

*О. М. Уханська, канд. фіз-мат. наук, доцент (НУ «Львівська політехніка»)  
Н. О. Штангрет (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)*

### **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТРИВАЛОСТІ РУХУ ТА ПРОЙДЕНОГО ШЛЯХУ КРАПЕЛЬ ВОДНИХ ВОГНЕГАСНИХ РЕЧОВИН У ПРИМЩЕННІ ПІД ЧАС ПОЖЕЖІ**

У статті подано результати математичного моделювання визначення тривалості руху краплі та пройденого шляху до моменту торкання з горизонтальною площиною. Отримано числові значення часу та пройденого шляху до моменту торкання з горизонтальною площиною, виконано експериментальні дослідження визначення ефективного діаметра краплі. Із використанням отриманого ефективного значення діаметра краплі визначено ефективну масу краплі. Після визначення маси перейдено до визначення тривалості руху краплі та шляху який вона долає до торкання з горизонтальною площиною використовуючи математичну модель.

**Ключові слова:** математична модель, тривалість руху, ефективний діаметр краплі, пройдений шлях, вогнегасна речовина, ефективна маса.

*О. М. Ukhanska, N. O. Shtangret*

### **MATHEMATICAL MODEL FOR DETERMINING THE STEP TIME AND DISTANCE COVERED BY THE DROPLETS OF LIQUID FIRE-FIGHTING AGENT DURING THE PROCESS OF FIRE EXTINGUISHING IN THE CLOSED ROOM**

The article deals with the mathematical model for determining the step time and distance covered by the droplet of liquid till the moment of contact with the horizontal plane. Numerical values of the step time and distance covered till the moment of contact with the horizontal plane are obtained. Experimental studies aimed on determining the effective diameter of the droplet are performed. According to effective diameter value an effective mass of the droplet is determined. After obtaining the effective mass value the step time and distance covered by the droplet of liquid till the moment of contact with the horizontal plane are calculated using a mathematical model.

**Key words:** mathematical model, step time, effective diameter of a droplet, covered distance, fire-fighting agent, effective mass.

#### **Вступ**

Проблемі теплообміну крапель води з високотемпературним газовим середовищем присвячено низку теоретичних робіт [1-13]. Математичні моделі теплообміну, наведені в цих працях, розроблені з певними припущеннями. Так, в [1-3, 13] не враховано особливих властивостей продуктів горіння. У роботах [4-7, 14] наведені результати, отримані без урахування часу прогріву крапель до моменту їх інтенсивного випаровування. У [15] автори, використовуючи феноменологічний підхід, досліджують процес охолодження газу без урахування дисперсності в потоці крапель. Серед усіх наведених робіт в [9,10,16], розглянуто вплив дисперсності крапель розпорошеної води на охолодження продуктів горіння. У праці [1] подано результати дослідження динаміки охолодження газів краплями води для їх діаметрів в межах 200-2000 мкм. На відміну від результатів, отриманих у роботі [8], виявлено оптимальне значення діаметра крапель води, яке становить 700 мкм, і забезпечує максимальну інтенсивність відводу тепла, що погано корелює з практичною реалізованістю пристроями подачі води в сучасних пожежних автомобілях, де діаметр розпилюваних крапель доводять до 50 мкм і менше. Хоча в цілому всі наведені моделі якісно відображають фізичну сутність процесу охолодження продуктів горіння, проте цих результатів недостатньо для обґрунтування норм інтенсивності подачі тонкорозпиленої води. Тому розроблення математичної моделі для отримання залежності впливу дисперсності водних вогнегасних речовин на оптичну густину диму є важливою проблемою.

**Формулювання задачі:** Зараз широко застосовують, особливо при гасінні пожеж в міських умовах, тонке розпилення води. Однак обґрунтованих норм подачі тонко розпиленої води для практичного застосування не міститься в науково-технічній літературі і сучасних інструкціях. У зв'язку з цим перегляд існуючих норм подачі води в зону горіння стосовно до нових технологій пожежогасіння є актуальною задачею. Цю інтенсивність визначають ефективністю охолодження продуктів горіння розпорошеною водою.

Для розв'язання цієї задачі необхідно розробити математичну модель визначення тривалості руху та пройденого шляху водних вогнегасних речовин, що і є метою нашої роботи.

**Математична модель.** Як зазначено в роботах [14, 15, 16] та підтверджено теоретичними дослідженнями, оптимальним діаметром крапель для подачі тонко розпиленних водних вогнегасних речовин (далі ТРВВР) є діаметр від 300 до 400 мкм, що забезпечує найбільший коефіцієнт захоплення твердих частинок, тобто максимальну ефективність вологого очищення димових газів та зниження температури в різних точках струменя розпилення з форсунок.

Моделюємо краплю води матеріальною точкою, оскільки вона є малих розмірів  $d=371$  мкм з масою  $m$ . Розглядаємо рух матеріальної точки [17-20] на яку діють такі сили:  $\vec{P}$  – вага матеріальної точки,  $\vec{R}$  – сила опору рухові точки, обумовлена дією продуктів згорання і її величину описують залежністю  $R = kv$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності ( $k = 0,04$  кг/с),  $v$  – швидкість руху матеріальної точки.

За другим законом динаміки запишемо рівняння у векторній формі

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R},$$

проектуючи яке на осі координат, отримаємо

$$m\ddot{x} = -R \cos \varphi;$$

$$m\ddot{z} = -P - R \sin \varphi.$$

Враховуючи, що  $v = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$ , де  $v_x(t) = \dot{x}(t)$  – проекція швидкості руху краплі на вісь  $Ox$ ,  $v_z(t) = \dot{z}(t)$  – проекція швидкості руху краплі на вісь  $Oz$ ;  $\cos \varphi = \frac{v_x}{v}$  і  $\sin \varphi = \frac{v_z}{v}$ . Тоді система диференціальних рівнянь набуде такого вигляду:

$$m\ddot{x} = -kv_x;$$

$$m\ddot{z} = -P - kv_z,$$

або

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}; \tag{1}$$

$$m\ddot{z} = -P - k\dot{z}.$$

Розв'яжемо перше рівняння системи рівнянь (1) методом відокремлення змінних

$$\frac{m d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{k dt}{m}, \quad \int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{k}{m} \int dt, \quad \ln \dot{x}(t) = \ln C_1 - \frac{kt}{m}, \quad \dot{x}(t) = C_1 e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Сталу інтегрування  $C_1$  визначаємо з початкової умови  $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$ , де  $v_0$  – початкова швидкість матеріальної точки,  $\alpha$  – кут між напрямком початкової швидкості точки і горизонтальною площиною в момент вильоту матеріальної точки з отвору. У результаті отримаємо, що  $C_1 = v_0 \cos \alpha$ . Отже, закон зміни проекції швидкості матеріальної точки відносно осі  $Ox$  матиме вигляд

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-\frac{kt}{m}}. \tag{2}$$

Інтегруючи диференціальне рівняння (2), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{kt}{m}}, \quad dx = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-\frac{kt}{m}} dt, \quad \int dx = v_0 \cos \alpha \int e^{-\frac{kt}{m}} dt,$$

$$x(t) = C_2 - \frac{mv_0}{k} \cos \alpha \cdot e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Сталу інтегрування  $C_2$  визначаємо з початкової умови  $x(0) = 0$  у вигляді  $C_2 = \frac{mv_0}{k} \cos \alpha$ . Отже, закон руху матеріальної точки відносно осі  $Ox$  матиме вигляд

$$x(t) = \frac{mv_0}{k} \cos \alpha \cdot \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right).$$

Розв'язуючи рівняння  $m\ddot{z} = -P - kv_z$  методом відокремлення змінних отримуємо

$$\frac{md\dot{z}}{dt} = -P - k\dot{z}, \quad \frac{md\dot{z}}{mg + k\dot{z}} = -dt, \quad \ln(mg + k\dot{z}) = -\frac{kt}{m} + \ln C_3, \quad \dot{z}(t) = \frac{C_3}{k} e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}.$$

Сталу інтегрування  $C_3$  визначаємо з початкової умови  $\dot{z}(0) = v_0 \sin \alpha$  у вигляді  $C_3 = mg + kv_0 \sin \alpha$ . Отже, закон зміни швидкості матеріальної точки відносно осі  $Oz$  матиме вигляд

$$\dot{z}(t) = \frac{mg + kv_0 \sin \alpha}{k} e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}.$$

Інтегруючи це рівняння отримаємо

$$\int dz = \int \left( \frac{mg + kv_0 \sin \alpha}{k} e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \right) dt, \quad z(t) = C_4 - \frac{(mg + kv_0 \sin \alpha)m}{k^2} e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} t.$$

Сталу величину  $C_4$  визначаємо з початкової умови  $z(0) = h$ , де  $h$  – висота на якій розташована матеріальна точка в момент вильоту, у вигляді  $C_4 = h + \frac{(mg + kv_0 \sin \alpha)m}{k^2}$ .

Отже, закон руху матеріальної точки відносно осі  $Oz$  матиме вигляд

$$z(t) = h + \frac{(mg + kv_0 \sin \alpha)m}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) - \frac{mg}{k} t.$$

Виконавши певні математичні перетворення отримаємо трансцендентне рівняння для визначення тривалості руху краплі  $t_k$

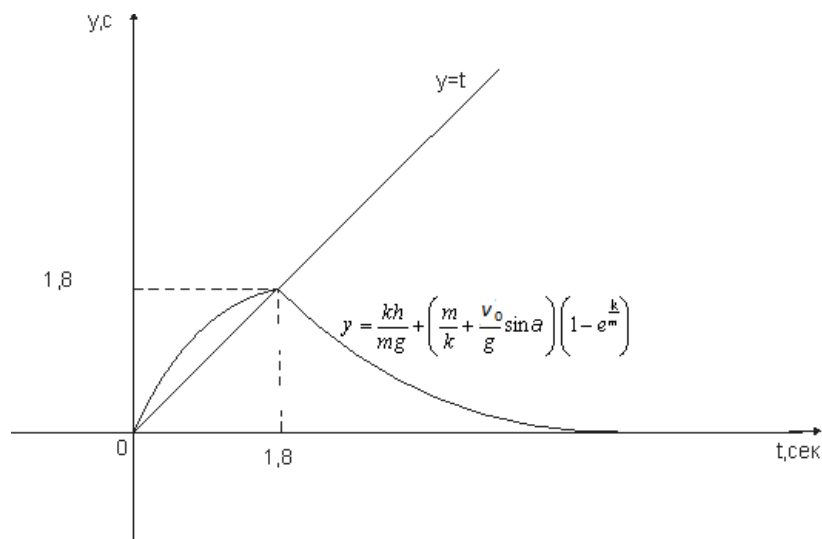
$$h + \frac{(mg + kv_0 \sin \alpha)m}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{kt_k}{m}}\right) - \frac{mg}{k} t_k = 0. \quad (3)$$

Оскільки в математичній моделі присутня маса краплі, то для її визначення проведено експериментальні дослідження які дали змогу отримати значення діаметра краплі. На основі проведених раніше досліджень, обґрунтовано, що найефективнішим результатом буде діаметр краплі при значеннях тиску  $P=4$  кг.с/см<sup>2</sup> та діаметра форсунки  $d=3,5$  мм. Із використанням цього значення діаметра краплі визначено її масу, яка дорівнює  $25,02 \cdot 10^{-9}$  кг [21].

Це рівняння перепишемо у вигляді

$$t_k = \left(\frac{kh}{mg}\right) + \left(\frac{m}{k} + \frac{v_0}{g} \sin \alpha\right) \left(1 - e^{-\frac{kt_k}{m}}\right)$$

та розв'яжемо його методом простої ітерації. Розв'язками цього рівняння будуть  $t_k=0$  с та  $t_k=1,8$  с.



**Рисунок 1.** Графічне зображення розв'язування трансцендентного рівняння для знаходження часу долання шляху до моменту торкання з горизонтальною площиною

Після цього визначаємо шлях  $S(t)$ , який долає крапля до торкання з горизонтальною площиною за формулою

$$S(t) = \int_0^{t_k} \sqrt{v_0^2 e^{-\frac{2kt}{m}} + \frac{m^2 g^2}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)^2 - \frac{2v_0 m g \sin \alpha}{k} e^{-\frac{kt}{m}} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)} dt \quad (4)$$

У правій частині формули (4) міститься означений інтеграл який обчислимо за методом Сімпсона і отримаємо таке значення:  $S(1,8 \text{ с}) = 2,78 \text{ м}$ . Кількість розбиттів відрізка  $[0; 1,8]$  дорівнює 9, що дає змогу одержати числове значення інтегралу з точністю  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

#### Висновки:

1. Розроблено математичну модель визначення тривалості руху краплі та пройденого шляху до моменту торкання з горизонтальною площиною.
2. Для отримання числових значень тривалості руху краплі та пройденого шляху до моменту торкання з горизонтальною площиною виконано експериментальні дослідження із визначення ефективного діаметра краплі.
3. Із використанням отриманого ефективного значення діаметра краплі визначено ефективну масу краплі, яку змодельовано кулею.
4. Із використанням ефективного значення маси краплі визначено числові значення тривалості руху краплі та пройденого шляху до моменту торкання з горизонтальною площиною.

#### Список літератури:

1. Провести исследования и разработать исходные требования на новые виды пожарных машин и оборудования (Гидравлическое оборудование): Заключительный отчет / ВНИИПО МВД СССР; руководитель В.Л. Варганов. – № ГР 01890030326. – М., 1988. – 232 с.
2. Провести исследование по определению области применения тонкораспыленной (перегретой) воды и разработать рекомендации по тактике пожаротушения: Заключительный отчет / ВНИИПО МВД СССР; руководитель И.Ф. Безродный. – М., 1990. – 115 с.
3. R. Natarajan, A.K. Ikosh. Dynamics of Vaporizing Drops Injected into Stagnant Gas // 2-Phase Momentum, Heat and Mass Transfer in Chemical Processes and Energy Engineering Systems. Ed. Durst et al. – 1979. – Vol. 1. – P. 133-144.
4. Gogos G., AYGASVAMY P.S. A Model for the Evaporation of a Slowly Moving Drop // Combustion and Flame. – 1988. – Vol. 74, N 2. – P. 111-119.
5. Dumarque P, Audebert P. Evaporation convective d'une particule spherique liquide a faible nombre de Reynolds dans un gaz a haute temperature // Ann. Phys. (Fr). – 1988. – Vol. 13, N 3. Collouque N2. – P. 81-88.

6. Дикий Н.А., Мочалов А.Н., Павлищев В.И. и др. Исследование процессов тепло- и массообмена с учётом пограничного слоя испаряющейся капли на релаксационном участке // Труды НКИ, – 1975. – №97.
7. S.K. Lee., T.J. Chung. Axisymmetric Unsteady Droplet Vaporisation and Gas Temperature Distribution // Trans ASME. J. Heat Transfer. – 1989. – Vol. 3, N 2. – P. 487-494.
8. Кухно А.Н., Фёдоров А.П., Абрамов В.С. Тепломассообмен потока капель в горячем воздухе // Пожаротушение. – М., 1986. – С. 9-17.
9. L.M. Pietrzfk, G.A. Iohanson. Directions for Improving Manual Fire Suppression Using a Physically Based Computer Simulation // Fire Technology. – 1986. – Vol. 22. – № 3.
10. L.M. Pietrzfk, J.A. Ball. Investigation to Improve the Effectiveness of Water in the Suppression of Compartment Fires // Fire Research. – 1978. – Vol. 1. – P. 291-300.
11. Дикий Н.А., Мочалов А.А., Павлищев В.И., Шевцов А.П. Методика расчёта контактного теплообменного аппарата с учётом полидисперсности распыла жидкости // Труды НКИ. – 1975. – № 100.
12. Козлюк А.И. Водоснабжение угольных шахт для борьбы с пожарами и пылью. – М.: Недра. – 287 с.
13. Безродный И.Ф., Пучков С.И., Филиппов В.Д. Расчёты траектории испаряющейся капли в среде с пространственно-неоднородными свойствами // Проблемы пожарной безопасности зданий и сооружений. – М.: ВНИИПО МВД СССР, 1990. С. 184-185.
14. Дикий Н.А., Мочалов А.А., Павлищев В.И., Шевцов А.П. Методика расчёта контактного теплообменного аппарата с учётом полидисперсности распыла жидкости // Труды НКИ. – 1975. – № 100.
15. Козлюк А.И. Водоснабжение угольных шахт для борьбы с пожарами и пылью. – М.: Недра. – 287 с.
16. Виноградов А.Г. Методика расчета экранирующих свойств водяных завес / А.Г. Виноградов // Пожаровзрывобезопасность. – 2014. – Т. 23, № 1. – С. 45-57.
17. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. Пособие для втузов. В 3-х т. Т. II. Динамика. – 8-у изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1991. – 640 с. – ISBN 5-02-014451-7.
18. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1986. – 416с.
19. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К: Техніка, 2002. – 512 с.
20. Божидарнік В. В., Величко Л. Д. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки: Навчальний посібник. – Луцьк: Надстир'я, 2003. 496 с.
21. Луц В.И., Штангрет Н.О. «Экспериментальные исследования по определению дисперсности капель тонко-распыленных водных огнетушащих веществ при распылении форсунки в лабораторных условиях». Сборник тезисов и докладов VI Международной научно-практической конференции адъюнктов, магистрантов, курсантов и студентов «Исторические аспекты, актуальные проблемы и перспективы развития гражданской обороны» 15 марта.

#### References:

1. Provesti issledovaniya i razrabotat' iskhodnyye trebovaniya na novyye vidy pozharnykh mashin i oborudovaniya (Gidravlicheskiye oborudovaniye): Zaklyuchitel'nyy otchet / VNIPO MVD SSSR; rukovoditel' V.L. Varganov. – № GR 01890030326. – М., 1988. – 232 с.
2. Provesti issledovaniye no opredeleniyu oblasti primeneniya tonkoraspylennoy (peregretoy) vody i razrabotat' rekomendatsii po taktike pozharotusheniya: Zaklyuchitel'nyy otchet / VNIPO MVD SSSR; rukovoditel' I.F. Bezrodnyy. – М., 1990. – 115 с.
3. R. Natarajan, A.K. Ikosh. Dynamics of Vaporizing Drops Injected into Stagnant Gas // 2-Phase Momentum, Heat and Mass Transfer in Chemical Processes and Energy Engineering Systems. Ed. Durst et al. – 1979. – Vol. 1. – P. 133-144.
4. Gogos G., Aygasvamy P.S. A Model for the Evaporation of a Slowly Moving Drop // Combustion and Flame. – 1988. – Vol. 74, N 2. – P. 111-119.

5. Dumarque P, Audebert P. Evaporation convective d'une particule spherique liquide a faible nombre de Reynolds dans un gaz a haute temperature // Ann. Phys. (Fr).– 1988. – Vol. 13, N 3. Collouque N2. – P. 81-88.

6. Dikiy H.A., Mochalov A.N., Pavlishchev V.I. i dr. Issledovaniye protsessov teplo- i massoobmena s uchotom pogranichnogo sloya ispariyayushchey krapli na relaksatsionnom uchastke // Trudy NKI, – 1975. – №97.

7. S.K. Lee., T.J. Chung. Axisymmetric Unsteady Droplet Vaporisation and Gas Temperature Distribution // Trans ASME. J. Heat Transfer. – 1989. – Vol. 3, N 2. – P. 487-494.

8. Kukhno A.H., Fodorov A.P., Abramov B.C. Teplomassoobmen potoka kapel' v goryachem vozdukh // Pozharotusheniye. – M., 1986. – S. 9-17.

9. L.M. Pietrzfk, G.A. Iohanson. Directions for Improving Manual Fire Suppression Using a Physically Based Computer Simulation // Fire Technology. – 1986. – Vol. 22. – № 3.

10. L.M. Pietrzfk, J.A. Ball. Investigation to Improve the Effectiveness of Water in the Suppression of Compartment Fires // Fire Research. – 1978. – Vol. 1. – P. 291-300.

11. Dikiy H.A., Mochalov A.A., Pavlishchev V.I., Shevtsov A.P. Metodika raschota kontaktnogo teploobmennogo apparata s uchotom polidispersnosti raspyla zhidkosti // Trudy NKI. – 1975. – № 100.

12. Kozlyuk A.I. Vodosnabzheniye ugol'nykh shakht dlya bor'by s pozharami i pyl'yu. – M.: Nedra. – 287 s.

13. Bezrodnyy I.F., Puchkov S.I., Filippov V.D. Raschoty trayektorii ispariyayushchey krapli v srede s prostranstvenno-neodnorodnymi svoystvami // Problemy pozharnoy bezopasnosti zdaniy i sooruzheniy. – M.: VNIPO MVD SSSR, 1990. S. 184-185.

14. Dikiy H.A., Mochalov A.A., Pavlishchev V.I., Shevtsov A.P. Metodika raschota kontaktnogo teploobmennogo apparata s uchotom polidispersnosti raspyla zhidkosti // Trudy NKI. – 1975. – № 100.

15. Kozlyuk A.I. Vodosnabzheniye ugol'nykh shakht dlya bor'by s pozharami i pyl'yu. – M.: Nedra. – 287 s.

16. Vinogradov A.G. Metodika rascheta ekraniruyushchikh svoystv vodyanykh zaves / A.G. Vinogradov // Pozharovzryvobezopasnost'. – 2014. – T. 23, № 1. – S. 45-57.

17. Bat' M.I., Dzhanelidze G.YU., Kel'zon A.S. Teoreticheskaya mekhanika v primerakh i zadachakh: Ucheb. Posobiye dlya vtuzov. V 3-kh t. T. II. Dinamika. – 8-u izd. ,pererab. – M.: Nauka. Gl. red. Fiz.-mat. Lit., 1991. – 640 s. – ISBN 5-02-014451-7.

18. Targ S.M. Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki. – M.: V'issh. shk., 1986. – 416s.

19. Pavlov'skiy M.A. Teoretichna mekhanika: Pidruchnik. – K: Tekhnika, 2002. – 512 s.

20. Bozhidarnik V. V., Velichko L. D. Metodika rozv'yazuvannya i zbirnik zadach z teoretichnoi mekhaniki: Navchal'niy posibnik. – Luts'k: Nadstir'ya, 2003. 496 s.

21. Lushch V.I., Shtangret N.O. «Eksperimental'nyye issledovaniya po opredeleniyu dispersnosti kapel' tonko-raspylennykh vodnykh oagnetushashchikh veshchestv pri raspyleanii for-sunki v laboratornykh usloviyakh.». Sbornik tezisov i dokladov VI Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii ad'yunktov, magistrantov, kursantov i studentov «Istoricheskiye aspekty, aktual'nyye problemy i perspektivy razvitiya grazhdanskoy oborony» 15 marta.

