УДК 536.24

Л.Д.Величко, к.ф.–м.н., доц., А.П.Половко, О.І.Башинський, к.т.н. (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

РОЗПОДІЛ СТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БАГАТОШАРОВІЙ КОНСТРУКЦІЇ

Проведено обґрунтування та розгляд задачі визначення одномірного стаціонарного температурного поля в багатошаровій конструкції при ідеальному або неідеальному тепловому контакті між шарами та заданому на границях тіла температур гріючого середовища або конвективного теплообміну. Пропонується метод розв'язування даної задачі і приведено загальний запис температурного поля для n-шарової конструкції

Проблема енергозбереження в житлових і громадських будівлях України сьогодні стоїть надзвичайно гостро. Оскільки вартість енергоносіїв зростає з кожним роком їх збереження та раціональне використання є важливим завданням сьогодення.

Характерною особливістю сучасного будівництва є застосування нових типів енергоефективних (багатошарових) конструкцій, що виготовляють з використанням нез'ємної опалубки із пінополістиролу (ППС), який в подальшому при експлуатації будівлі виконує функцію утеплювача.

При дії високих температур пожежі енергоефективні багатошарові конструкції, навіть якщо вони виконані переважно з негорючих матеріалів, швидко прогріваються або руйнуються, тобто не мають достатньої вогнестійкості за ознакою несучої здатності, цілісності чи тепло ізолюючої здатності. Також конструкції з підвищеним вмістом горючих матеріалів можуть не відповідати потрібній групі горючості або сприяти швидкому розповсюдженню пожежі та виділяти токсичні речовини при горінні. [1].

Межа вогнестійкості будь-яких конструкцій в даний час може бути визначена експериментальним шляхом або розрахована аналітично за науково обґрунтованими методиками.

На даний час проведено натурні вогневі експерименти чотирьох типів (по два зразки кожного типу) багатошарових огороджуючи конструкцій і здійснюється опрацювання отриманих результатів[2].

Метою дослідження являється удосконалення існуючих методик розрахунку межі вогнестійкості сучасних енергоефективних огороджуючи стінових конструкцій.

На даний час ведеться робота над теоретичними дослідженнями температурного поля в багатошарових огороджуючи конструкціях для перевірки та обґрунтування результатів отриманих в ході проведення натурних вогневих експериментів.

Визначенню одновимірного стаціонарного температурного поля в багатошаровій конструкції при ідеальному або неідеальному тепловому контакті між шарами та заданому на границях тіла температур гріючого середовища або конвективного теплообміну присвячені роботи[3-5]. В даних роботах визначення температурного поля здійснюється методом спряження але загальний запис температурного поля для n – шарової конструкції відсутній.

Розглядається задача визначення стаціонарного одновимірного температурного поля в багатошаровій конструкції (рис. 1) при наявності ідеального та неідеального теплового контакту між шарами.

Товщини шарів конструкції наступні: l_1, $l_2 - l_1$, $l_3 - l_2$, …, $l_n - l_{n-1}$. Рівняння теплопровідності для i – ого шару для стаціонарному температурному поля наступне

$$\frac{d^2 T_i(x)}{dx^2} = 0, (i = \overline{1,n}; l_{i-1} < x < l_i), \tag{1}$$

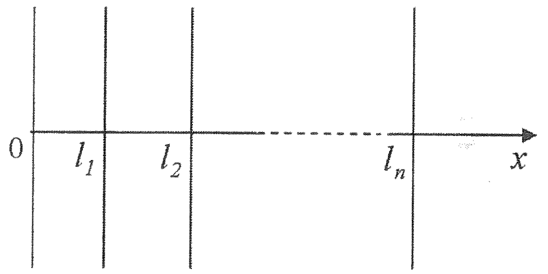

Рис. 1. Схема багатошарової конструкції

де: $T_i(x)$ – температурне поле в i – ому шарі, ^{0}C; x – координата; n – кількість шарів.

Вважаємо, що між шарами існує ідеальний тепловий контакт, тобто:

$$T_i(l_i)=T_{i+1}(l_i), \qquad \lambda_i\frac{dT_i(l_i)}{dx}=\lambda_{i+1}\frac{dT_{i+1}(l_i)}{dx} \qquad (i=\overline{1,n-1}), \tag{2}$$

де: λ_i – коефіцієнт теплопровідності для i – ого шару, $\frac{Bm}{м\cdot K}$.

Необхідно визначити розподіл стаціонарного температурного поля в багатошаровій конструкції при наявності граничних умов:

$$T_1(0)=t_0; \qquad T_n(l_n)=t_n \tag{3}$$

або
$$\lambda_1\frac{dT_1(0)}{dx}-\alpha_0\big(T_1(0)-t_0\big)=0; \qquad \lambda_n\frac{dT_n(l_n)}{dx}+\alpha_n\big(T_n(l_n)-t_n\big)=0, \tag{4}$$

де: α_0 і α_n – коефіцієнти теплообміну $\frac{Bm}{м^2\cdot K}$; t_0, t_n – температури зовнішнього середовища, ^{0}C.

Величина приведеного (узагальненого) коефіцієнта теплопровідності для всього тіла визначається за формулою:
$$\frac{l_n}{\lambda_y}=\frac{l_1}{\lambda_1}+\frac{l_2-l_1}{\lambda_2}+\dots+\frac{l_n-l_{n-1}}{\lambda_n}. \tag{5}$$

Введемо нову метрику для кожного шару тіла

$$x_{iy}=\frac{\lambda_y}{\lambda_i}(x-l_{i-1})+l_{i-1,y}, \qquad (l_{i-1}\le x\le l_i; i=\overline{1,n}), \tag{6}$$

де: $l_0=0$ і $l_{0y}=0$. З даної залежності отримаємо, що:

$$l_{1y}=\frac{l_1\lambda_y}{\lambda_1},\dots,\ l_{iy}-l_{i-1,y}=\frac{(l_i-l_{i-1})\lambda_y}{\lambda_i} \qquad (i=\overline{2,n}). \tag{7}$$

Сумуючи співвідношення (7) отримаємо, що

$$l_{ny}=l_n \text{ та } l_{i-1,y}=\frac{l_1\lambda_y}{\lambda_1}+\frac{(l_2-l_1)\lambda_y}{\lambda_2}+\dots+\frac{(l_{i-1}-l_{i-2})\lambda_y}{\lambda_{i-1}}. \tag{8}$$

Враховуючи співвідношення (6) отримаємо диференціальну залежність між координатою x і приведеною координатою x_{iy}, а саме:
$$dx=\frac{\lambda_i}{\lambda_y}dx_{iy}. \tag{9}$$

Рівняння теплопровідності в приведених координатах матиме вигляд:

$$\frac{d^2T_i(x_{iy})}{dx_{iy}^2}=0, \qquad (i=\overline{1,n}, l_{i-1,y}<x_{iy}<l_{iy}). \tag{10}$$

Умови ідеального теплового контакту між шарами наберуть вигляду:

$$T_i(l_{iy})=T_{i+1}(l_{iy}),\qquad \frac{dT_i(l_{iy})}{dx_{iy}}=\frac{dT_{i+1}(l_{iy})}{dx_{i+1,y}},\qquad (i=\overline{1,n-1}). \tag{11}$$

Розв'язок рівняння теплопровідності (10) при умовах (11) наступний

$$T_i(x_{iy})=C_1x_{iy}+C_2,\qquad (i=\overline{1,n}). \tag{12}$$

Сталі C_1 і C_2 визначаємо з граничних умов (3) або (4), які враховуючи (8), наберуть вигляду,

$$T_1(0)=t_0,\qquad T_n(l_n)=t_n \tag{13}$$

та

$$\lambda_y\frac{dT_1(0)}{dx_{1y}}-\alpha_0\left[T_1(0)-t_0\right]=0;\qquad \lambda_y\frac{dT_n(l_n)}{dx_{ny}}+\alpha_n\left[T_n(l_n)-t_n\right]=0. \tag{14}$$

Використовуючи рівняння (12) та граничну умову (13) отримаємо, що розподіл температурного поля в приведених координатах наступний:

$$T_i(x_{iy})=\frac{t_n-t_0}{l_n}x_{iy}+t_0\quad (i=\overline{1,n}). \tag{15}$$

Замінюючи приведену координату x_{iy} на координату x з врахуванням (6) отримаємо:

$$T_i(x)=\frac{t_n-t_0}{l_n}\left(\frac{\lambda_y}{\lambda_i}(x-l_{i-1})+l_{i-1,y}\right)+t_0.$$

Отже, розподіл стаціонарного одновимірного температурного поля в багатошаровій конструкції при ідеальному тепловому контакті між шарами та заданих значеннях температури на зовнішніх границях тіла, тобто умовах (3), має вигляд:

$$T_i(x)=\frac{(t_n-t_0)\lambda_y}{l_n}\left(\frac{l_1}{\lambda_1}+\frac{l_2-l_1}{\lambda_2}+\dots+\frac{l_{i-1}-l_{i-2}}{\lambda_{i-1}}+\frac{x-l_{i-1}}{\lambda_i}\right)+t_0, \tag{16}$$
$$(l_{i-1}\le x\le l_i;\, i=\overline{1,n}).$$

Якщо на границях багатошарової конструкції задано умови теплообміну (4), то використовуючи запис даної граничної умови в приведених координатах (14), визначаємо сталі C_i та C_2 для рівняння (12). Отже, розподіл температурного поля в приведених координатах при теплообміні на границях тіла матиме вигляд:

$$T_i(x_{iy})=\frac{(t_n-t_0)x_{iy}+t_0\left(\dfrac{\lambda_y}{\alpha_n}+l_n\right)+t_n\dfrac{\lambda_y}{\alpha_0}}{\dfrac{\lambda_y}{\alpha_0}+\dfrac{\lambda_y}{\alpha_n}+l_n},\qquad (i=\overline{1,n}). \tag{17}$$

Враховуючи залежності (6) та (8) співвідношення (17) набере вигляд:

$$T_i(x)=\left((t_n-t_0)\lambda_y\left(\frac{l_1}{\lambda_1}+\frac{l_2-l_1}{\lambda_2}+\dots+\frac{l_{i-1}-l_{i-2}}{\lambda_{i-1}}+\frac{x-l_{i-1}}{\lambda_i}\right)+\frac{\lambda_y t_n}{\alpha_0}+\left(\frac{\lambda_y}{\alpha_n}+l_n\right)t_0\right)$$
$$\times\left(\frac{\lambda_y}{\alpha_0}+\frac{\lambda_y}{\alpha_n}+l_n\right)^{-1},\ (l_{i-1}\le x\le l_i;\, i=\overline{1,n}). \tag{18}$$

Отже, розподіл стаціонарного одновимірного температурного поля в багатошаровій конструкції при ідеальному тепловому контакті між шарами та заданому конвективному теплообміну на зовнішніх границях тіла, тобто умовах (4), має вигляд (18).

Розглянемо задачу теплопровідності (1), (3) або (4) при наявності **неідеального теплового контакту** між шарами, тобто замість умов (2) мають місце умови:

$$\lambda_i \frac{dT_i(l_i)}{dx} = \lambda_{i+1} \frac{dT_{i+1}(l_i)}{dx}; \qquad \lambda_i \frac{dT_i(l_i)}{dx} = \alpha_i \left[T_{i+1}(l_i) - T_i(l_i)\right]; \qquad (i = \overline{1, n-1}), \tag{19}$$

де α_i – коефіцієнт теплообміну між i та $i+1$ шарами. Приведемо умову (19) до умови ідеального теплового контакту (2). З цією метою кожний реальний шар, за винятком останнього, будемо збільшувати аналогічним матеріалом на величину Δl_i, $(i = \overline{1, n-1})$. Введемо нове позначення $l_1^* = l_1 + \Delta l_1$; $l_2^* = l_1^* + (l_2 - l_1) + \Delta l_2 = l_1 + \Delta l_1 + l_2 - l_1 + \Delta l_2 = l_2 + \Delta l_1 + \Delta l_2$;

$$l_{n-1}^* = l_{n-1} + \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_{n-1}; \qquad l_n^* = l_n + \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_{n-1}. \tag{20}$$

Отже, розширений шар лежить в межах $l_{i-1}^* \le x \le l_i^*$ або

$$l_{i-1} + \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_{i-1} \le x \le l_i + \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_{i-1} + \Delta l_i. \tag{21}$$

Із співвідношення (19) отримаємо, що

$$T_{i+1}(l_i) = T_i(l_i) + \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \frac{dT_i(l_i)}{dx}, \ (i = \overline{1, n-1}). \tag{22}$$

Кожний шар збільшуємо на таку величину Δl_i (рис. 2), щоб мала місце рівність

$$T_{i+1}(l_i) = T_i(l_i + \Delta l_i), \qquad (i = \overline{1, n-1}). \tag{23}$$

Враховуючи (22) та (23) отримаємо рівняння

$$T_i(l_i + \Delta l_i) = T_i(l_i) + \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \frac{dT_i(l_i)}{dx}, \qquad (i = \overline{1, n-1}). \tag{24}$$

В стаціонарному температурному полі розподіл температури в багатошаровому тілі змінюється по кусково лінійному закону, тобто $T_i(x) = C_{1i}x + C_{2i}$, $(i = \overline{1, n})$. Підставляючи дане рівняння в (24) отримаємо, що

$$C_{1i}(l_i + \Delta l_i) + C_{2i} = C_{1i} l_i + C_{2i} + \frac{\lambda_i}{\alpha_i} C_{1i}, \qquad (i = \overline{1, n-1}).$$

З даного рівняння визначаємо величину $\Delta l_i = \dfrac{\lambda_i}{\alpha_i}$ $(i = \overline{1, n-1})$, на яку необхідно збільшити кожний шар, щоб виконувалась умова (23). Отже, співвідношення (20) наберуть вигляду $l_1^* = l_1 + \dfrac{\lambda_1}{\alpha_1}$;

$$l_2^* = l_2 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}; \qquad l_{n-1}^* = l_{n-1} + \frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\alpha_{n-1}}; \tag{25}$$

$$l_n^* = l_n + \frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\alpha_{n-1}}.$$

Тепер умови неідеального теплового контакту (19) замінюємо умовами ідеального теплового контакту але в точках контакту розширених шарів, тобто

$$T_i(l_i^*) = T_{i+1}(l_i^*), \qquad \lambda_i \frac{dT_i(l_i^*)}{dx} = \lambda_{i+1} \frac{dT_{i+1}(l_i^*)}{dx} \qquad (i = \overline{1, n-1}). \tag{26}$$

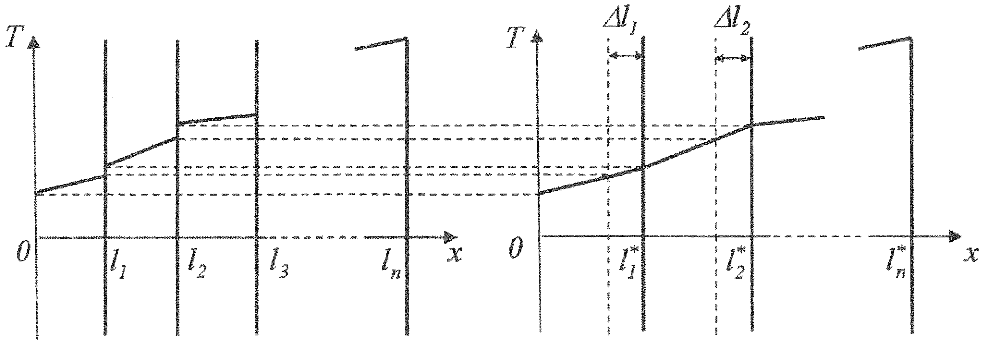

Рис. 2. Ілюстрація методу приведення від неідеального до ідеального теплового контакту між шарами в багатошаровій конструкції

Рівняння теплопровідності для i – ого шару залишиться без змін, тільки змінюються границі зміни координати x, тобто

$$\frac{d^2T_i(x)}{dx^2}=0,(i=\overline{1,n};l_{i-1}^*<x<l_i^*). \qquad (27)$$

Граничні умови (3), (4) наберуть вигляду

$$T_1(0)=t_0; \qquad T_n(l_n^*)=t_n \qquad (28)$$

та $$\lambda_1\frac{dT_1(0)}{dx}-\alpha_0\big(T_1(0)-t_0\big)=0; \qquad \lambda_n\frac{dT_n(l_n^*)}{dx}+\alpha_n\big(T_n(l_n^*)-t_n\big)=0. \qquad (29)$$

Використаємо результати розв'язування задачі теплопровідності (1) – (3) для даної задачі теплопровідності (26) –(28). Отже, приведений коефіцієнт теплопровідності, згідно формули (5), дорівнює

$$\frac{l_n^*}{\lambda_y}=\frac{l_1^*}{\lambda_1}+\frac{l_2^*-l_1^*}{\lambda_2}+\dots+\frac{l_n^*-l_{n-1}^*}{\lambda_n}. \qquad (30)$$

Розподіл стаціонарного температурного поля, використовуючи залежність (16), визначатиметься наступною формулою

$$T_i(x)=\frac{(t_n-t_0)\lambda_y}{l_n^*}\left(\frac{l_1^*}{\lambda_1}+\frac{l_2^*-l_1^*}{\lambda_2}+\dots+\frac{l_{i-1}^*-l_{i-2}^*}{\lambda_{i-1}}+\frac{x-l_{i-1}^*}{\lambda_i}\right)+t_0, \qquad (31)$$

$$(l_{i-1}^*\le x\le l_i^*;i=\overline{1,n}).$$

Оскільки реальні товщини шарів l_1, $l_2-l_1,\dots,$ l_n-l_{n-1}, то розподіл температурного поля для i – ого шару має вигляд (31), тільки границі зміни біжучої координати x в наступних межах $(l_{i-1}^*\le x\le l_i^*-\frac{\lambda_i}{\alpha_i};i=\overline{1,n})$.

Розглянемо задачу теплопровідності (1), при наявності неідеального теплового контакту між шарами (19), та заданого конвективного теплообміну на границях багатошарової конструкції за законом (4). Використовуючи результати попередньої задачі (20) – (25), умови неідеального теплового контакту між шарами замінюємо умовами ідеального теплового контакту (26). Граничні умови (4), враховуючи попередні результати, наберуть вигляду:

$$\lambda_y\frac{dT_1(0)}{dx_{1y}}-\alpha_0\big[T_1(0)-t_0\big]=0; \qquad \lambda_y\frac{dT_n(l_n^*)}{dx_{ny}}+\alpha_n\big[T_n(l_n^*)-t_n\big]=0, \qquad (32)$$

де λ_y визначається формулою (30). Використовуючи рівняння (12) та граничні умови (32) визначаємо сталі C_1 та C_2, тоді розподіл температурного поля в приведених координатах має вигляд:

$$T_i(x_{iy}) = \frac{(t_n - t_0)x_{iy} + t_0\left(\frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n^*\right) + t_n\frac{\lambda_y}{\alpha_0}}{\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n^*}, \quad (l_{i-1}^* \le x_{iy} \le l_i^*; i = \overline{1,n}) \tag{33}$$

Враховуючи залежності (6) та (28), які для даної задачі матимуть вигляд:

$$x_{iy} = \frac{\lambda_y}{\lambda_i}(x - l_{i-1}^*) + l_{i-1,y}^*, \quad (l_{i-1} \le x \le l_i; i = \overline{1,n}),$$

$$l_{i-1,y}^* = \frac{l_1^*\lambda_y}{\lambda_1} + \frac{(l_2^* - l_1^*)\lambda_y}{\lambda_2} + \dots + \frac{(l_{i-1}^* - l_{i-2}^*)\lambda_y}{\lambda_{i-1}}.$$

Підставляючи дані залежності в (33) отримаємо

$$T_i(x) = \left((t_n - t_0)\lambda_y\left(\frac{l_1^*}{\lambda_1} + \frac{l_2^* - l_1^*}{\lambda_2} + \dots + \frac{l_{i-1}^* - l_{i-2}^*}{\lambda_{i-1}} + \frac{x - l_{i-1}^*}{\lambda_i}\right) + \frac{\lambda_y t_n}{\alpha_0} + \left(\frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n^*\right)t_0\right) \times$$

$$\times\left(\frac{\lambda_y}{\alpha_0} + \frac{\lambda_y}{\alpha_n} + l_n^*\right)^{-1}, \qquad (l_{i-1}^* \le x \le l_i^*; i = \overline{1,n}). \tag{34}$$

Оскільки реальні товщини шарів $l_1, l_2 - l_1, \dots, l_n - l_{n-1}$, то розподіл температурного поля в i – ому шарі буде мати вигляд (34), але координата x змінюється в наступних межах $l_{i-1}^* \le x \le l_i^* - \frac{\lambda_i}{\alpha_i}, (i = \overline{1,n})$.

Висновок:

1. Запропонований метод розв'язування задачі визначення одномірного стаціонарного температурного поля в багатошаровій конструкції при ідеальному або неідеальному тепловому контакті між шарами та заданому на границях тіла температур гріючого середовища або конвективного теплообміну
2. отримані залежності для розрахунку температурного поля для n- шарової конструкції дає можливість дослідити величину температури в будь-якій точці конструкції.
3. Використовуючи отримані залежності можна розрахувати товщини шарів і вибрати такі матеріали. Що оптимально забезпечать необхідну межу вогнестійкості конструкції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Демчина Б.Г. Автореферат докторської дисертації. ХДТУБА., Харків, 2003. «Вогнестійкість одно-і багатошарових просторових конструкцій житлових та громадських будівель».

2. Половко А.П., Демчина Б.Г.,Фіцик В.С. Дослідження вогнестійкості фрагмента огороджувальної конструкції із застосуванням енергозберігаючих технологій. Вісник НУ «ЛП» Теорія і практика будівництва. –№600. –2007. – С. 251-254.

3. Боли Б., Уэйнер. Дж. Теория температурных напряжений. – М.: "Мир", 1964. – 518 с.

4. Кошмаров Ю. А. Теплотехника: учебник для вузов. – М.: ИКЦ "Академкнига", 2006. – 501 с.: ил.

5. Лыков Н.Н. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 559 с.