12)$$

$$\cdot \sum_{k=1}^i \mathbf{B}(r_i, r_k) \cdot \mathbf{Z}_k + \int_{r_i}^r \mathbf{B}_i(r, s) \cdot \mathbf{q}_i(s) ds,$$

де $\mathbf{P}_0 = (\mathbf{P} + \mathbf{Q} \mathbf{B}(r_n, r_0))^{-1} \cdot (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{Q} \sum_{k=1}^n \mathbf{B}(r_n, r_k) \cdot \mathbf{Z}_k)$,

$$\mathbf{B}_i(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & K_i(r, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_i(r, s) = \frac{r-s}{\lambda_i r s},$$

$$\mathbf{B}(r_i, r_0) = \begin{pmatrix} 1 & K(r_i, r_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K(r_i, r_0) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{r_{k+1} - r_k}{\lambda_k r_{k+1} r_k},$$

$$\mathbf{Z}_k = - \begin{pmatrix} \frac{q_{v,k-1}}{\lambda_{k-1}} \left(\frac{r_k^2}{6} - \frac{r_{k-1}^2}{2} + \frac{r_{k-1}^3}{3r_k} \right) \\ \frac{q_{v,k-1}}{3} (r_k^3 - r_{k-1}^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_k \\ z_k^{[1]} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$\int_{r_i}^r \mathbf{B}_i(r, s) \mathbf{q}_i ds = - \begin{pmatrix} \frac{q_{vi}}{\lambda_i} \left(\frac{r^2}{6} - \frac{r_i^2}{2} + \frac{r_i^3}{3r} \right) \\ \frac{q_{vi}}{3} (r^3 - r_i^3) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Формула (12) дає змогу записати розв'язок задачі (5), (6) на проміжку $[r_0, r_n]$ з допомогою характеристичних функцій θ_i як

$$\mathbf{u}(r, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{u}_i(r, \tau) \theta_i.$$

Задача для функції $v(r, \tau)$. Застосувавши формулу (4) до рівняння (1) одержимо

$$c\rho \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r} \right) + q_v + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r} \right). \quad (13)$$

Оскільки $u(r, \tau)$ – розв'язок задачі (5)-(6), тоді у (13) слід врахувати, що $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r} \right) + q_v \equiv 0$. Отже приходимо до неоднорідного диференціального рівняння для визначення функції $v(r, \tau)$ [7]

$$c\rho \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r} \right) - c\rho \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau}. \quad (14)$$

Зауважмо, що функцію $-c\rho \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau}$ у правій частині (14) вважатимемо відомою, оскільки відома функція $u(r, \tau)$ як розв'язок задачі (5), (6). Оскільки ця ж функція $u(r, \tau)$ справджує крайові умови (6), тому з формули (4) отримуємо крайові умови для функції $v(r, \tau)$

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0^2 v(r_0, \tau) - v^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n r_n^2 v(r_n, \tau) + v^{[1]}(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

а початкова умова для $v(r, \tau)$ виглядатиме

$$v(r, 0) = f(r) \equiv \varphi(r) - u(r, 0) = \sum_{i=0}^{n-1} [\varphi_i(r) - u_i(r, 0)] \theta_i. \quad (16)$$

Отже, якщо відомий розв'язок $u(r, \tau)$ задачі (5), (6), функція $v(r, \tau)$ є розв'язком мішаної задачі (14)–(16).

Відокремлення змінних та задачі на власні значення. Шукатимемо нетривіальні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial v(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad (17)$$

що задовольняють крайові умови (15) у вигляді [10]

$$v(r, \tau) = e^{-\omega \tau} \cdot R(r), \quad (18)$$

де ω – параметр, а $R(r)$ – невідома функція.

Підставляючи праву частину (18) у рівняння (17) та крайові умови (15) отримуємо квазідиференціальне рівняння

$$(r^2 \lambda R')' + \omega c \rho r^2 R = 0, \quad (19)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 r_0^2 R(r_0) - R^{[1]}(r_0) = 0, \\ \alpha_n r_n^2 R(r_n) + R^{[1]}(r_n) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

де $R^{[1]} \stackrel{df}{=} r^2 \lambda R'$ – квазіпохідна.

Задача (19), (20) – класична задача на власні значення, де необхідно знайти значення параметра ω (власні значення ω_k) при яких існують відповідні їм нетривіальні розв'язки (власні функції) $R_k(r, \omega_k)$. Властивості власних значень та власних функцій цієї задачі детально вивчено та описано у роботі [10]. Слід лише зауважити, що всі власні значення ω_k додатні та різні, а власні функції $R_k(r, \omega_k)$ ортогональні з вагою $c\rho r^2$ [7], тобто,

$$\int_{r_0}^{r_n} R_i(r, \omega_i) \cdot R_j(r, \omega_j) c\rho r^2 dr = 0, \quad i \neq j.$$

Конструктивна побудова власних функцій.

Ввівши вектор $\mathbf{R} = (R, R^{[1]})^T$ та матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda} \\ -\omega r^2 c\rho & 0 \end{pmatrix}, \text{ зведемо квазідиференціальне}$$

рівняння (19) до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}. \quad (21)$$

Відповідну систему на проміжку $[r_i, r_{i+1})$ запишемо у вигляді

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda_i} \\ -\omega r^2 c_i \rho_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (22)$$

У роботі [7] встановлено, що матриця Коші $\mathbf{B}_i(r, s, \omega)$ системи (22) має вигляд

$$\mathbf{B}_i(r, s, \omega) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{pmatrix},$$

$$b_{11}^i = \frac{\beta_i s \cos(\beta_i(r-s)) + \sin(\beta_i(r-s))}{\beta_i r};$$

$$b_{12}^i = \frac{\sin(\beta_i \cdot (r-s))}{\beta_i r s \lambda_i};$$

$$b_{21}^i = \frac{(\omega c_i \rho_i r s + \lambda_i) \sin(\beta_i(r-s)) + (\beta_i \lambda_i (s-r)) \cos(\beta_i \cdot (r-s))}{\beta_i};$$

$$b_{22}^i = \frac{\beta_i r \cos(\beta_i(r-s)) + \sin(\beta_i(r-s))}{\beta_i s}; \quad i = \overline{0, n-1},$$

де позначено $\beta_i = \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}}$.

Нетривіальні розв'язки $\mathbf{R}(r, \omega)$ системи (21) шукатимемо у вигляді [7]

$$\mathbf{R}(r, \omega) = \mathbf{B}(r, r_0, \omega) \cdot \mathbf{C}, \quad (23)$$

де $\mathbf{B}(r, r_0, \omega) = \mathbf{B}_0(r, r_0, \omega) \mathbf{B}_1(r, r_1, \omega) \mathbf{B}_2(r, r_2, \omega) \dots + \mathbf{B}_{n-1}(r, r_{n-1}, \omega) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega)$,

а $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$ – деякий ненульовий вектор.

Застосувавши до рівності (23) крайові умови (8) (при $\mathbf{\Gamma}(\tau) \equiv \mathbf{0}$), отримаємо:

$$P \cdot \mathbf{R}(r_0, \omega) + Q \cdot \mathbf{R}(r_n, \omega) = [P \cdot \mathbf{B}(r_0, r_0, \omega) + Q \cdot \mathbf{B}(r_n, r_0, \omega)] \cdot \mathbf{C} = 0.$$

Оскільки, $\mathbf{B}(r_0, r_0, \omega) = \mathbf{E}$, приходимо до рівності

$$[\mathbf{P} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}(r_n, r_0, \omega)] \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (24)$$

Для існування нетривіального вектора \mathbf{C} у (24) необхідно і достатньо виконання умови

$$\det[\mathbf{P} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}(r_n, r_0, \omega)] = 0. \quad (25)$$

$$\text{Позначимо } \mathbf{B}(r_n, r_0, \omega) \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}.$$

Рівняння (25) – характеристичне рівняння задачі на власні значення (19), (20) яке у розгорнутому вигляді можна записати таким чином

$$r_0^2 \alpha_0 (r_n^2 \alpha_n b_{12}(\omega) + b_{22}(\omega)) + r_n^2 \alpha_n b_{11}(\omega) + b_{21}(\omega) = 0.$$

Для знаходження нетривіального вектора $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$ покладемо у рівність (24) ω_k

замість ω . Відтак прийдемо до векторної рівності

$$\left[\begin{pmatrix} r_0^2 \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r_n^2 \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}(\omega_k) & b_{12}(\omega_k) \\ b_{21}(\omega_k) & b_{22}(\omega_k) \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r_0^2 \alpha_0 & -1 \\ r_n^2 \alpha_n b_{11}(\omega_k) + b_{21}(\omega_k) & r_n^2 \alpha_n b_{12}(\omega_k) + b_{22}(\omega_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} r_0^2 \alpha_0 C_1 - C_2 = 0, \\ (r_n^2 \alpha_n b_{11}(\omega_k) + b_{21}(\omega_k)) \cdot C_1 + (r_n^2 \alpha_n b_{12}(\omega_k) + b_{22}(\omega_k)) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Оскільки визначник системи (26) дорівнює нулеві, то система має нетривіальні розв'язки $\mathbf{C} \neq 0 \in \mathbb{R}$. Поклавши, наприклад $C_2 = 1$, отримаємо

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_0^2 \alpha_0 \end{pmatrix}^T.$$

Власні вектори системи диференціальних (21) з крайовими умовами (8), мають вигляд

$$\mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) = \mathbf{B}_i(r, r_i, \omega_k) \cdot \mathbf{B}(r_i, r_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 r_0^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1},$$

де першою координатою є власні функції $R_k(r, \omega_k)$ а другою – квазіпохідні $R_k^{[1]}(r, \omega_k)$ відповідних власних функцій.

Розвинення в ряди Фур'є за власними функціями $R_k(r, \omega_k)$. Нехай $g(r) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(r) \theta_i$ – абсолютно неперервна на $[r_0, r_n]$ функція, що має різні аналітичні вирази $g_i(r)$ на кожному з проміжків $[r_i, r_{i+1}]$. Розвинення функції $g(r)$ в ряд Фур'є за власними функціями $R_k(r, \omega_k)$ задачі (19), (20) має вигляд

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k R_k(r, \omega_k),$$

де коефіцієнти Фур'є g_k обчислюються за формулою [7], [8], [15]

$$g_k = \frac{1}{\|R_k(r, \omega_k)\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 \cdot g_i(r) \cdot R_{ki}(r, \omega_k) dr,$$

а $\|R_k\|^2$ – квадрат норми власних функцій $R_k(r, \omega_k)$

$$\|R_k(r, \omega_k)\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 \cdot R_{ki}^2(r, \omega_k) dr.$$

Побудова розв'язку мішаної задачі для функції $v(r, \tau)$. Схема побудови розв'язку цієї задачі методом власних функцій детально описа-

на в роботі [15]. Цей розв'язок зображується у такому вигляді вектор-функції:

$$\mathbf{v}_i(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot \mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k), \quad (27)$$

де f_k та u_k коефіцієнти розвинення початкової умови $f(r)$ та функції $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ відповідно в ряди Фур'є за системою власних функцій $R_k(r, \omega_k)$, першою координатою є шукана функція $v_i(r, \tau)$, а другою – її квазіпохідна $v_i^{[1]}(r, \tau)$.

Враховуючи (12) та (27), отримуємо розв'язок вихідної задачі (1)-(3)

$$t(r, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} [u_i(r, \tau) + v_i(r, \tau)] \cdot \theta_i.$$

Модельний приклад. Розглянемо задачу про нагрівання чотиришарової порожнистої сферичної конструкції, яка виготовлена з різних ізотропних шарів. У початковий момент часу температура конструкції та навколишнього середовища становить 20°C . Навколо конструкції розпочинається пожежа, температура якої змінюється за температурним режимом зовнішньої пожежі $\psi_n(\tau) = 660(1 - 0,687e^{-0,32\tau} - 0,313e^{-3,8\tau}) + 20$.

Температура середовища всередині конструкції є незмінною, та становить 20°C . Теплотехнічні характеристики конструкції для розрахунку: радіуси шарів – $r_0 = 2,1\text{ м}$, $r_1 = 2,15\text{ м}$, $r_2 = 2,35\text{ м}$, $r_3 = 2,38\text{ м}$, $r_4 = 2,44\text{ м}$; коефіцієнти теплопровідності – $\lambda_0 = 0,76 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$, $\lambda_1 = 1,92 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$,

$\lambda_2 = 0,09 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$, $\lambda_3 = 2,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$; питома теплоємність – $c_0 = 870 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, $c_1 = 550 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$,

$c_2 = 1140 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, $c_3 = 690 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$; густина –

$\rho_0 = 1800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_1 = 2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_2 = 300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,

$\rho_3 = 1600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; інтенсивність внутрішнього джерела тепла $q_{v0} = 2500, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$, $q_{v2} = 1950, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$;

коефіцієнти теплообміну – $\alpha_0 = 4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$,

$\alpha_n = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$.

Результати розрахунків наведено на рис 1.

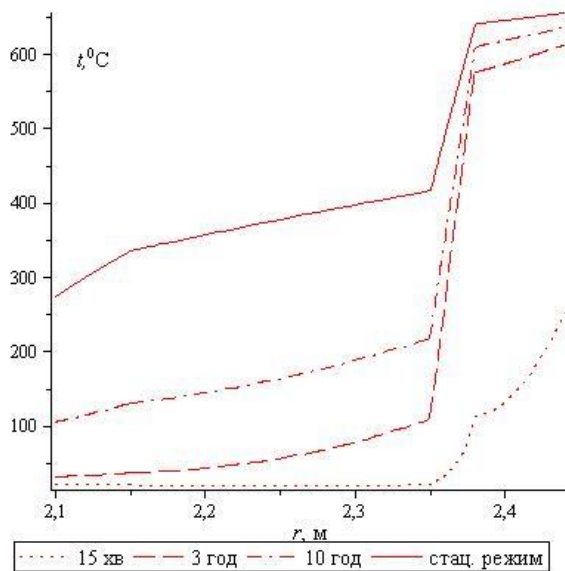


Рисунок 1 – Нагрівання чотиришарової сферичної конструкції

Висновки. Отримані у роботі результати мають безпосереднє застосування у ряді прикладних задач. Поставлена задача (1)–(3) описує процеси теплообміну (як нагрівання, так і охолодження) у багат шарових порожнистих сферичних конструкціях з урахуванням крайових умов третього роду та наявності внутрішніх джерел тепла. Зміна крайових умов на будь-які інші (першого чи другого роду) абсолютно не впливає на схему розв’язування поставленої задачі.

Розв’язок системи рівнянь (7) та (21) знаходиться у класі абсолютно неперервних на $[r_0, r_n]$ вектор-функцій, що відповідає умовам ідеального теплового контакту. У зв’язку з цим, при постановці вихідної задачі (1)–(3) відсутні умови спряженя (рівність температури та теплових потоків).

Список літератури

1. Singh, Suneet, and Prashant K. Jain. Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere. *Journal of Heat Transfer* 138.10 (2016): 101301. DOI: 10.1115/1.4033536
2. De Monte, Filippo. Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46.8 (2003): 1455-1469.
3. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
4. Özişik M. N., Orlande H. R. B., Colaço M. J., Cotta R. M. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, Second Edition. New York: CRC Press, 2017. 580 p.
5. Gosz M. R. *Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer*. - New York: CRC Press, 2017. - 400 p.

6. Daneshjou, K., Bakhtiari, M., Alibakhshi, R., & Fakoor, M. (2015). Transient thermal analysis in 2D orthotropic FG hollow cylinder with heat source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 89, 977–984. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.104

7. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Volume 91, Issue 6, pp. 1373-1384, 2017. DOI 10.1007/s10891-018-1871-3.

8. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О., Ю. ”Прямой метод расчета температурного поля в многослойной полой сферической конструкции”, *Вестник Кокшетауского технического института*, №29, 1, с. 9-20, 2018.

9. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В., Власий О. О. *Обобщенные квазидифференциальные уравнения*. Львов: Изд-во Львовского государственного университета безопасности жизнедеятельности, 2017.

10. Арсенин В. Я. *Методы математической физики*. Москва: Наука, 1974.

11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука, 1977.

12. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю. Дослідження процесів теплопереносу у багат шарових конструкціях основних геометричних форм з урахуванням внутрішніх джерел тепла. *Матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання"*, 14-19 травня 2018. Івано-Франківськ, 2018. С. 379–385.

13. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю. Концепція квазіпохідних в задачах математичного моделювання. *Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції "Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього спеціаліста"*, 1-2 грудня 2016. Суми, 2016. С. 144–147.

14. Тацій Р. М., Ушак Т. І., Пазен О. Ю. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталіми коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла. *Пожежна безпека*. 2015. № 27. С. 120–126.

15. O. Y. Pazen and R. M. Tatsii "General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients". *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 89, no. 2, pp. 357-368, 2016. DOI:https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8

Reference

1. Singh, Suneet, and Prashant K. Jain. Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere. *Journal of Heat Transfer* 138.10 (2016): 101301. DOI: 10.1115/1.4033536

2. De Monte, Filippo. Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46.8 (2003): 1455-1469.
3. Lykov, A.V. (1967) *Teoriia teploprovodnosti*, Vysshaya shkola, Moscow, USSR [in Russian].
4. Özişik M. N., Orlande H. R. B., Colaço M. J., Cotta R. M. *Finite Difference Methods in Heat Transfer, Second Edition*. New York: CRC Press, 2017. 580 p.
5. Gosz M. R. *Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer*. - New York: CRC Press, 2017. - 400 p.
6. Daneshjou, K., Bakhtiari, M., Alibakhshi, R., & Fakoor, M. (2015). Transient thermal analysis in 2D orthotropic FG hollow cylinder with heat source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 89, 977–984. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.104
7. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Volume 91, Issue 6, pp. 1373-1384, 2017. DOI 10.1007/s10891-018-1871-3.
8. Tatsiy R. M. Stasyuk M. F., Pazen O. Yu. Direct method for calculating a temperature field in a multi-layered cavity spherical design, *Bulletin of the Kokshetau Technical Institute*, Volume 29, Issue 1, pp. 9-20, 2018. (in Russian).
9. Tatsiy R. M., Stasyuk M. F., Mazurenko V. V., Vlasyy O. O. *Obobshchennye kvazydyfferentsial'ni porivnyannya* [Generalized quasidifferential equations]. L'vov: Yzd-vo L'vovskogo gosudarstvennogo universiteta bezopasnosti zhiznedeyatel'nosti, 2017.
10. Arsenin, V.Ya. *Metody matematicheskoi fizyky* [Methods of Mathematical physics]. Moscow : Nauka, 1974. USSR.
11. Tihonov, A.N. and Samarskii, A.A. *Uravnenie matematicheskoi fizyky* [Mathematical physics equation]. Moscow : Nauka, 1977. USSR.
12. Tatsiy R. M. Stasyuk M. F., Pazen O. YU. Doslidzhennya protsesiv teploperenosu u bahatosharovykh konstruktsiyakh osnovnykh heometrychnykh form z urakhuvannyam vnutrishnikh dzherel tepla [Investigation of heat transfer processes in multilayer structures of basic geometric forms taking into account internal heat sources.]. *Materialy statey Mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi "Informatsiyi tekhnolohiyi ta komp'yuterne modelyuvannya"*, 14-19 travnya 2018. Ivano-Frankivs'k, 2018. S. 379–385.
13. Tatsiy R. M. Stasyuk M. F., Pazen O. YU. *Kontseptsiya kvazipokhidnykh v zadachakh matematychnoho modelyuvannya* [The concept of quasi-derivatives in mathematical modeling problems]. Materialy IV Vseukrayins'koyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi "Naukova diyal'nist' yak shlyakh formuvannya profesiynykh kompetentnostey maybutn'oho spetsialista", 1-2 hrudnya 2016. Sumy, 2016. S. 144–147.
14. Tatsiy R. M. Ushak T. I., Pazen O. Yu. Zahalna tretya krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovodnosti z kuskovo-stalymy koefitsiyentamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla [General third boundary value problem for the heat equation with piecewise constant coefficients and internal heat sources]. *Zbirnyk naukovykh prats Pozhezhna bezpeka*. Lviv. 2015. № 27. S. 120-126.
15. O. Y. Pazen and R. M. Tatsii "General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients". *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 89, no. 2, pp. 357-368, 2016. DOI:https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8

R. M. Tatsii, O. Y. Pazen, T.G. Berezhanskiy

MODELING OF THE HEAT TRANSFER PROCESS IN A MULTI-LAYER SPHERICAL CONSTRUCTION TAKING INTO ACCOUNT OF INTERNAL HEAT SOURCES

The proposed work is devoted to the application of the direct method to the study of heat transfer processes in a multilayer hollow spherical structure in the presence of internal (distributed) heat sources. It is assumed that there is an ideal thermal contact between the layers, and that the laws of changes in the temperatures of the media that wash the surface (inner and outer) layers of the structure are arbitrary functions of time and are evenly distributed over the surfaces. That is, convective heat exchange with the environment is assumed and the boundary conditions of the third are satisfied. Therefore, the isotherms inside this structure are concentric circles. The coefficients of the thermal conductivity equation are considered to be lump-constant functions with respect to the spatial coordinate.

This problem is solved by applying the reduction method, when the original problem is divided into two or more simple ones. Analytical studies were conducted using the method of reduction, the concept of quasi-derivatives, modern theory of systems of linear differential equations, the Fourier method and a modified method of eigenfunctions with the active use of computer mathematical environments. The numerical implementation of the method was performed using the Maple 13 computer algebra system.

To illustrate the proposed method, a model example of finding the distribution of the temperature field in a four-layer spherical structure with available internal heat sources under the influence of the temperature of the external fire is solved. The results of the calculations are presented as a graph of temperature change depending on time and spatial coordinate. It should be noted that 30 first roots of the characteristic equation were used to achieve the result with the given accuracy.

The results obtained are directly applicable in a number of applications. This task describes the processes of heat exchange both heating and cooling.

Keywords: spherical construction, quasi-derivative, direct method, heat transfer.