

Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. Ю. Пазен

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІНУ В БАГАТОШАРОВІЙ ПЛОСКІЙ КОНСТРУКЦІЇ ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ ЗА УМОВ ПОЖЕЖИ

Запропонована робота присвячена застосуванню прямого методу до дослідження процесів теплообміну в багатошаровій плоскій конструкції. Припускається, що кожен шар виготовлений з ізотропного матеріалу різної товщини. Між ними існує неідеальний тепловий контакт, а в шарах передбачено наявність внутрішніх джерел тепла. В цьому випадку ізотермічні поверхні являють собою паралельні площини, тобто температура змінюється лише в одному напрямку. На зовнішніх поверхнях конструкції відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються крайові умови третього роду. Коефіцієнти рівняння теплопровідності вважаються кусково-сталими відносно просторової координати. В такій постановці задача розв'язана вперше. Реалізація розв'язку задачі проводиться шляхом застосування методу редукції із використанням концепції квазіпохідних та застосування теорії систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Надалі використовується процедура відокремлення змінних Фур'є із застосуванням модифікованого методу власних функцій.

Виходячи з фізичного змісту задачі, диференціальне рівняння теплопровідності записувалось у декартовій системі координат, однак представлена тут схема розв'язування без будь яких принципових ускладнень поширюється на подібні задачі для багатошарових тіл основних геометричних форм шляхом переходу до відповідних систем координат.

Для ілюстрації запропонованого методу розв'язано модельний приклад про знаходження розподілу нестационарного температурного поля в семишаровій плоскій конструкції за умов впливу вуглеводневого температурного режиму пожежі. Між двома суміжними шарами виконується умова ідеального або неідеального теплового контакту. Крім цього у деяких шарах наявні внутрішні джерела тепла. Результати обчислень представлені у вигляді графіка зміни температури залежно від часу та просторової координати.

Ключові слова: *неідеальний тепловий контакт, диференціальне рівняння з імпульсною дією, прямий метод.*

R. M. Tatsii, M. F. Stasiuk, O. Y. Pazen

Lviv State University of Life Safety

SIMULATION OF HEAT EXCHANGE IN A MULTILAYER FLAT STRUCTURE UNDER PERFECT THERMAL CONTACT IN FIRE CONDITIONS

The proposed work is devoted to the application of the direct method to the study of heat transfer processes in a multilayer flat structure. It is assumed that each layer is made of isotropic material of different thickness. There is an imperfect thermal contact between them, and the layers have internal heat sources. In this case, the isothermal surfaces are parallel planes, i.e the temperature changes in only one direction. On the outer surfaces of the structure there is a convective heat exchange with the environment, i.e the boundary conditions of the third kind are fulfilled. The coefficients of the thermal conductivity equation are considered to be piecewise constant with respect to the spatial coordinate. This is the first time the problem has been solved in this setting. The solution of the problem is realized by applying the method of reduction using the concept of quasi-derivatives and applying the theory of systems of differential equations with impulse action. The following is the procedure for separating Fourier variables using a modified method of eigenfunctions.

Based on the physical content of the problem, the differential equation of thermal conductivity was written in the Cartesian coordinate system, but the solution scheme presented here without any fundamental difficulties extends to similar problems for multilayer bodies of basic geometric shapes by switching to appropriate coordinate systems.

To illustrate the proposed method, a model example of finding the distribution of a nonstationary temperature field in a seven-layer flat structure under the influence of the hydrocarbon temperature of the fire is solved. The condition of ideal or non-ideal thermal contact is fulfilled between two adjacent layers. In addition, some layers have internal heat

sources. The results of the calculations are presented in the form of a graph of temperature changes depending on time and spatial coordinates.

Key words: not ideal heat contact, differential equation with impulse action, direct method.

Вступ. Одними з найбільш небезпечних надзвичайних ситуацій які завдають значних матеріальних збитків та становлять значну небезпеку для життя людей є *пожежі*. Вони можуть супроводжуватись руйнуванням будівельних конструкцій, тоді матеріальні збитки сягатимуть досить значного обсягу. Забезпечення відповідної стійкості та міцності конструкцій, яку прийнято називати вогнестійкістю, є досить важливим аспектом пожежної безпеки. Одним із основних критеріїв для розрахунку межі вогнестійкості будь-якої будівельної конструкції є визначення температурно-часової залежності нагрівання відповідної конструкції в умовах пожежі. Для цього завжди необхідно розв'язувати задачу теплообміну.

Розв'язуванню проблеми теплообміну в багатошарових конструкціях присвячено численний ряд робіт. Переважна більшість з них обмежується дослідженням випадку ідеального теплового контакту між шарами. Проте недостатньо вивченими є задачі теплопровідності багатошарових конструкцій з урахуванням неідеального теплового контакту. Кількість таких досліджень є достатньо обмеженою. Так, наприклад, у роботі [1] розглянуто задачу про визначення температурного поля двошарової плоскої конструкції при неідеальному тепловому контакті між шарами та граничними умовами третього роду. В [2] проведено математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. У [3] розв'язано осесиметричну температурну задачу для системи двох контактуючих шарів з урахуванням неідеального теплового контакту. Однак в цитованих роботах автори обмежуються двома шарами. Це зумовлено тим фактором, що збільшення кількості шарів (з огляду на вибір методів практичної реалізації) призводить до обчислювальних проблем. Тому проблема побудови ефективної аналітичної схеми дослідження процесів теплообміну в багатошарових конструкціях за наявності неідеального теплового контакту між шарами та з урахуванням наявності внутрішніх джерел тепла залишається актуальною задачею.

Постановка задачі. Розглядається нестационарний процес теплообміну в багатошаровій плоскій конструкції, яка розділена на n шарів різної товщини площинами $x = x_i, i = \overline{0, n}$, причому $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ (x, m) (рис. 1).

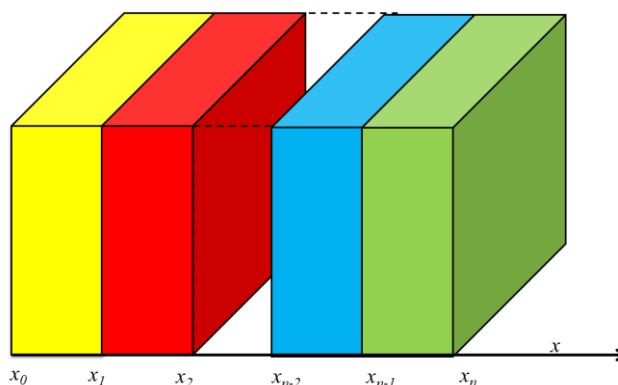


Рисунок 1 – Багатошарова плоска конструкція

Кожен із шарів наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_i, \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C}$, питомою масовою теплоємністю $c, \frac{Дж}{кг \cdot ^\circ C}$, густиною $\rho, \frac{кг}{м^3}$, та внутрішнім розподіленим джерелом тепла $q_{vi}, \frac{Вт}{м^3}$. На границях шарів (крім внутрішнього і зовнішнього) передбачено наявність неідеального теплового контакту (коефіцієнт теплообміну $\alpha_i, \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$). На поверхнях конструкції існує конвективний теплообмін з навколишнім середовищем (зміна температури якого описується функцією $\psi(\tau), ^\circ C$, а коефіцієнти теплообміну між середовищем та обмежуючими конструкцію поверхнями α_n та $\alpha_n, \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$), тобто виконуються умови Нютона-Ріхмана (крайові умови третього роду). Вважатимемо, що температура $t(x, \tau), ^\circ C$ залежить від часу τ, c та поширюється лише в напрямку осі $0x$, тобто задача є одновимірною. Як впливає з робіт [4, 5], поставлена задача зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right) + q_v(x), \quad (1)$$

з умовами спряження [6]

$$\begin{cases} t_{i+1}^{[1]}(x_{i+1}) - t_i^{[1]}(x_{i+1}) = 0, \\ t_{i+1}(x_{i+1}) - t_i(x_{i+1}) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} t_i^{[1]}(x_{i+1}). \end{cases} \quad (2)$$

крайовими умовами третього роду

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_0, \tau) = \alpha_0 (t(x_0, \tau) - \psi_0(\tau)), \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}(x_n, \tau) = \alpha_n (t(x_n, \tau) - \psi_n(\tau)), \end{cases} \quad (3)$$

та початковою умовою

$$t(x, 0) = \varphi(x). \quad (4)$$

Введемо позначення: θ_i – характеристична функція [7] напіввідкритого проміжку $[x_i, x_{i+1})$, тобто

$$\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases} \quad \text{Позначимо } t^{[1]}(x, \tau) \stackrel{df}{=} \lambda \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} -$$

$$\text{квазіпохідна, } \lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i, \quad c(x) \rho(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \theta_i,$$

$$q_v(x) = \sum_{i=0}^{n-1} q_{vi} \theta_i, \quad \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \theta_i, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i, q_{vi}, \alpha_i > 0,$$

$$\forall i = \overline{0, n-1}$$

Метод редукції. Розв'язок задачі (1)-(4) шукаємо (див. напр. [6, 7]) у вигляді суми двох невідомих, але взаємозв'язаних функцій

$$t(x, \tau) = u(x, \tau) + v(x, \tau). \quad (5)$$

Одну з них можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

Визначимо, наприклад, функцію $u(x, \tau)$ як розв'язок крайової квазістаціонарної задачі:

$$(\lambda u') + q_v = 0 \quad (6)$$

з умовами спряження [5]

$$\begin{cases} u_{i+1}^{[1]}(x_{i+1}) - u_i^{[1]}(x_{i+1}) = 0, \\ u_{i+1}(x_{i+1}) - u_i(x_{i+1}) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} u_i^{[1]}(x_{i+1}), \end{cases} \quad (7)$$

та крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 u(x_0, \tau) - u^{[1]}(x_0, \tau) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n u(x_n, \tau) + u^{[1]}(x_n, \tau) = \alpha_n \psi_n(\tau), \end{cases} \quad (8)$$

де $u^{[1]} \stackrel{df}{=} \lambda \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}$ а також (надалі)

$$v^{[1]} \stackrel{df}{=} \lambda \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} - \text{квазіпохідні.}$$

Тут необхідно зауважити, що крайові умови (8) для функції $u(x, \tau)$ справджують крайові умови (3) для функції $t(x, \tau)$, а τ вважається параметром.

Введемо вектори $\mathbf{u} = (u \quad u^{[1]})^T$, $u^{[1]} \stackrel{df}{=} \lambda u'$,

$q = u^{[1]}$, $\mathbf{R} = (0 \quad q_v)^T$, та матриці

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}_i \theta_i = \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_i & \lambda_i \end{pmatrix} \theta_i, \quad \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_i & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_i \end{pmatrix}$$

Тоді рівняння (6) зводиться до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{R}, \quad (9)$$

з умовами спряження та крайовими умовами в матричній формі відповідно

$$\mathbf{u}_{i+1}(x_{i+1}) - \mathbf{u}_i(x_{i+1}) = \mathbf{C}_{i+1} \cdot \mathbf{u}_i(x_{i+1}), \quad (10)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}(x_0) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}(x_n) = \mathbf{\Gamma}, \quad (11)$$

$$\text{де } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n \psi_n(\tau) \end{pmatrix}.$$

Варто відзначити, що система (9) разом з умовами спряження (11) має назву системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією [8].

Розглянемо систему (9) на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1})$

$$\mathbf{u}'_i = \mathbf{A}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{R}_i, \quad (12)$$

Встановлено [5], що матриця Коші відповідної однорідної системи $\mathbf{u}'_i = \mathbf{A}_i \mathbf{u}_i$ має таку структуру:

$$\mathbf{B}_i(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Розв'язок $\mathbf{u}_i(x)$ неоднорідної системи (12) на проміжку $[x_i, x_{i+1})$ шукатимемо у вигляді [5, 7]

$$\mathbf{u}_i(x) = \mathbf{B}_i(x, x_i) \mathbf{P}_i + \int_{x_i}^x \mathbf{B}_i(x, s) \mathbf{R}_i(s) ds, \quad (13)$$

де \mathbf{P}_i – невідомий вектор

Аналогічно на проміжку $[x_{i+1}, x_{i+2})$

$$\mathbf{u}_{i+1}(x) = \mathbf{B}_{i+1}(x, x_{i+1}) \mathbf{P}_{i+1} + \int_{x_{i+1}}^x \mathbf{B}_{i+1}(x, s) \mathbf{R}_{i+1}(s) ds, \quad (14)$$

У точці $x = x_i$ повинна виконуватись умова спряження (10) [4], з якої при застосуванні до рівностей (13) та (14) одержимо рекурентне співвідношення

$$\mathbf{P}_{i+1} = (\mathbf{E} + \mathbf{C}_{i+1}) \left[\mathbf{B}_i(x_{i+1}, x_i) \cdot \mathbf{P}_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{B}_i(x_{i+1}, s) \mathbf{R}_i(s) ds \right], \quad (15)$$

де \mathbf{E} – одинична матриця.

Введемо позначення $(\mathbf{E} + \mathbf{C}_{i+1}) = \mathbf{C}_{i+1}$,

$$\mathbf{Z}_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{B}_i(x_{i+1}, s) \mathbf{R}_i(s) ds,$$

$$\mathbf{B}(x_p, x_q) \stackrel{df}{=} \mathbf{C}_p \mathbf{B}_{p-1}(x_p, x_{p-1}) \times \mathbf{C}_{p-1} \mathbf{B}_{p-2}(x_{p-1}, x_{p-2}) \times \dots \times \mathbf{C}_{q+1} \mathbf{B}_q(x_{q+1}, x_q)$$

На основі співвідношення (15) для довільного $k > 0$ методом математичної індукції за індексом k отримуємо

$$\mathbf{P}_{m+k} = \mathbf{B}(x_{m+k}, x_m) \cdot \mathbf{P}_m + \sum_{i=1}^k \mathbf{B}(x_{m+k}, x_{m+i-1}) \mathbf{Z}_{m+i-1}.$$

Покладаючи $m=0$ отримуємо

$$\mathbf{P}_0 = \left(\begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \times \\ \times \left(\begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n \psi_n(\tau) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \sum_{i=1}^n \left(- \left(\frac{q_{vi-1}(x_i - x_{i-1})^2}{2\lambda_{i-1}} \right) - q_{vi-1}(x_i - x_{i-1}) \cdot \left(\sum_{j=1}^i \frac{x_j - x_{j-1}}{\lambda_{j-1}} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\alpha_j} \right) \right) \right)$$

На кожному з проміжків задача (6)-(8) має єдиний розв'язок та зображується у вигляді вектор-функції $\mathbf{u}_i(x)$, де першою координатою є шукана функція $u_i(x, \tau)$, а другою – її квазіпохідна

$$\mathbf{u}_i(x) = \mathbf{B}_i(x, x_i) \cdot \mathbf{B}(x_i, x_0) \cdot \mathbf{P}_0 - \mathbf{B}_i(x, x_i) \cdot \sum_{k=0}^i \mathbf{B}(x_i, x_k) \cdot \mathbf{Z}_k - \int_{x_i}^x \mathbf{B}_i(x, s) \cdot \mathbf{R}_i(s) ds \quad (16)$$

На основі зображення (5) з формули (1) отримуємо:

$$c\rho \frac{\partial}{\partial \tau} (u+v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} (u+v) \right) \Rightarrow c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Оскільки в формулі (6) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) \equiv 0$, то

отримуємо неоднорідну мішану задачу для визначення функції $v(x, \tau)$:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (17)$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} v_{i+1}^{[1]}(x_{i+1}, \tau) - v_i^{[1]}(x_{i+1}, \tau) = 0, \\ v_{i+1}(x_{i+1}, \tau) - v_i(x_{i+1}, \tau) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} v_i^{[1]}(x_{i+1}, \tau), \end{cases} \quad (18)$$

крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 v(0, \tau) - v^{[1]}(0, \tau) = 0, \\ \alpha_n v(x_n, \tau) + v^{[1]}(x_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{B}(x_k, x_0) \cdot \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{B}(x_k, x_{i-1}) \mathbf{Z}_{i-1}.$$

де \mathbf{P}_0 – початковий вектор, що обчислюється за формулою

$$\mathbf{P}_0 = (\mathbf{P} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}(x_n, x_0))^{-1} \cdot \left(\mathbf{P} - \mathbf{Q} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{B}(x_k, x_{i-1}) \mathbf{Z}_{i-1} \right)$$

або в розгорнутому вигляді

та початковою умовою (одержаною з формули (4) на основі зображення (5))

$$v(x, 0) = \varphi(x) - u(x, 0) \equiv f(x, 0). \quad (20)$$

Метод розв'язування такої задачі з використанням методу власних функцій детально описано в роботах [4, 7]. Тут лише слід зауважити, що:

1) характеристичне рівняння відповідної задачі на власні значення має вигляд

$$\det[\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{B}(x_n, x_0, \omega)] = 0. \quad (21)$$

де $\mathbf{B}(x_n, x_0, \omega) = \mathbf{B}_{n-1}(x_n, x_{n-1}, \omega) \times$

$$\times \prod_{j=1}^{n-1} \mathbf{C}_{n-j} \mathbf{B}_{n-j-1}(x_{n-j}, x_{n-j-1}, \omega),$$

$$\mathbf{B}_i(x_{i+1}, x_i, \omega) = \begin{pmatrix} \cos \beta_i(x_{i+1} - x_i) & \frac{\sin \beta_i(x_{i+1} - x_i)}{\lambda_i \beta_i} \\ -\lambda_i \beta_i \sin \beta_i(x_{i+1} - x_i) & \cos \beta_i(x_{i+1} - x_i) \end{pmatrix},$$

$$\beta_i \stackrel{df}{=} \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}}.$$

2) Власні вектори, побудова яких також описана у [7], мають структуру

$$\mathbf{X}_{ki}(x, \omega_k) = \mathbf{B}_i(x, x_i, \omega_k) \cdot \mathbf{B}(x_i, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$i = \overline{0, n-1}$$

Розв'язок задачі (17)-(20) методом власних функцій зображується у вигляді ряду [9]

$$v_i(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} \gamma_k(s) ds \right] \cdot X_{ki}(x, \omega_k), \quad (22)$$

де f_k та γ_k коефіцієнти розвинення початкової умови та функції $\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}$ відповідно в ряди Фур'є за системою власних функцій $X_k(x, \omega_k)$.

Модельний приклад. Розглянемо задачу про нагрівання семишарової плоскої конструкції, яка виконана з ізотропних матеріалів різної товщини. Між двома суміжними шарами виконується умова ідеального або неідеального теплового контакту. Крім цього у деяких шарах наявні внутрішні дже-

рела тепла. З однієї сторони температура навколишнього середовища змінюється за вуглеводневим температурним режимом пожежі

$$\psi_0(\tau) = 1080 \left(1 - 0,325e^{-\frac{0,167\tau}{60}} - 0,675e^{-\frac{2,5\tau}{60}} \right) + 20$$

при коефіцієнті теплообміну $\alpha_0 = 50 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$, а з іншої – є сталою $\psi_n(\tau) = 20 \text{ °C}$ з коефіцієнтом теплообміну $\alpha_n = 4 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$ [10]. Між деякими шарами існує неідеальний тепловий контакт. Коефіцієнт теплообміну між I та II шарами становить $\alpha_1 = 350 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$, між III та IV – $\alpha_3 = 285 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$, між V та VI – $\alpha_5 = 180 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$. Необхідно визначити розподіл нестационарного температурного поля такої конструкції. Теплофізичні характеристики конструкції для розрахунку наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Теплотехнічні характеристики конструкції

Параметр	Шар 1	Шар 2	Шар 3	Шар 4	Шар 5	Шар 6	Шар 7
Товщина шару	0,3	0,08	0,1	0,15	0,2	0,05	0,02
Коефіцієнт теплопровідності	209	1,55	64	393	52	2,91	34,6
Питома масова теплоємність	894	770	389	389	420	921	130
Густина	2680	2200	800	8950	7270	2800	11400
Внутрішнє джерело тепла	25000	16000	0	18500	0	0	7500

Використавши вищеописаний метод та систему комп'ютерної алгебри Maple, отримуємо розподіл нестационарного температурного поля по товщині конструкції у вигляді графіка (рис.2).

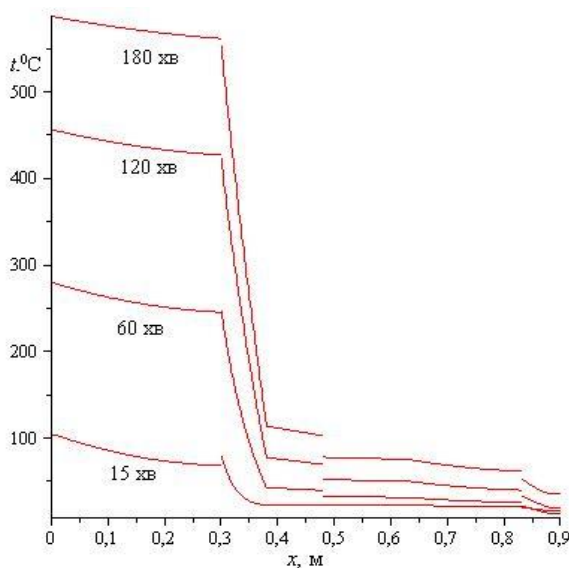


Рисунок 2 – Розподіл нестационарного температурного поля по товщині конструкції

На цьому рисунку добре видно наявність стрибків температури в точках неідеального теплового контакту. Також слід зауважити, що в точці $x = 0,3 \text{ м}$ теж спостерігається стрибок температури, який з часом змінює знак. Це пояснюється наявністю внутрішнього джерела тепла у другому шарі, тепловий потік якого на початку процесу нагрівання є більшим від теплового потоку пожежі, що збільшується з плином часу.

Висновки. Вперше прямий метод застосовано до розв'язування задачі про розподіл нестационарного температурного поля по товщині багатошарової плоскої конструкції при неідеальному тепловому контакті між шарами та за наявності внутрішніх джерел тепла. В якості ілюстрації можливостей цього методу наведено модельний приклад розрахунку температурного поля в семишаровій конструкції при різних варіантах теплового контакту між шарами. Виходячи з фізичного змісту, відповідне диференціальне рівняння записувалось у декартовій системі координат, однак представлена тут схема розв'язування без будь-яких принципових труднощів поширюється на подібні задачі, що сформульовані в інших системах координат.

Список літератури

1. Кусковець С. Л., Половко А. П., Борис О. П., Величко Л. Д. Розподіл температурного поля в двошаровій плоскій конструкції при умові неідеального теплового контакту між шарами та наявності граничних умов третього типу. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. 2011. №54. С. 143-150.

2. Гера Б. В. Математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2013. №18. С. 61-72.
<http://eadnurt.diit.edu.ua/jspui/handle/123456789/9361>.

3. Окрепкий Б. С., Неміш В. М. Осесиметрична температурна задача для системи двох контактуючих шарів з урахуванням неідеального теплового контакту. *Міжвузівський збірник Наукові нотатки*. 2014. №47. С. 131-136.

4. Таций Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю. Расчет нестационарного температурного поля в многослойной плите при условиях неидеального теплового контакта между слоями. *Вестник Кокшетауского технического института КТИКЧСМВД Республики Казахстан*. 2019. № 2(34). С.40-49.

5. Tatsiy R. M., Pazen O. Yu. Raschet stacionarnogo temperaturnogo polâ v mnogoslnoy plite s uchetom vnutrennih istochnikov tepla pri usloviâh neideal'nogo teplovogo kontakta mezhdu sloâmî. *Bezpieczenstwo i Technika Pożarnicza*. CNOBP-PIB, BiTP. 2015. № 40. P. 51-59. DOI:[10.12845/bitp.40.4.2015.4](https://doi.org/10.12845/bitp.40.4.2015.4).

6. Таций Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О. Ю., Власій О. О. Застосування диференціальних рівнянь з імпульсною дією до розв'язування крайових задач теплопровідності. *Тези доповідей IV Всеукраїнської математичної конференції ім. Б.В. Василюшина «Нелінійні проблеми аналізу»*. Івано-Франківськ. 26-28 вересня 2018. С.58-60.

7. Таций Р. М., Ушак Т. І., Пазен О. Ю. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталыми коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла. *Пожежна безпека: збірник наукових праць*, Львів. 2015. № 27. С. 120-126.

8. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К. : Вища школа, 1987. 288 с.

9. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2016. vol. 89, no. 2. pp. 357-368. DOI:<https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>.

10. EN 1991-1-2 (2002) (English): Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-2: General actions – Actions on structures exposed to fire. DOI:<https://doi.org/10.1002/9783433601570.ch1>

References

1. Kuskovets' S. L., Polovko A. P., Borys O. P., Velychko L. D. Rozpodil temperaturnoho polya v dvokhsharoviy ploskiy konstruktsiyi pry umovi neideal'noho teplovoho kontaktu mizhsharamy ta nayavnosti hranychnykh umov tret'oho typu. *Visnyk Natsional'noho universytetu vodnoho hospodarstva ta pryrodokorystuvannya*. 2011. №54. S. 143-150.

2. Hera B. V. Matematychno modelyuvannya umov neideal'noho teplovoho kontaktu shariv cherez tonke vkluchennya z dzherelamy tepla. *Fizyko-matematychno modelyuvannya ta informatsiyi tekhnolohiyi*. 2013. №18. S. 61-72.
<http://eadnurt.diit.edu.ua/jspui/handle/123456789/9361>.

3. Okrepkyy B. S., Nemish V. M. Osesyetrychna temperaturna zadacha dlya systemy dvokh kontaktuyuchykh shariv z urakhuvannyam neideal'noho teplovoho kontakta. *Mizhvuziv's'kyi zbirnyk Naukovi notatky*. 2014. №47. S. 131-136.

4. Tatsiy R. M., Stasyuk M. F., Pazen O. YU. Raschet nestatsionarnogo temperaturnogo polya v mnogoslnoy plite pri usloviyakh neideal'nogo teplovogo kontakta mezhdu sloyami. *Vestnik Kokshetauskogo tekhnicheskogo instituta KTIKCHSMVD Respubliki Kazakhstan*. 2019. № 2(34). S.40-49.

5. Tatsiy R. M., Pazen O. Yu. Raschet stacionarnogo temperaturnogo polâ v mnogoslnoy plite s uchetom vnutrennih istochnikov tepla pri usloviâh neideal'noho teplovogo kontakta mezhdu sloâmî. *Bezpieczenstwo i Technika Pożarnicza*. CNOBP-PIB, BiTP. 2015. № 40. P. 51-59. DOI:[10.12845/bitp.40.4.2015.4](https://doi.org/10.12845/bitp.40.4.2015.4).

6. Tatsiy R. M., Stasyuk M. F., Pazen O. Yu., Vlasiy O. O. Zastosuvannya dyferentsial'nykh rivnyan' z impul'snoyu diyeyu do rozv'yazuvannya krayovykh zadach teploprovodnosti. *Tezy dopovidey IV Vseukrayins'koyi matematychnoyi konferentsiyi im. B.V. Vasylyshyna «Neliniyni problemy analizu»*. Ivano-Frankivs'k. 26-28 veresnya 2018. S.58-60.

7. Tatsiy R. M., Ushak T.I., Pazen O.YU. Zahal'na tretya krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovodnosti z kuskovo-stalymy koefitsiyentamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla. *Zbirnyk naukovykh prats' Pozhezhna bezpeka*. L'viv. 2015. № 27. S. 120-126.

8. Samoylenko A. M., Perestyuk N. A. Differential'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviyem. K. : Vishcha shkola, 1987. 288 c.

9. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2016. vol. 89, no. 2. pp. 357-368. DOI:<https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>.

10. EN 1991-1-2 (2002) (English): Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-2: General actions – Actions on structures exposed to fire. DOI:<https://doi.org/10.1002/9783433601570.ch1>