

Р.М. Тацій¹, д-р фіз.-мат. наук, професор, О.Ю. Пазен¹, Т.І. Ушак², канд. техн. наук
(¹Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, ²ТОВ «Левадія-Проект»)

ЗАГАЛЬНА ТРЕТЯ КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З КУСКОВО-СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ВНУТРІШНІМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Розглядається проблема розв'язування нестационарних задач теорії теплопровідності в багатошаровій плоскій стінці за умов ідеального теплового контакту між шарами, наявністю внутрішніх джерел тепла та за умов реальної пожежі на одній із зовнішніх поверхонь стінки. Розв'язок такої задачі отримуємо для довільної кількості шарів в замкненій формі. На основі програмного середовища Maple 13 створено алгоритм програми, який дозволяє швидко та без особливих ускладнень знаходити розподіл нестационарного температурного поля у вигляді явних функцій, таблиць та графіків. Розглянуто конкретний приклад розрахунку розподілу температурного поля реальної п'ятишарової плоскої стінки з підігрівом («стелі-підлоги») за умов пожежі на нижньому суміжному поверсі.

Ключові слова: мішана задача теплопровідності, внутрішні джерела тепла, задача на власні значення, метод Фур'є та власних функцій.

Р.М. Тацій, О.Ю. Пазен, Т.І. Ушак

ОБЩАЯ ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Рассматривается проблема решения нестационарных задач теории теплопроводности в многослойной плоской стенке в условиях идеального теплового контакта между слоями, наличием внутренних источников тепла, и в условиях реального пожара на одной из внешних поверхностей стенки. Решение такой задачи получаем для произвольного количества слоев в замкнутой форме. На основе программной среды Maple 13 создан алгоритм программы, который позволяет быстро и без особых осложнений находить распределение нестационарного температурного поля в виде явных функций, таблиц и графиков. Рассмотрен конкретный пример расчета распределения температурного поля реальной пятислойной плоской стенки с подогревом («потолка-пола») в условиях пожара на нижнем смежном этаже.

Ключевые слова: смешанная задача теплопроводности, внутренние источники тепла, задача на собственные значения, метод Фурье и собственных функций.

R.M. Tatsij, O.Y. Pazen, T.I. Ushak

GENERAL THIRD BOUNDARY PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION WITH PIECEWISE CONSTANT AND INTERNAL HEAT SOURCES

The problem of solving the problems of the theory of non-stationary heat conduction in multilayer flat wall under conditions of perfect thermal contact between layers by internal heat sources and through real fire on one of the external surfaces of the walls. Solution of this problem we obtain for any number of layers in a closed form. Based on the software environment Maple 13 program created algorithm that allows fast and without much difficulty finding distribution unsteady temperature field in the form of explicit functions, tables and graphs. The concrete example of the calculation of temperature field distribution of real double-wall flat wall heating ("floor-ceiling") under fire in an adjacent lower floor.

Keywords: mixed problem of heat conduction, internal heat source, eigenvalue problem, the method of Fourier and eigenfunctions.

Постановка задачі та основні позначення

Розглядається мішана задача для рівняння теплопровідності

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\right) + q_v(x) \quad (1)$$

з крайовими умовами третього роду

$$\begin{cases} \alpha_0 t(x_0, \tau) - t^{[1]}(x_0, \tau) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n t(x_n, \tau) + t^{[1]}(x_n, \tau) = \alpha_n \psi_n(\tau), \end{cases} \quad (2)$$

де, $t^{[1]} \stackrel{df}{=} \lambda t'_x$ – квазіпохідна ($t^{[1]} = -q$ – густина теплового потоку),

за початкової умови

$$t(x, 0) = \varphi(x). \quad (3)$$

Нехай $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ довільне розбиття проміжку $[x_0 = 0, x_n = l]$ дійсної осі OX на n шарів різної товщини. Кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності $[\lambda]$, питомою теплоємністю $[c]$, густиною $[\rho]$ та внутрішнім джерелом тепла $[q_v]$. Між шарами закладено умови ідеального теплового контакту. Будемо вважати, що температура в плиті поширюється лише в напрямку осі ox , тобто задача про дослідження теплообміну є одновимірною.

Зауважимо, що $\psi_0(\tau)$ і $\psi_n(\tau)$ – температура навколишнього середовища за межами приповерхневих теплових шарів, а α_0 та α_n – відповідні коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $x = x_0$ та $x = x_n$.

Припустимо що, $\lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i$, $c(x) \cdot \rho(x) = r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i$, $\lambda_i, r_i > 0 \in R$,
 $q_v(x) = \sum_{i=0}^{n-1} q_{vi} \theta_i$, $-\infty < q_{vi} < +\infty$, $\forall i = \overline{0, n-1}$. Тут, θ_i – характеристична функція напіввідкрито

того проміжку $[x_i, x_{i+1})$, тобто $\theta_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } ox \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, \text{ якщо } ox \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}$.

Слідуючи, наприклад [1, 2], шукатимемо розв'язок задачі (1), (2), (3) у вигляді суми двох функцій (метод редукції)

$$t(x, \tau) = u(x, \tau) + v(x, \tau). \quad (4)$$

Будь-яку з функцій u чи v можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

Крайова задача для функції $u(x, \tau)$ та мішана задача для $v(x, \tau)$

Визначимо функцію $u(x, \tau)$ як розв'язок (квазістаціонарної) крайової задачі

$$(\lambda u')' + q_v = 0, \quad (5)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 u(x_0) - u^{[1]}(x_0) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n u(x_n) + u^{[1]}(x_n) = \alpha_n \psi_n(\tau). \end{cases} \quad (6)$$

Тут позначено $u^{[1]}(x_i) \stackrel{df}{=} \lambda u'(x_i)$.

На основі зображення (4) перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$r \frac{\partial u}{\partial \tau} + r \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x}\right) + q_v. \quad (7)$$

Якщо взяти до уваги, що $u(x, \tau)$ є розв'язком задачі (5), (6), то в (7) слід підставити, що $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q_v \equiv 0$, і ми прийдемо з (7) до неоднорідного диференціального рівняння на функцію $v(x, \tau)$

$$r \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) - r \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (8)$$

Зауважимо, що функцію $-r \frac{\partial u}{\partial \tau}$ в правій частині (8) вважатимемо відомою, бо відомою вважатимемо функцію $u(x, \tau)$, яку знайдемо далі, як розв'язок задачі (5), (6). Оскільки функція $u(x, \tau)$ справджує крайові умови (6), то із зображення (4) впливають крайові умови для функції $v(x, \tau)$

$$\begin{cases} \alpha_0 v(x_0, \tau) - v^{[1]}(x_0, \tau) = 0, \\ \alpha_n v(x_n, \tau) + v^{[1]}(x_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

а початкова умова набуває вигляду

$$v(x, 0) = f(x) \equiv \varphi(x) - u(x, 0). \quad (10)$$

Отже за умови, що розв'язок $u(x, \tau)$ задачі (5), (6) відомий, функція $v(x, \tau)$ є розв'язком мішаної задачі (8), (9), (10).

Розв'язання крайової задачі (5),(6)

Метод побудови розв'язку задачі (5), (6) детально вивчено та описано в праці [3]. На кожному з проміжків цей розв'язок зображується у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x, \tau) \theta_i = (1 \quad 0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \bar{U}_i(x, \tau) \theta_i = \\ &= (1 \quad 0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[B_i(x, x_i) B(x_i, 0) \cdot P_0 - B_i(x, x_i) \cdot \sum_{k=0}^i B(x_i, x_k) \cdot \bar{Z}_k - \int_{x_i}^x B_i(x, s) \cdot \bar{R}_i(s) ds \right] \theta_i \end{aligned} \quad (11)$$

де позначено

$$\begin{aligned} \bar{P}_0 &= [P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} \cdot \left[\bar{\Gamma} - Q \cdot \sum_{i=1}^n B(x_n, x_i) \cdot \bar{Z}_i \right], \quad B_i(x, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_i}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B(x_i, x_k) &= \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=k}^{i-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \psi_0(\tau) \\ \alpha_n \psi_n(\tau) \end{pmatrix}, \\ \bar{Z}_i &= \begin{pmatrix} \frac{q_{v(i-1)}}{2\lambda_{i-1}} (x_i - x_{i-1})^2 \\ q_{v(i-1)} (x_i - x_{i-1}) \end{pmatrix}, \quad \bar{Z}_0 = \bar{0}, \quad \int_{x_i}^x B_i(x, s) \cdot \bar{R}_i(s) ds = \begin{pmatrix} \frac{q_{vi}}{2\lambda_i} (x - x_i)^2 \\ q_{vi} (x - x_i) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Побудова розв'язку $v(x, \tau)$ мішаної задачі (8),(9),(10)

Методику розв'язання задачі (8), (9), (10) детально описано в статті [4]. Розв'язок мішаної задачі (8), (9), (10) отримуємо у вигляді ряду

$$v(x, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x, \tau) \cdot \theta_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot X_{ki}(x, \omega_k) \right\} \cdot \theta_i. \quad (12)$$

Тут ω_k – корені характеристичного рівняння відповідної задачі на власні значення, що визначаються з рівності

$$\det(P + Q \cdot \bar{B}(x_n, x_0, \omega)) = 0,$$

$$\text{де, } \bar{B}(x_k, x_j, \omega) = \prod_{i=j}^{k-1} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{r_i \omega}{\lambda_i}}(x_{i+1} - x_i) & \frac{\sin \sqrt{\frac{r_i \omega}{\lambda_i}}(x_{i+1} - x_i)}{\lambda_i \alpha_i} \\ -\lambda_i \alpha_i \sin \sqrt{\frac{r_i \omega}{\lambda_i}}(x_{i+1} - x_i) & \cos \sqrt{\frac{r_i \omega}{\lambda_i}}(x_{i+1} - x_i) \end{pmatrix};$$

$X_{ki}(x, \omega_k)$ - i -та складова власної функції $X_k(x, \omega_k)$ на проміжку $[x_i, x_{i+1}]$

$$X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x, \omega_k) \theta_i$$

$$X_{ki}(x, \omega_k) = (1, 0) \cdot \tilde{B}_i(x, x_i, \omega_k) \cdot \tilde{B}(x_i, x_0, \omega_k) \cdot (\alpha_0^{-1}, 1)^T, \quad i = \overline{0, n-1};$$

f_k – коефіцієнти Фур'є розвинення початкової умови за власними функціями $X_k(x, \omega_k)$

$$f_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x) X_{ki}(x, \omega_k) dx, \quad \|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x, \omega_k) dx;$$

$u_k(s)$ - коефіцієнти Фур'є розвинення функції $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ за власними функціями $X_k(x, \omega_k)$;

$$u_k(s) = \frac{1}{\|X_k\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u_i(x, s)}{\partial s} X_{ki}(x, \omega_k) dx.$$

Враховуючи (11) та (12), отримуємо розв'язок (4) задачі (1), (2), (3)

$$t(x, \tau) = u(x, \tau) + v(x, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} [u_i(x, \tau) + v_i(x, \tau)] \theta_i.$$

Приклад

П'ятишарова плоска стінка («стеля-підлога») складається з вапняно-піщаного розчину, бетонної плити перекриття, ніздрюватого бетону, цементно-піщаної стяжки з підігрівом та керамічної плитки. На зовнішніх поверхнях стінки відбувається конвекційний теплообмін з навколишнім середовищем. Необхідно визначити розподіл нестационарного температурного поля п'ятишарової плоскої стінки, якщо з лівої сторони температура змінюється за законом $\psi_0(\tau) = 345 \lg \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 10$. В початковий момент часу температура стінки на лівій стороні становить $10^0 C$, а на правій $20^0 C$. Теплофізичні параметри матеріалів [5] та закон зміни температури наведено в таблиці 1.

Враховуючи внутрішнє джерело тепла (підігрів підлоги) в цементно-піщаній стяжці, знайдемо початковий розподіл температурного поля $\varphi(x)$ (рис. 1) п'ятишарової «стелі-підлоги», за умов, що на лівій стороні стінки температура становить $10^0 C$, а на правій $20^0 C$.

Таблиця 1

| Параметр | Вапняно-піщаний розчин | Бетонна плита перекриття | Ніздрюватий бетон | Цементно-піщана стяжка (з підігрівом) | Керамічна плитка |
|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-------------------|---------------------------------------|------------------|
| Товщина [м] | 0,05 | 0,2 | 0,03 | 0,06 | 0,01 |
| Коефіцієнт теплопровідності $[\lambda] = \frac{Вт}{м \cdot К}$ | 0,76 | 1,92 | 0,09 | 0,7 | 0,96 |
| Питома теплоємність $[c_p] = \frac{Дж}{кг \cdot К}$ | 840 | 840 | 840 | 840 | 880 |
| Густина $[\rho] = \frac{кг}{м^3}$ | 1800 | 2500 | 300 | 1600 | 2000 |
| Внутрішні джерела тепла $[q_v] = \frac{Вт}{м^3}$ | - | - | - | 200 | - |
| Закони зміни температур | $\psi_0(\tau) = 345 \lg \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 10,$ $\psi_n(\tau) = 20$ | | | | |
| Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $[\alpha] = \frac{Вт}{м^2 \cdot К}$ | $\alpha_0 = 25, \alpha_n = 10$ | | | | |

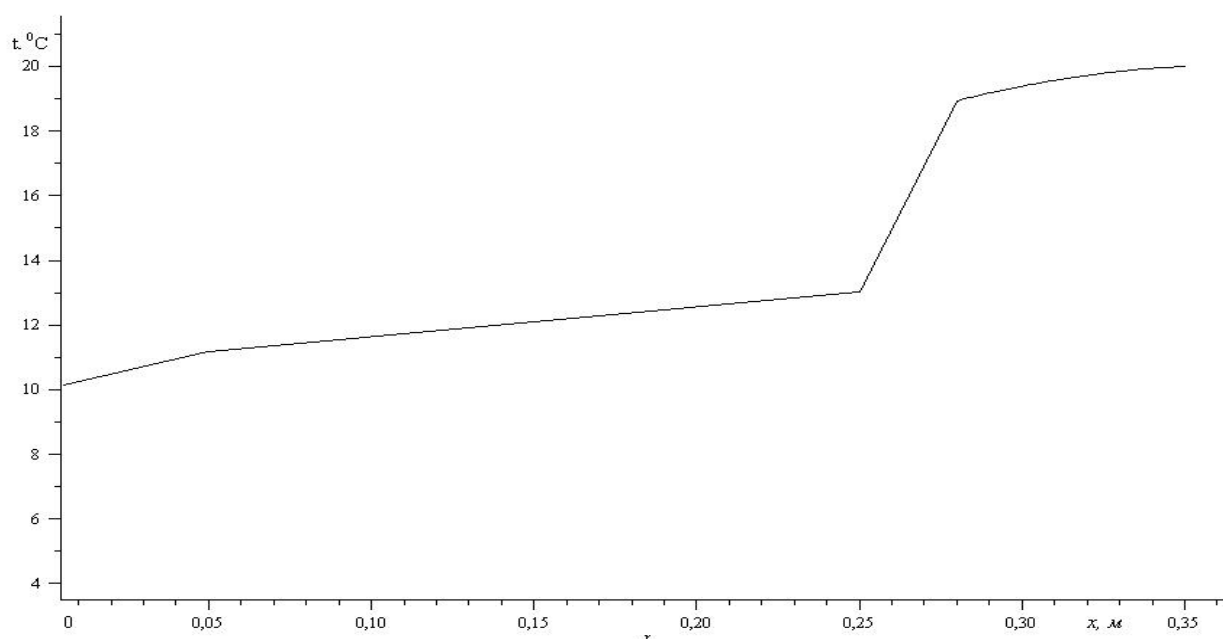


Рис.1. Початковий розподіл температурного поля в'ятишарової плоскої стінки

Отримавши всі вихідні дані та використавши програмне забезпечення Maple 13, отримуємо розв'язок задачі про визначення нестационарного температурного поля у вигляді таблиці (табл. 2) та графіків (рис. 2 та рис.3).

Аналіз таблиці 2 та графічної залежності (рис. 2 та рис.3) дає можливість оцінити вогнестійкість стінки за умов пожежі, оскільки показує чітку зміну температури протягом часу.

Таблиця 2

| τ, t | середовище | 0 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | середовище |
|-----------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|------------|
| 0 | 10 | 10.06 | 11.17 | 11.62 | 12.09 | 12.55 | 13.01 | 19.38 | 19.98 | 20 |
| 1800 | 831.62 | 445.20 | 55.32 | 16.96 | 12.43 | 12.57 | 13.01 | 19.32 | 19.81 | 20 |
| 3600 | 935.14 | 579.86 | 130.98 | 46.64 | 19.62 | 13.74 | 13.25 | 19.27 | 19.74 | 20 |
| 5400 | 995.78 | 658.12 | 194.41 | 85.49 | 36.50 | 19.29 | 15.61 | 19.26 | 19.70 | 20 |
| 7200 | 1038.82 | 713.03 | 246.82 | 124.32 | 58.83 | 30.08 | 22.15 | 19.48 | 19.72 | 20 |
| 9000 | 1072.22 | 755.57 | 291.36 | 160.90 | 83.63 | 45.24 | 33.20 | 20.17 | 19.88 | 20 |
| 10800 | 1099.51 | 790.50 | 330.22 | 195.02 | 109.47 | 63.62 | 48.01 | 21.48 | 20.30 | 20 |
| 12600 | 1122.59 | 820.26 | 364.89 | 226.94 | 135.65 | 84.22 | 65.63 | 23.49 | 21.09 | 20 |
| 14400 | 1142.58 | 846.31 | 396.40 | 257.02 | 161.84 | 106.29 | 85.23 | 26.22 | 22.29 | 20 |
| 16200 | 1160.21 | 869.56 | 425.46 | 285.59 | 187.83 | 129.26 | 106.13 | 29.63 | 23.90 | 20 |
| 18000 | 1175.99 | 890.65 | 452.58 | 312.86 | 213.48 | 152.72 | 127.84 | 33.65 | 25.90 | 20 |
| 19800 | 1190.26 | 910.01 | 478.13 | 339.03 | 238.74 | 176.39 | 150.01 | 38.20 | 28.27 | 20 |

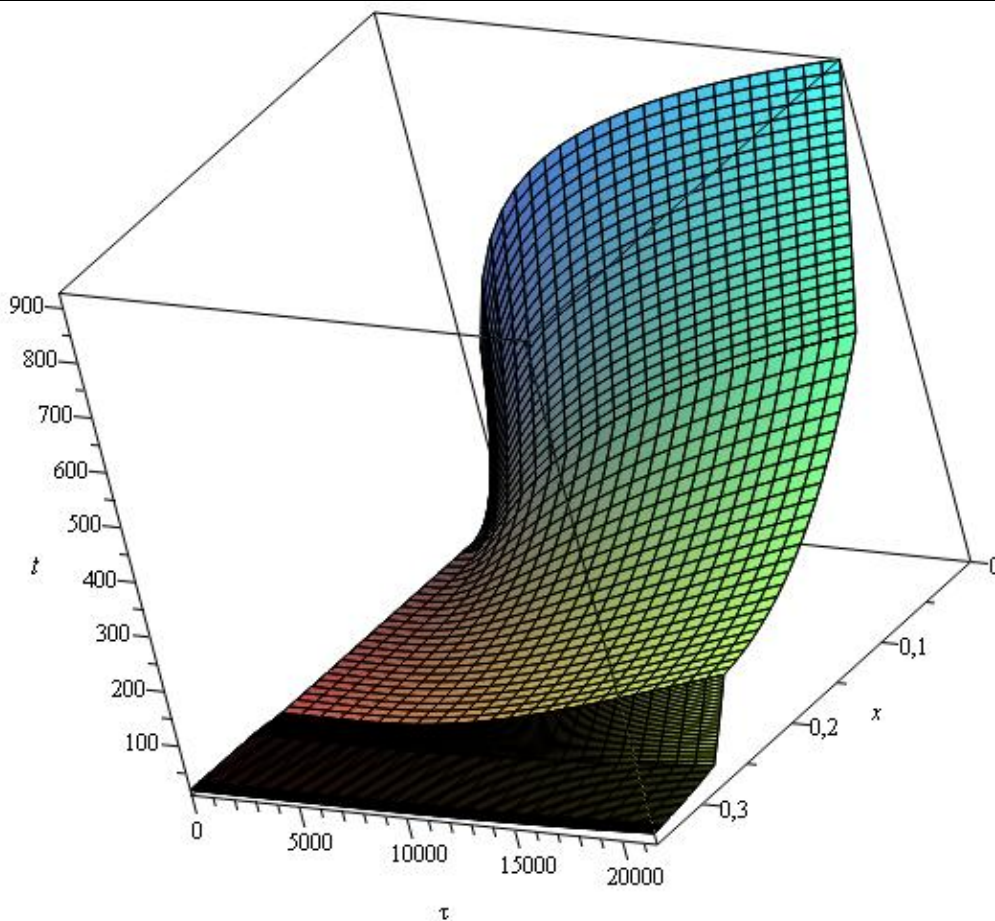


Рис. 2. Розподіл нестационарного температурного поля п'ятишарової плоскої стінки у вигляді 3D-графіка

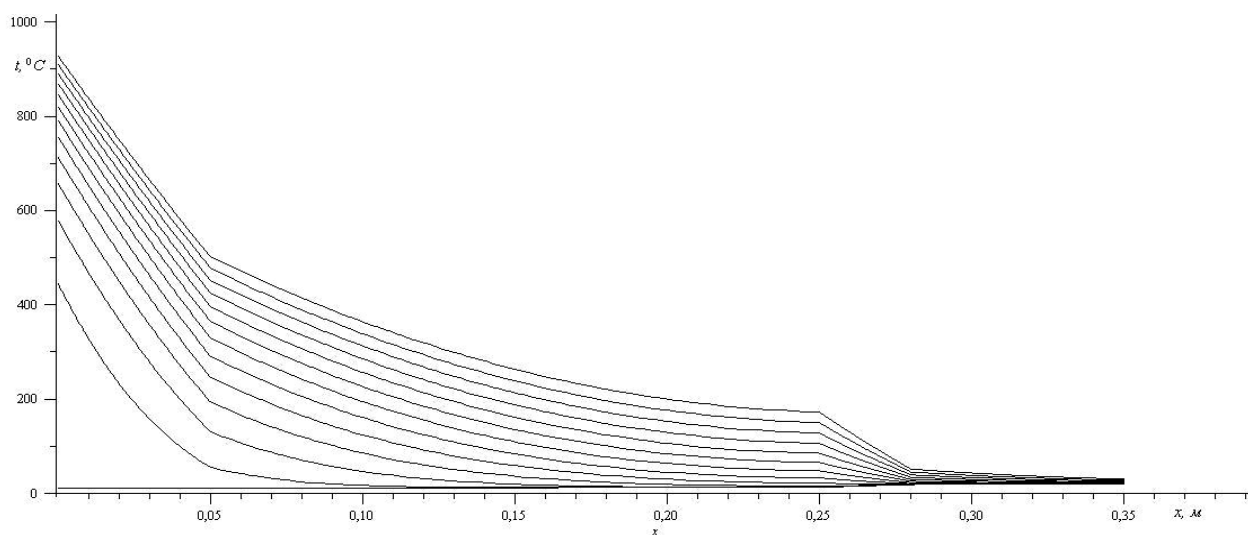


Рис. 3. Розподіл нестационарного температурного поля п'ятишарової плоскої стінки
Примітка: В часовому вимірі «відстань» між сусідніми кривими дорівнює 1800 с.
 (нижня крива відповідає часу $\tau = 0$)

Висновок

Запропоновано та обґрунтовано прямий метод розв'язування нестационарної мішаної задачі для рівняння теплопровідності за умов ідеального теплового контакту між шарами, наявності внутрішніх джерел тепла та умов конвекційного теплообміну на поверхнях.

Теорема про розвинення за власними функціями адаптована для випадку рівнянь з кусково-сталеними (за просторовою змінною) коефіцієнтами та правих частин.

Отримано явні формули для обчислення температури, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву 1-го роду згаданих вище коефіцієнтів.

На завершення розглянуто конкретний приклад розрахунку розподілу температурного поля реальної п'ятишарової плоскої стінки з підігрівом («стелі-підлоги») за умов пожежі на нижньому суміжному поверсі.

Список літератури

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики/ В.Я. Арсенин –М.: Наука, 1974. –432 с.
2. Тихонов А.Н., Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский –М.: Наука, 1977. –735 с.
3. Тацій Р.М. Визначення теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом тепла / Тацій Р.М., Кусій М.І., Пазен О.Ю. // Пожежна безпека. Зб.наук.пр. ЛДУ БЖД. – 2012. – №20. – С.20-26.
4. Тацій Р.М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами / Тацій Р.М., Власій О.О., Стасюк М.Ф. // Вісник національного університету «Львівська політехніка» фіз.-мат. науки. – 2014. – №804. – С.64-69.
5. ДБН В.2.6-31:2006 Теплова ізоляція будівель.

References

1. Arsenin, V.Ya. (1974) *Metody matematicheskoi fizyky* [Methods of Mathematical physics], Nauka, Moscow, USSR.
2. Tihonov, A.N. and Samarskii, A.A. (1977) *Uravnenie matematicheskoi fizyky* [Mathematical physics equation] Nauka, Moscow, USSR.
3. Tatsii, R.M., Kusij, M.I., Pazen, O.U. (2012) «Research of heat exchange in multi-layer endless plate from discretely continuous heat distribution», *Journal "Fire safety"* vol. 20, pp. 20-26.
4. Tatsii, R.M., Stasiuk, M.F., Vlasii, O.O. (2014). «Total first boundary value problem for the heat equation with piecewise variable coefficients», *Journal of National University "Lviv Polytechnic" Physics and mathematics* vol. 804, pp. 64-69.
5. DBN V.2.6.-31:2006 «Thermal insulation of buildings».