УДК 517.912

Р.М. Тацій, *д-р фіз.-мат. наук, професор,* ***О.Ю. Пазен***
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

ПРЯМИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЗА УМОВ ПОЖЕЖІ

Запропоновано та обґрунтовано нову схему розв'язування мішаної задачі для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами при загальних умовах третього роду. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні процесу теплопередачі в багатошаровій плиті за умов ідеального теплового контакту між шарами та наявності конвекційного теплообміну на їх поверхнях. В основу цієї схеми покладено метод редукції, концепцію квазіпохідних, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, метод Фур'є та метод власних функцій. Наведено приклад розрахунку температурного поля чотиришарової стінки за умов реальної пожежі.

Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є та власних функцій.

Р.М. Таций, О.Ю. Пазен

ПРЯМОЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ УСЛОВИЯХ ПОЖАРА

Предложено и обосновано новую схему решения мешанной задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами при условиях третьего рода. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании процесса теплопередачи в многослойной плите в условиях идеального теплового контакта между слоями и наличия конвекционного теплообмена на их поверхностях. В основу этой схемы положен метод редукции, концепция квазипроизводных, современную теорию систем линейных дифференциальных уравнений, метод Фурье и метод собственных функций. Приведен пример расчета температурного поля четырехслойной стенки в условиях реального пожара.

Ключевые слова: квазидифференциальное уравнение, краевая задача, матрица Коши, задача на собственные значения, метод Фурье и собственных функций.

R.M. Tatsiy, O.Y. Pazen

DIRECT METHOD OF CALCULATION UNSTEADY TEMPERATURE FIELD IN A FIRE

In this paper we propose and justify a new scheme for solving the mixed problem for the heat equation with piecewise continuous coefficients in the general conditions of the third kind. The results can be used in the study of the process of heat transfer in multilayer plate under conditions of perfect thermal contact between the layers and the presence of convective heat transfer on their surfaces. The basis of this scheme on the method of reduction, quasi derivates concept, the modern theory of linear differential equations, Fourier method and the method of their own functions. An example of the calculation of temperature field four-wall through real fire.

Keywords: quasi derivates equation boundary problem, the Cauchy matrix, eigenvalue problem, the method of Fourier and eigenfunctions.

Постановка задачі та основні позначення

В прямокутній декартові системі координат oxyz розглядається нескінченна плита товщиною l, тобто $[1]$ область, що обмежена площинами $x = x_0 = 0$ і $x = x_n = l$. Ця область поділена площинами $x = x_1, x = x_2, ...x = x_{n-1}$, на n шарів різної товщини. Кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності, питомою теплоємністю та густиною. Між шарами закладені умови ідеального теплового контакту. Будемо вважати, що температура в плиті поширюється лише в напрямку осі ox, тобто задача про дослідження теплообміну є одновимірною. У випадку конвекційного теплообміну на зовнішніх поверхнях плити, така задача зводиться до розв'язування на відрізку $[0,l]$ диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_0 t(0,\tau) - t^{[1]}(0,\tau) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n t(x_n,\tau) + t^{[1]}(x_n,\tau) = \alpha_n \psi_n(\tau), \end{cases} \tag{2}$$

при початковій умові

$$t(x,0) = \varphi(x). \tag{3}$$

Зауважимо, що $\psi_0(\tau)$ і $\psi_n(\tau)$ - температура навколишнього середовища за межами приповерхневих теплових шарів, а α_0 та α_n відповідні коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $x = x_0$ та $x = x_n$.

Надалі використовуватимемо такі позначення: θ_i – характеристична функція напіввідкритого проміжку $[x_i, x_{i+1})$, тобто, $\theta_i = \begin{cases} 1, \text{якщо } x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, \text{якщо } x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}$,

$$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x)\theta_i, \quad r(x) = c(x)\cdot\rho(x) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(x)\theta_i,\ \lambda_i, r_i > 0 \in R, \quad \forall i = \overline{0, n-1}$$

$\lambda t' \overset{df}{=} t^{[1]}$ – квазіпохідна, $-t^{[1]} = q$ – густина теплового потоку.

Слідуючи, наприклад, $[2,3]$, шукатимемо розв'язок задачі (1), (2), (3) у вигляді суми двох функцій (метод редукції)

$$t(x,\tau) = u(x,\tau) + v(x,\tau). \tag{4}$$

Будь-яку з функцій u чи v можна вибрати спеціальним чином, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

Вибір функції $u(x,\tau)$ та мішана задача для $v(x,\tau)$.

Визначимо функцію $u(x,\tau)$ як розв'язок (квазістаціонарної) крайової задачі

$$(\lambda u')' = 0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 u(0) - u^{[1]}(0) = \alpha_0 \psi_0(\tau), \\ \alpha_n u(x_n) + u^{[1]}(x_n) = \alpha_n \psi_n(\tau). \end{cases} \tag{6}$$

Тут позначено $u^{[1]}(x_i) \overset{df}{=} \lambda' u'(x_i)$.

На основі зображення (4) перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$r\frac{\partial u}{\partial \tau}+r\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (7)$$

Якщо взяти до уваги, що $u(x,\tau)$ є розв'язком задачі (5), (6), то в (7) слід покласти $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)\equiv 0,$ і ми прийдемо із (7) до неоднорідного диференціального рівняння на функцію $v(x,\tau)$

$$r\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right)-r\frac{\partial u}{\partial \tau}. \qquad (8)$$

Зауважимо, що функцію $-r\frac{\partial u}{\partial \tau}$ в правій частині (8) вважатимемо відомою, бо відомою вважатимемо функцію $u(x,\tau)$, яку знайдемо як розв'язок задачі (5), (6) далі. Оскільки функція $u(x,\tau)$ справджує крайові умови (6), то із зображення (4) випливають крайові умови для функції $v(x,\tau)$

$$\begin{cases}\alpha_0 v(0,\tau)-v^{[1]}(0,\tau)=0,\\ \alpha_n v(x_n,\tau)+v^{[1]}(x_n,\tau)=0,\end{cases} \qquad (9)$$

а початкова умова набуває вигляду

$$v(x,0)=f(x)=\varphi(x)-u(x,0). \qquad (10)$$

Отже за умови, що розв'язок $u(x,\tau)$ задачі (5),(6) – відомий, функція $v(x,\tau)$є розв'язком мішаної задачі (8),(9),(10).

Розв'язання крайової задачі (5),(6).

При розв'язанні задачі (5), (6) будемо дотримуватись концепції квазіпохідних $[4,5]$.

Введемо квазіпохідну $u^{[1]}\overset{df}{=}\lambda u'$, вектор $\bar{u}=\left(u,\quad u^{[1]}\right)^T$ та матрицю $A(x)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\lambda}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Тоді квазідиференціальне рівняння (5), як легко переконатись, зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\bar{u}'=A\bar{u}. \qquad (11)$$

Крайові умови (6) також запишемо у векторній формі $[4]$

$$P\cdot\bar{u}(x_0)+Q\cdot\bar{u}(x_n)=\bar{\Gamma}(\tau), \qquad (12)$$

де P і Q – квадратні матриці вигляду:

$$P=\begin{pmatrix}\alpha_0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha_n & 1\end{pmatrix}, \qquad (13)$$

а вектор $\bar{\Gamma}(\tau)$ має вигляд $\bar{\Gamma}(\tau)=\left(\alpha_0\psi_0(\tau),\quad \alpha_n\psi_n(\tau)\right)^T$.

Під розв'язком системи (11) розуміємо абсолютно неперервну на проміжку $[x_0,x_n]$ вектор-функцію $\bar{u}(x)$, що справджує цю систему майже всюди.

На кожному з проміжків $[x_i,x_{i+1})$ система (11) має вигляд

$$\overline{u}_i' = A_i \overline{u}_i, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_i(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриця Коші [5] $B_i(x,s)$ системи (14) має вигляд

$$B_i(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

де
$$b_i(x,s) = \int_s^x \lambda_i^{-1}(r)\,dr. \tag{16}$$

Для довільного $k \geq i$ позначимо

$$B(x_k, x_i) \overset{df}{=} B_{k-1}(x_k, x_{k-1}) \cdot B_{k-2}(x_{k-1}, x_{k-2}) \cdots B_i(x_{i+1}, x_i). \tag{17}$$

При цьому вважатимемо, що $B(x_k, x_k) = E$, де $E-$одинична матриця розміру 2×2.

Структура (15) матриць $B_k(x,s)$ дає можливість встановити структуру матриць (17), а саме

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{m=i}^{k-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В роботі $[5]$ встановлено, що на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1})$ розв'язок задачі (11),(12) має вигляд

$$\overline{u}_i(x,\tau) = B_i(x, x_i) \cdot B(x_i, x_0) \cdot \overline{P}_0(\tau), \tag{19}$$

де
$$\overline{P}_0(\tau) = \left(P + Q \cdot B(x_n, x_0)\right)^{-1} \cdot \overline{\Gamma}(\tau), \tag{20}$$

а матриці P і Q визначені в (13).

На основі формул (15), (16) ,(18) та (20), після елементарних перетворень, з формули (19)) отримаємо зображення вектор-функції $\overline{u}_i(x,\tau)$

$$\overline{u}_i(x,\tau) = \frac{\alpha_0\alpha_n}{\Delta} \begin{pmatrix} \psi_0(\tau)\sigma_n + \dfrac{\psi_n(\tau)}{\alpha_0} + \dfrac{\psi_0(\tau)}{\alpha_n} + (\psi_n(\tau) - \psi_0(\tau))\left(\dfrac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i\right) \\ \psi_n(\tau) - \psi_0(\tau) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

де $\sigma_i = \sum\limits_{m=0}^{i-1} b_m(x_{m+1}, x_m), \quad \sigma_0 \overset{df}{=} 0, \ \Delta = \alpha_0 + \alpha_n + \sigma_n\alpha_0\alpha_n.$

Перша координата вектора $\overline{u}_i(x,\tau)$ в (21) і є шуканою функцією $u_i(x,\tau)$. Отже

$$u_i(x,\tau) = \frac{\alpha_0\alpha_n}{\Delta}\left(\psi_0(\tau)\sigma_n + \frac{\psi_n(\tau)}{\alpha_0} + \frac{\psi_0(\tau)}{\alpha_n} + (\psi_n(\tau) - \psi_0(\tau))\left(\frac{x - x_i}{\lambda_i} + \sigma_i\right)\right). \tag{22}$$

Вираз (22) дає можливість записати розв'язок на всьому проміжку $[x_0, x_n]$ з допомогою характеристичних функцій θ_i у вигляді

$$u(x,\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x,\tau)\theta_i. \tag{23}$$

Метод Фур'є та задача на власні значення

Розвинення за власними функціями

Будемо шукати нетривіальні частинні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$r\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{24}$$

що справджує крайові умови (9), у вигляді $[2]$

$$v(x,\tau)=e^{-\omega\tau}\cdot X(x), \tag{25}$$

де $\omega-$ параметр, а $X(x)-$поки що невідома функція.

Підставляючи праву частину (25) в (24) приходимо до квазідиференціального рівняння

$$(\lambda X')'+\omega r X=0 \tag{26}$$

при крайових умовах

$$\begin{cases}\alpha_0 X(0)-X^{[1]}(0)=0,\\ \alpha_n X(x_n)+X^{[1]}(x_n)=0.\end{cases} \tag{27}$$

Задача (26),(27)$-$класична задача на власні значення, властивості власних значень ω_k та власних функцій $X_k(x,\omega_k)$ якої вичерпно вивчені і детально описані, наприклад, в $[2]$.

Так, зокрема, розвинення функції $g(x)$ з «певного класу» в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ задачі (26), (27) має вигляд

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\cdot X_k(x,\omega_k), \tag{28}$$

де коефіцієнти Фур'є g_k обчислюють за формулами

$$g_k=\frac{1}{\|X_k\|^2}\cdot\int_{x_0}^{x_n}g(x)\cdot X_k(x,\omega_k)\cdot r(x)dx. \tag{29}$$

Зауважимо, що $\|X_k\|^2-$квадрат норми власної функції X_k

$$\|X_k\|^2=\int_{x_0}^{x_n}X_k^2(x,\omega_k)r(x)dx. \tag{30}$$

Уточнимо, які ж функції $g(x)$ належать до «певного класу». Вважатимемо, що $g(x)-$ абсолютно неперервна функція, яка має різні аналітичні вирази на кожному з проміжків $[x_i,x_{i+1})$, тобто допускає зображення

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}g_i\theta_i \tag{31}$$

на проміжку $[x_0,x_n]$.

Функції вигляду (31) додаються, множаться та інтегруються таким чином (див. [7,8]): якщо $g_1(x)=\sum_{i=1}^{n}g_{1i}\theta_i,\quad g_2(x)=\sum_{i=1}^{n}g_{2i}\theta_i$, то

$$g_1\pm g_2=\sum_{i=1}^{n}(g_{1i}\pm g_{2i})\theta_i,\quad g_1\cdot g_2=\sum_{i=1}^{n}(g_{1i}\cdot g_{2i})\theta_i, \tag{32}$$

$$\int_{x_0}^{x_n}g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot r(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_0}^{x_n}g_{1i}(x)\cdot g_{2i}(x)\cdot r_i(x)dx, \tag{33}$$

$$\left\|g_k\right\|^2=\int_{x_0}^{x_n} g_k^2(x) r(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_0}^{x_n} g_{ki}^2(x) r_i(x)\,dx, \quad k=\overline{1,\infty}. \tag{34}$$

Вирази (33), (34) можна інтерпретувати як скалярний добуток функцій $g_1(x)$ і $g_2(x)$ та квадрат норми функції $g_k(x)$ відповідно з вагою $r(x)$.

Покладемо

$$X_k(x,\omega_k)=\sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x,\omega_k)\theta_i\,. \tag{35}$$

Тоді для коефіцієнтів Фур'є g_k з розвинення (28) та для квадратів норми функцій $X_k(x)$ з формул (29) і (30) отримаємо

$$g_k=\frac{1}{\left\|X_k\right\|^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x)\cdot X_{ki}(x,\omega_k)\cdot r_i(x)\,dx,$$

$$\left\|X_k\right\|^2=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x,\omega_k)\cdot r_i(x)\,dx.$$

Конструктивна побудова власних функцій

Ввівши квазіпохідну $X^{[1]}\overset{df}{=}\lambda X',$ вектор $\overline{X}=\left(X, \quad X^{[1]}\right)^T$ та матрицю $\widetilde{A}(x)=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\lambda}\\ -\omega r & 0\end{pmatrix},$ зведемо квазідиференціальне рівняння (26) до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{X}'=\widetilde{A}\overline{X}\,. \tag{36}$$

Відповідну систему на проміжку $\left[x_i, x_{i+1}\right)$запишемо у вигляді

$$\overline{X}'_i=\widetilde{A}_i\cdot\overline{X}_i, \quad i=\overline{0,n-1}, \tag{37}$$

де матриці $\widetilde{A}_i$ вигляду $\widetilde{A}_i(x)=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\lambda_i}\\ -\omega r_i & 0\end{pmatrix}.$

Матрицю Коші системи (37) позначимо $\widetilde{B}_i(x,s,\omega)$. Аналогічно, як і в формулі (17), запишемо

$$\widetilde{B}(x_i,x_0,\omega)\overset{df}{=}\prod_{j=0}^{i}\widetilde{B}_{i-j}\left(x_{i-j+1},x_{i-j},\omega\right). \tag{38}$$

Позначимо також

$$\widetilde{B}(x,x_0,\omega)\overset{df}{=}\sum_{i=0}^{n-1}\widetilde{B}_i(x,x_i,\omega)\cdot\widetilde{B}(x_i,x_0,\omega)\cdot\theta_i, \tag{39}$$

$$\widetilde{B}(x_n,x_0,\omega)\overset{df}{=}\begin{pmatrix}b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega)\\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega)\end{pmatrix}. \tag{40}$$

Нетривіальний розв'язок $\overline{X}(x,\omega)$ системи (36) шукаємо у вигляді

$$\overline{X}(x,\omega)=\widetilde{B}(x,x_0,\omega)\cdot\overline{C}, \tag{41}$$

де $\overline{C}=\left(C_1, \quad C_2\right)^T$ – деякий ненульовий вектор.

Застосувавши до обидвох частин рівності (41) крайові умови у формі (12), при $\overline{\Gamma}(\tau)\equiv 0,$ отримаємо:

$$P\cdot\overline{X}\left(x_0,\omega\right)+Q\cdot\overline{X}\left(x_n,\omega\right)=\left[P\cdot\widetilde{B}\left(x_0,x_0,\omega\right)+Q\cdot\widetilde{B}\left(x_n,x_0,\omega\right)\right]\cdot\overline{C}=\overline{0},$$

або, зауваживши, що $B\left(x_0,x_0,\omega\right)=E,$ де $E-$ одинична матриця, прийдемо до рівності

$$\left[P+Q\cdot\widetilde{B}\left(x_n,x_0,\omega\right)\right]\cdot\overline{C}=\overline{0}. \qquad (42)$$

Для існування ненульового вектора $\overline{C}$ в (42) необхідно і достатньо виконання умови

$$\det\left[P+Q\cdot\widetilde{B}\left(x_n,x_0,\omega\right)\right]=0. \qquad (43)$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (43), зваживши на формули (13) та (40)

$$\det\left[P+Q\cdot\widetilde{B}\left(x_n,x_0,\omega\right)\right]=\det\left[\begin{pmatrix}\alpha_0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha_n & 1\end{pmatrix}\cdot\widetilde{B}(x_n,0,\omega)\right]=0\,.$$

Отже ми отримали результат, який сформулюємо у вигляді

Твердження 1. Характеристичне рівняння задачі на власні значення (26), (27) має вигляд

$$\det\left[\begin{pmatrix}\alpha_0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha_n & 1\end{pmatrix}\cdot\widetilde{B}(x_n,0,\omega)\right]=0\,. \qquad (44)$$

Як відомо$\left[2\right]$, корені ω_k характеристичного рівняння (44), які є власними значеннями задачі (26), (27), є додатними та різними.

Для знаходження ненульового вектора $\overline{C}=\left(C_1,\quad C_2\right)^T$ підставимо в рівність (43) ω_k замість ω. Тоді прийдемо до векторної рівності

$$\left[\begin{pmatrix}\alpha_0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha_l & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}(\omega_k) & b_{12}(\omega_k)\\ b_{21}(\omega_k) & b_{22}(\omega_k)\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha_0 & -1\\ (\alpha_l b_{11}(\omega_k)+b_{21}(\omega_k)) & (\alpha_l b_{12}(\omega_k)+b_{22}(\omega_k))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

яка еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha_0 C_1-C_2=0,\\ (\alpha_l b_{11}(\omega_k)+b_{21}(\omega_k))\cdot C_1+(\alpha_l b_{12}(\omega_k)+b_{22}(\omega_k))\cdot C_2=0.\end{cases} \qquad (45)$$

Оскільки визначник цієї системи дорівнює нулеві, то система (45) має ненульові розв'язки $C_1\neq 0,\quad C_2\neq 0\in\mathbb{R}$. Поклавши, наприклад $C_2=1,$ маємо $\overline{C}=\left(\dfrac{1}{\alpha_0},\quad 1\right)^T$.

Позначивши нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k, $\overline{X}_k\left(x,\omega_k\right)$, отримуємо

Твердження 2. Власні вектори системи диференціальних рівнянь (36) за крайових умов у формі (12), при $\overline{\Gamma}\left(\tau\right)\equiv 0,$ мають таку структуру:

$$\overline{X}_k\left(x,\omega_k\right)=\widetilde{B}\left(x,x_0,\omega\right)\cdot\left(\frac{1}{\alpha_0},\quad 1\right)^T,\quad k=1,2,3,.....$$

Наслідок. Власні функції $X_k\left(x,\omega_k\right)$, як перші координати власних векторів $\overline{X}_k\left(x,\omega_k\right)$, можна записати у вигляді:

$$X_k\left(x,\omega_k\right)=\left(1,\quad 0\right)\cdot\widetilde{B}\left(x,x_0,\omega_k\right)\cdot\left(\frac{1}{\alpha_0},\quad 1\right)^T,\quad k=1,2,3,.... \qquad (46)$$

Зокрема, оскільки $X_k\left(x,\omega_k\right)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}X_{ki}\left(x,\omega_k\right)\theta_i,$ то з (46) випливає, що

$$X_{ki}\left(x,\omega_k\right)=\left(1,\quad 0\right)\cdot\widetilde{B}_i\left(x,x_i,\omega_k\right)\cdot\widetilde{B}\left(x_i,x_0,\omega_k\right),\quad i=\overline{0,n-1}. \tag{47}$$

Побудова розв'язку $v\left(x,\tau\right)$ мішаної задачі (8),(9),(10)

Для розв'язання задачі **(**8), (9), (10) застосуємо метод власних функцій $\left[3\right]$, який полягає в тому, що розв'язок задачі **(**8), (9), (10) шукаємо у вигляді

$$v\left(x,\tau\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(\tau\right)\cdot X_k\left(x,\omega_k\right), \tag{48}$$

де $T_k\left(\tau\right)-$ невідомі функції, які визначимо далі.

Диференціюючи функцію $u\left(x,\tau\right)$ за змінною τ , з формул (22), (23) отримуємо

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{\alpha_0\alpha_n}{\Delta}\left(\psi_0'\left(\tau\right)\sigma_n+\frac{\psi_n'\left(\tau\right)}{\alpha_0}+\frac{\psi_0'\left(\tau\right)}{\alpha_n}+(\psi_n'\left(\tau\right)-\psi_0'\left(\tau\right))\left(\frac{x-x_i}{\lambda_i}+\sigma_i\right)\right)\right]\cdot\theta_i.$$

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial\tau}$ входить в праву частину рівняння (8), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями (46) крайової задачі (26), (27)

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left(\tau\right)\cdot X_k\left(x,\omega_k\right), \tag{49}$$

причому змінна τ грає роль параметра.

Підставивши (48) у (8) з урахуванням розвинення (49), отримаємо рівність

$$r\left(x\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(\tau)\cdot X_k\left(x,\omega_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(\tau\right)\cdot\left(\lambda X_k'\left(x,\omega_k\right)\right)'-r\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left(\tau\right)\cdot X_k\left(x,\omega_k\right).$$

Враховуючи тотожність $\left(\lambda X_k{}'\right)'+\omega_k r\left(x\right)X_k\equiv 0,$ прийдемо до рівності

$$r\left(x\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(\tau)\cdot X_k\left(x,\omega_k\right)=-r\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k T_k X_k-r\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left(\tau\right)X_k,$$

яка після скорочення на $r\left(x\right)\neq 0$ набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k{}'\left(\tau\right)+\omega_k T_k\left(\tau\right)+u_k\left(\tau\right)\right]\cdot X_k\left(x,\omega_k\right)=0. \tag{50}$$

Прирівнюючи коефіцієнти Фур'є ряду (50) до нуля, прийдемо до диференціальних рівнянь

$$T_k{}'\left(\tau\right)+\omega_k T_k\left(\tau\right)+u_k\left(\tau\right)=0,\quad k=1,2,3,.... \tag{51}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (51) при кожному k має вигляд

$$T_k\left(t\right)=C_k\cdot e^{-\omega_k\tau}-\int_0^{\tau}e^{-\omega_k(\tau-s)}\cdot u_k\left(s\right)ds, \tag{52}$$

де C_k- невідомі сталі.

Для їх визначення зауважимо, що функцію $f\left(x\right)$ з початкової умови (10) також можна розвинути в ряд Фур'є за власними функціями (46) крайової задачі (26), (27), тобто

$$v\left(x,0\right)=f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k X_k\left(x,\omega_k\right), \tag{53}$$

де f_k- відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (52) випливає, що

$$T_k\left(0\right)=C_k, \tag{54}$$

а з зображення (48) маємо

$$v(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\cdot X_k. \tag{55}$$

Порівнюючи (53), (54) і (55), доходимо висновку, що $C_k = f_k$.

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (8), (9),(10) у вигляді ряду

$$v(x,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k\cdot e^{-\omega_k\tau}-\int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)}u_k(s)ds\right]\cdot X_k(x,\omega_k)=\sum_{i=0}^{n-1} v_i(x,\tau)\cdot\theta_i, \tag{56}$$

де

$$v_i(x,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k\cdot e^{-\omega_k\tau}-\int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)}u_k(s)ds\right]\cdot X_{ki}(x,\omega_k), \tag{57}$$

а функції $X_{ki}(x,\omega_k)$ визначені формулами (47).

Врахувавши (23), отримаємо розв'язок (4) задачі (1), (2) , (3)

$$t(x,\tau)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[u_i(x,\tau)+v(x,\tau)\right]\cdot\theta_i, \tag{58}$$

в якому функції $u_i(x,\tau)$ та $v(x,\tau)$ визначені формулами (22) , (56) і (57) відповідно.

Приклад

Чотиришарова плоска стінка складається з вапняної штукатурки, цегляної кладки, пінопласту та вапняної штукатурки. На поверхні стінки відбувається конвекційний теплообмін з навколишнім середовищем. Необхідно визначити розподіл нестаціонарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки, якщо з лівої сторони температура змінюється за законом $\psi_0(\tau)=345\lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right)+20$. В початковий момент часу температура стінки становить 20^0C. Теплофізичні параметри матеріалів та закон зміни температури наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Параметр	**Вапняна штукатурка**	**Цегляна кладка**	**Пінопласт**	**Вапняна штукатурка**
Товщина [м]	0,05	0,25	0,1	0,03
Коефіцієнт теплопровідності $[\lambda]=\frac{Вт}{м\cdot К}$	0,7	0,455	0,041	0,7
Питома теплоємність $\left[c_p\right]=\frac{Дж}{кг\cdot К}$	837	840	1340	837
Густина $[\rho]=\frac{кг}{м^3}$	1600	1580	100	1600
Початковий розподіл температури [*f*(*x*)]	20	20	20	20
Закони зміни температур	$\psi_0(\tau)=345\lg\left(1+\frac{8\tau}{60}\right)+20$, $\psi_n(\tau)=20$			
Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $[\alpha]=\frac{Вт}{м^2\cdot К}$	$\alpha_0=25$, $\alpha_n=10$			

Використавши програмне забезпечення Maple 13 отримуємо розв’язок даної задачі у вигляді таблиці (табл. 2) та графіка (рис. 1).

Аналіз графічної залежності (рис. 1) показує чітку зміну температури по товщині стінки зі зміною часу, що дає можливість оцінити вогнестійкість стінки за умов пожежі.

Таблиця 2

τ,ℓ	**сере- дови- ще**	**0**	**0,05**	**0,1**	**0,15**	**0,2**	**0,25**	**0,3**	**0,35**	**0,43**	**сере- редо дови ви- ще**
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
600	678.5	287.6	72.0	23.9	21.3	20	20	20	20	20	20
1800	841.7	480.3	225.3	98.2	22.2	20.5	20	20	20	20	20
3600	945.1	628.4	385.4	226.7	44.0	21.8	20	20	20	20	20
5400	1006.	721.8	495.8	331.9	84.9	28.6	20.5	20.1	20	20	20
7200	1049.	789.	578.4	415.8	131.9	41.5	20.5	20.1	20	20	20
10800	1110.	884.6	698.	542.6	224.7	82.0	22.6	20.1	20	20	20

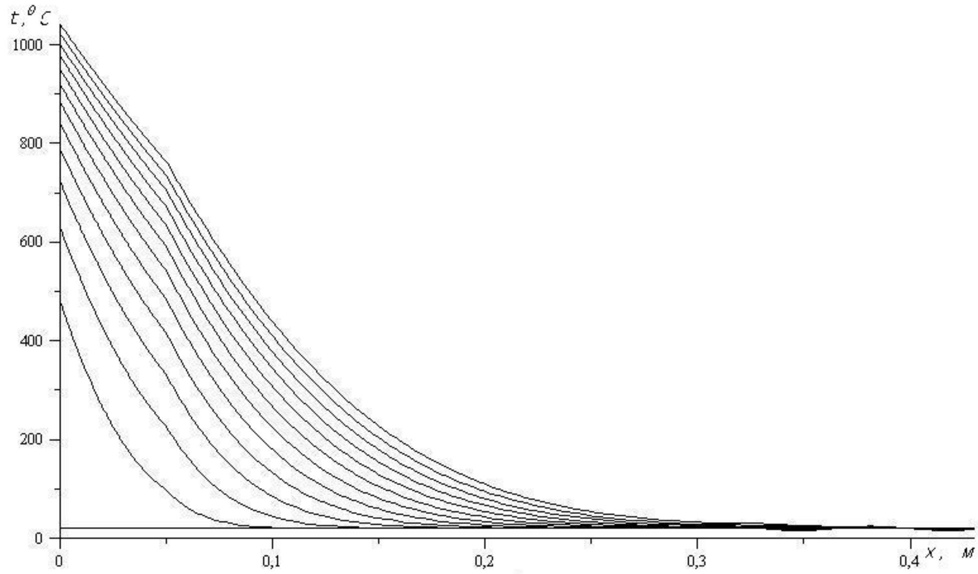

***Рис.1**. Розподіл нестаціонарного температурного поля чотиришарової плоскої стінки*

***Примітка:** В часовому вимірі «відстань» між сусідніми кривими дорівнює 1800 с*
(*нижня крива відповідає часу* $\tau = 0$)

Висновок

Як наведено в [9], основними методами розв’язування нестаціонарних крайових задач теплопровідності є: а) прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних(Фур’є); б) метод джерел (метод функції Гріна); в) метод інтегральних перетворень (операційний метод); г) наближені та числові методи.

Запропоновану в даний роботі схему слід віднести до прямих методів розв’язування крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних [4], що дозволяє «обійти» проблему множення узагальнених функцій.

Теорема про розвинення за власними функціями уточнена і адаптована для випадку рівнянь з кусково-неперервними (за просторовою змінною) коефіцієнтами.

Отримано явні формули для обчислення температури, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву 1-го роду згаданих вище коефіцієнтів.

На завершення розглянуто конкретний приклад розрахунку розподілу температурного поля реальної чотиришарової стінки за умов пожежі.

Список літератури

1. Величко Л.Д. Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі / Л.Д. Величко, Р.Я. Лозинський, М.М. Семерак. - Львів: Сполом, 2011. - 497с.

2. Арсенин В.Я. Методы математической физики/ В.Я. Арсенин −М.: Наука, 1974.−432 с.

3. Тихонов А.Н., Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский −М.: Наука, 1977.−735 с.

4. Тацій Р., Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. Тацій, М. Стасюк, В. Мазуренко, О. Власій −Дрогобич: Коло, 2011.−297 с.

5. Тацій Р.М. Дискретно-неперервні крайові задачі для найпростіших квазідиференціальних рівнянь другого порядку / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, О.О. Власій // Вісник національного університету «Львівська політехніка», фіз-мат. науки. – 2011. – №718. – С.61–69.

6. О.О. Власій Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами / О.О. Власій, М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Серія «Фіз.-мат.науки». 2009. − № 660. − С. 34-38.

7. Стасюк М.Ф. Структура розв'язків звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами / М.Ф. Стасюк// Доповіді АН УРСР. Сер. А. 1982. – №12. –С.33-36.

8. Стасюк М.Ф. Построение функции Коши для квазидифференциального уравнения 2-го порядка с кусочно-переменными коэффициентами /М.Ф. Стасюк // Дифференциальные уровнения и их приложения. – Вестн. Львов. Политехн. Ин-та. 1983. – № 172. –С.122-124.

9. Лыков А.В. Теория теплопроводности/ А.В. Лыков –М.: Высшая школа, 1967. – 600 с .

References

1. Velychko, L.D., Lozynskyi, R. Ya. and Semerak, M.M. (2011) *Termodynamika ta teploperedacha v pozhezhnii spravi* [Thermodynamics and heat transfer in fire case], Soplom, Lviv, Ukraine.

2. Arsenin, V.Ya. (1974) *Metody matematicheskoii fizyky* [Methods of Mathematical physics], Nauka, Moscow, USSR.

3. Tihonov, A.N. and Samarskii, A.A. (1977) *Uravnenie matematicheskoii fizyky* [Mathematical physics equation] Nauka, Moscow, USSR.

4. Tatsii, R.M., Stasiuk, M.F., Mazurenko, V.V., Vlasii, O.O. (2011) *Uzagalneni kvazidyferencialni rivniannia* [Generalized equation kvazidyferentsialni] Kolo, Drogobych, Ukraine.

5. Tatsii, R.M., Stasiuk, M.F., Vlasii, O.O. (2011). «Piecewise continuous boundary problems for the simplest quasidifferentinal equations of order 2», *Journal of National University "Lviv Polytechnic" Physics and mathematics* vol. 718, pp. 61-69.

6. Tatsii, R.M., Stasiuk, M.F., Vlasii, O.O. (2009). «The structure of solutions of generalized systems with piecewise variable coefficients», *Journal of National University "Lviv Polytechnic" Physics and mathematics* vol. 660, pp. 34-38.

7. Stasiuk, M.F. (1982) "The structure of solutions of ordinary differential equations and kvazidyferentsialnyh with piecewise variable coefficients" , *Reports of the USSR. Avg. A.* №12. Pp. 33-36.

8. Stasiuk, M.F. (1983) "Construction of the Cauchy function for quasidifferential equation 2nd order with piecewise variable coefficients" *Journal of National Institute "Lviv Polytechnic" Physics and mathematics* vol. 172, pp. 122-124.

9. Lykov, A.V. (1967) *Teoriia teploprovodnosti* [The theory of heat conduction], Vysshaia shkola, Mockow, USSS.