

DOI <https://doi.org/10.32447/20786662.48.2026.03>

Н. В. Жезло-Хлевна, О. В. Хлевной, О. О. Карабин, Ю. С. Назар, В. М. Пилипенко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3768-2863> – Н. В. Жезло-Хлевна

<https://orcid.org/0000-0003-2846-3480> – О. В. Хлевной

<https://orcid.org/0000-0002-9287-376X> – О. О. Карабин

<https://orcid.org/0000-0003-0151-8285> – Ю. С. Назар

<https://orcid.org/0009-0008-5957-4822> – В. М. Пилипенко

✉ olexandr.khlevnoy@gmail.com

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕНЕРГОЗАТРАТ ОСІБ З ПРОТЕЗАМИ В КОНТЕКСТІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕВАКУАЦІЇ ПРИ ПОЖЕЖІ

Проблема. Зростання кількості осіб із ампутаціями нижніх кінцівок в Україні внаслідок бойових дій актуалізує проблему забезпечення їх безпечної евакуації під час пожеж та інших надзвичайних ситуацій. Особи з протезами характеризуються підвищеними енергетичними витратами при пересуванні, що обумовлено біомеханічними особливостями руху, додатковими втратами енергії та зниженням ефективності м'язової роботи. Водночас у сучасних дослідженнях недостатньо уваги приділено кількісному оцінюванню енергозатрат як ключового чинника, що визначає витривалість і здатність до успішної евакуації.

Метою статті є розроблення математичної моделі енергозатрат осіб із протезами нижніх кінцівок у процесі евакуації при пожежі з урахуванням типу протезування, параметрів руху та характеристик евакуаційного маршруту.

Методи досліджень. У роботі використано аналітичні методи математичного моделювання, що базуються на поєднанні механічних складових руху (кінетичної та потенційної енергії) з урахуванням дисипативних втрат та метаболічних коефіцієнтів. Проведено чисельне моделювання різних сценаріїв евакуації (горизонтальний рух, підйом і спуск сходами) із використанням програмної реалізації на Python. Виконано порівняльний аналіз енергозатрат для осіб без ампутацій, а також користувачів протезів гомілки та стегна.

Результати. Розроблена модель дозволила описати лінійне зростання енергозатрат зі збільшенням довжини маршруту для всіх типів руху, при цьому їх величина суттєво залежить від типу ділянки. Найбільші витрати енергії спостерігаються при русі сходами вгору, що обумовлено виконанням роботи проти сили тяжіння. Для осіб із протезами зафіксовано систематичне перевищення енергозатрат у порівнянні зі здоровими особами, причому найбільш виражений ефект характерний для протезів стегна. Встановлено, що швидкість руху суттєво впливає на енергозатрати при горизонтальному переміщенні, тоді як при русі сходами її вплив є обмеженим.

Висновки. Запропонована математична модель є адекватним інструментом оцінювання енергетичної складності маршрутів евакуації для осіб із протезами та може бути використана при проектуванні безпечних евакуаційних шляхів. Встановлено, що врахування енергозатрат дозволяє більш обґрунтовано оцінювати можливості маломобільних груп населення в умовах пожежі. Перспективним напрямом подальших досліджень є урахування ефекту накопичення втоми, який має суттєвий вплив на ефективність евакуації осіб із протезами навіть на відносно коротких дистанціях.

Ключові слова: евакуація, енергозатрати, протези нижніх кінцівок, біомеханіка, пожежна безпека, математичне моделювання, комп'ютерне моделювання

MATHEMATICAL MODEL OF ENERGY EXPENDITURE OF PERSONS WITH PROSTHESES IN THE CONTEXT OF FIRE EVACUATION OPTIMIZATION

Problem. The increase in the number of individuals with lower limb amputations in Ukraine due to military actions highlights the need to ensure safe evacuation during fires and other emergencies. Persons with prostheses are characterized by increased energy expenditure during movement, caused by biomechanical features, additional energy losses, and reduced efficiency of muscular work. At the same time, current research lacks sufficient attention to the quantitative assessment of energy expenditure as a key factor determining endurance and the ability to complete evacuation.

Purpose. The aim of this study is to develop a mathematical model of energy expenditure for persons with lower limb prostheses during fire evacuation, taking into account the type of prosthesis, movement parameters, and characteristics of evacuation routes.

Methods. The study employs analytical methods of mathematical modeling based on the combination of mechanical components of motion (kinetic and potential energy) with consideration of dissipative losses and metabolic coefficients. Numerical simulations of various evacuation scenarios (horizontal movement, stair ascent and descent) were performed using a Python-based implementation. A comparative analysis of energy expenditure was conducted for able-bodied individuals and users of transtibial and transfemoral prostheses.

Results. The developed model demonstrates that energy expenditure increases linearly with the length of the evacuation route for all types of movement, while its magnitude significantly depends on the type of terrain. The highest energy costs are observed during stair ascent due to the necessity of performing work against gravity. Persons with prostheses exhibit consistently higher energy expenditure compared to able-bodied individuals, with the most pronounced effect observed for transfemoral prostheses. It is also established that movement speed significantly affects energy expenditure during horizontal motion, whereas its influence is limited in stair movement scenarios.

Conclusions. The proposed mathematical model is an adequate tool for assessing the energy complexity of evacuation routes for persons with prostheses and can be applied in the design of safe evacuation pathways. Considering energy expenditure allows for a more accurate assessment of the capabilities of mobility-impaired individuals during fire emergencies. A promising direction for future research is the incorporation of fatigue accumulation effects, which significantly influence evacuation performance for prosthesis users even over relatively short distances.

Key words: evacuation, energy expenditure, lower limb prostheses, biomechanics, fire safety, mathematical modeling, computer simulation

Постановка проблеми. Актуальність проблеми евакуації осіб з протезами нижніх кінцівок під час пожежі зумовлена стрімким зростанням кількості людей з ампутаціями внаслідок військових дій, травматизму та судинних захворювань, а також недостатньою адаптацією чинних норм пожежної безпеки до їхніх біомеханічних та метаболічних особливостей [1, 2]. Чинні документи [3, 4] не передбачають обґрунтованих варіантів врахування підвищених енергозатрат, асиметрії ходи, обмеженої пропріоцепції та швидкого настання втоми у користувачів модульних і біонічних протезів, що призводить до суттєвих помилок при розрахунках тривалості евакуації.

Головне наукове протиріччя полягає у відсутності інтегрованих кількісних моделей, здатних поєднати розрахунок енергозатрат при русі горизонтальними ділянками та сходами з подальшим прогнозуванням динаміки акумуляції втоми саме для осіб з протезами нижніх кінцівок. Класичні моделі розроблені для здорових людей

і не враховують додаткову дисипацію в штучних суглобах, інерцію протеза, компенсаторну роботу м'язів-стабілізаторів та вплив рівня ампутації (транстібіальна, трансфеморальна, однобічна/двобічна).

Це обумовлює потребу в розробці спеціалізованої математичної моделі енергозатрат, яка в перспективі дозволить кількісно прогнозувати критичний час настання втоми і оптимізувати евакуаційні маршрути в будівлях для осіб з протезами нижніх кінцівок.

Аналіз досліджень і публікацій. Сучасні математичні моделі енергозатрат при ходьбі розроблені переважно для здорових осіб і не враховують біомеханічні особливості користувачів протезів нижніх кінцівок. Класичні підходи [5] дозволяють прогнозувати метаболічні витрати під час повільного ходіння з навантаженням, беручи до уваги масу тіла, швидкість та зовнішнє навантаження. У роботі [6] детально вивчені енергетичні затрати ходьби та бігу на екстремальних ухилах, що особливо актуально для

подолання сходів. Дослідження [7] містять фундаментальні принципи біомеханіки та енергетики м'язової роботи, які й досі використовуються як базис для розрахунку потенційної та кінетичної енергії. Проте ці моделі припускають симетричну ходу, відсутність додаткової інерції штучних сегментів та нульову дисипацію в суглобах, що кардинально відрізняється від реальності для осіб з ампутаціями. Так, зокрема, дослідження [8] продемонстрували, що у осіб з травматичними ампутаціями нижніх кінцівок енергозатрати на амбулаторну активність зростають на 25–60 % порівняно з нормою, а стандартні акселерометричні алгоритми (наприклад, Actiheart) дають похибку до 45 %. Окрім цього в роботі [9] доведено, що навіть спроба вирівняти інерційні характеристики протеза з інтактною кінцівкою призводять до зростання асиметрії ходи та підвищення енергозатрат на 6–7 %.

Специфічні математичні моделі для опису ходи осіб з протезами нижніх кінцівок запропоновані у низці наукових робіт. Наприклад, у [10] автори проаналізували вплив роботи протезованої стопи на загальний метаболічний рівень та встановили, що підвищення енергії під час відштовхування зменшує загальні метаболічні витрати, але не завжди знижує енергетичні втрати при контакті з опорою. Дослідження [11] підтверджує, що енергозатрати при трансгібіальній ампутації залежать від типу стопи протеза та швидкості.

У роботах, що торкаються теми евакуації при пожежі моделі переважно враховують знижену мобільність осіб з інвалідністю. У дослідженні [12] автори розробили агент-орієнтовану модель, яка враховує індивідуальні швидкості, розміри та потребу в зонах безпеки, але не враховує енергозатрати осіб з протезами. Авторами аналітичного огляду [13] виявлено прогалини в моделях для осіб з функціональними обмеженнями мобільності: відсутність персоналізованих маршрутів та інтеграції біомеханічних розрахунків. Подібні висновки містяться також в роботах [14, 17], де підкреслюється потреба в інклюзивних симуляціях, але жодна модель не поєднує розрахунок енергозатрат на горизонтальних ділянках і сходах саме для осіб з протезами нижніх кінцівок.

Таким чином, існує суттєва наукова прогалина, а саме відсутність інтегрованої математичної моделі, яка поєднує механічну роботу протеза, дисипацію та асиметрію ходи в умовах евакуації при пожежі. Запропонований у статті підхід усуває цю проблему.

Метою роботи є розроблення математичної моделі оцінювання енергозатрат осіб з протезами нижніх кінцівок під час руху евакуаційними

маршрутами в будівлях, що включають горизонтальні ділянки та сходи, з урахуванням біомеханічних особливостей протезування, додаткової інерції штучних сегментів і дисипації енергії в протезних механізмах.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання:

– Проаналізувати існуючі підходи до моделювання енергозатрат людини під час ходьби та оцінити їх придатність для опису руху осіб з протезами нижніх кінцівок у задачах евакуації при пожежі.

– Розробити математичну модель енергозатрат осіб з протезами нижніх кінцівок під час руху евакуаційними маршрутами, що враховує механічну роботу під час переміщення горизонтальними ділянками та сходами, масу протеза, асиметрію ходи і додаткову дисипацію енергії у протезних механізмах.

– Провести перевірку адекватності запропонованої моделі шляхом числового моделювання типових сценаріїв евакуації та порівняння отриманих результатів з відомими експериментальними даними щодо збільшення енергозатрат у користувачів протезів нижніх кінцівок.

Методи дослідження. У роботі використано методи математичного моделювання та теоретичної механіки для опису енергетичних витрат людини під час руху. Розроблення моделі здійснювалося на основі аналізу біомеханічних принципів ходьби, енергетичного балансу механічної роботи та метаболічних витрат. Для оцінювання адекватності моделі застосовано числове моделювання типових сценаріїв евакуації та порівняння отриманих результатів з даними наукових досліджень щодо енергозатрат осіб з ампутаціями нижніх кінцівок.

Результати дослідження. Розпочнемо із базових принципів моделювання та представимо енергозатрату (E , Дж/кг або мл O_2 /кг · м) як суму механічної роботи ($W_{мех}$) та метаболічних витрат ($W_{метаб}$), з ефективністю м'язів $\eta \approx 0,25$ (вважатимемо, що 25 % механічної роботи перетворюється на рух, а решта – затрати на тепло). Доцільно також ввести метаболічний коефіцієнт $k_{метаб}$. Його значення приймаються на основі узагальнення експериментальних даних і становлять: $k_{метаб} = 1,0$ – для осіб без ампутацій; $k_{метаб} = 1,3$ – для осіб з протезом гомілки; $k_{метаб} = 1,5 \dots 1,6$ – для осіб з протезом стегна. Введення цього коефіцієнта дозволяє врахувати додаткові енергетичні витрати, пов'язані з необхідністю стабілізації тіла, залученням додаткових м'язових груп та зниженням ефективності передачі механічної енергії.

$$E = \frac{k_{\text{метаб}} \cdot W_{\text{мех}}}{\eta} + W_{\text{метаб}}, \quad (1)$$

де $W_{\text{мех}}$ – механічна робота (кінетична та потенційна енергія руху і робота проти тертя), $W_{\text{метаб}}$ – базовий метаболізм.

При розрахунку для протезів додаємо внесок протеза $W_{\text{прот}}$, що включає інерцію та дисипацію енергії в штучних суглобах.

На горизонтальних ділянках основна кількість корисної (рухової) енергії витрачається на прискорення кінцівок, підтримання рівноваги та тертя. Прийmemo за основу модифіковану модель на основі механіки ходи [7], де енергія на крок розраховується як сума кінетичної енергії сегментів тіла та протеза.

Кінетична енергія на крок для однієї кінцівки:

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} \cdot m_n \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m_{\text{прот}} \cdot v_{\text{прот}}^2, \quad (2)$$

де:

m_n – маса ноги (для особи без ампутацій $m_n \approx 0,15 \cdot m_{\text{тіла}}$, для особи з протезом – зменшена в залежності від рівня ампутації: $m_{\text{н.ст}} \approx 0,06 \cdot m_{\text{тіла}}$, для протеза стегна, $m_{\text{н.з}} \approx 0,1 \cdot m_{\text{тіла}}$ для протеза гомілки);

v – швидкість тіла (м/с),

$m_{\text{прот}}$ – маса протеза (кг),

$v_{\text{прот}}$ – швидкість протеза (для синхронної ходи $v_{\text{прот}} \approx v$, але при ампутації стегна або змішаних двосторонніх ампутаціях доцільно ввести коефіцієнт асиметрії $\delta_{\text{асим}}$. При цьому швидкість $v_{\text{прот}} \approx v \cdot (1 - \delta_{\text{асим}})$. В залежності від виду ампутації $\delta_{\text{асим}} = 0,05 \dots 0,3$).

Потенційна енергія на крок (із врахуванням коливання центру маси, $\Delta h_{\text{ц.м.}} \approx 0,03 \dots 0,05$ м):

$$E_{\text{пот}} = m_{\text{тіла}} \cdot g \cdot \Delta h_{\text{ц.м.}}, \quad (3)$$

де:

$g = 9,81$ м/с²,

$m_{\text{тіла}}$ – маса тіла (кг).

Врахуємо дисипацію в протезі під час руху:

$$W_{\text{дис}} = k_{\text{дис}} \cdot d_{\text{кр.}}, \quad (4)$$

де:

$k_{\text{дис}}$ – коефіцієнт дисипації (приймаємо $k_{\text{дис}} = 0,5 \dots 1,0$ Дж/м для модульного протезу $k_{\text{дис}} = 0,2 \dots 0,5$ Дж/м для біонічного протезу),

$d_{\text{кр.}} \approx 0,7-0,8$ м – довжина кроку.

Таким чином загальна енергозатрата на подолання відстані d під час руху горизонтальними ділянками:

$$E_{\text{сориз.}} = \left(N_{\text{кр}} \cdot \frac{k_{\text{метаб}} \cdot (E_{\text{кін}} + E_{\text{пот}} + W_{\text{дис}})}{\eta} \right) + E_{\text{метаб}} \cdot t, \quad (5)$$

де:

$N_{\text{кр}} = \frac{d}{d_{\text{кр.}}}$ – кількість кроків, які необхідно зробити, щоб подолати дистанцію d , $t = \frac{d}{v}$ – час,

$E_{\text{метаб}}$ – базовий метаболізм ($E_{\text{метаб}} \approx 1,5$ Дж/кг · с для стану спокою, підвищується на 10–50 % для користувачів протезів в залежності від виду та рівня ампутації).

Під час руху сходами до загальної кількості роботи, необхідної для переміщення по горизонталі, додається робота, необхідна для вертикального переміщення. При цьому потрібно врахувати силу тяжіння.

Тому для підйому або спуску сходами робота становитиме:

$$W_{\text{сход.}} = (m_{\text{тіла}} + m_{\text{прот}}) \cdot g \cdot n_{\text{сход.}} \cdot h_{\text{сход.}} \cdot (1 - \eta_{\text{сх}}), \quad (6)$$

де:

$n_{\text{сход.}}$ – кількість сходинок;

$h_{\text{сход.}}$ – висота сходинки, приймаємо $h_{\text{сход.}} = 0,17$ м

$\eta_{\text{сх}}$ – поправковий коефіцієнт, $\eta_{\text{сх}} = 0,1 \dots 0,2$ для спуску і $\eta_{\text{сх}} = 0$ для підйому.

Необхідно врахувати додаткову дисипацію в протезі на сходах (через необхідність контролю колінного або гомілкового шарніра):

$$W_{\text{дис}} = k_{\text{дис}} \cdot m_{\text{прот}} \cdot g \cdot n_{\text{сход.}} \cdot h_{\text{сход.}}, \quad (7)$$

де:

$k_{\text{дис}} = 1,2 \dots 1,8$ для модульних, $0,8 \dots 1,2$ для біонічних.

Загальна модель енерговитрат для руху сходами:

$$E_{\text{сход}} = \frac{k_{\text{метаб}} \cdot (W_{\text{сход.}} + W_{\text{дис}} + E_{\text{кін.сх.}})}{\eta} + E_{\text{метаб}} \cdot n_{\text{сход.}} \cdot t_{\text{сход.}}, \quad (8)$$

де:

$t_{\text{сход.}}$ – час подолання однієї сходинки. Це значення змінюється в залежності від типу протезу і може становити $t_{\text{сход.}} = 1 \dots 1,7$ с;

$E_{\text{кін.сх.}}$ – кінетична енергія під час руху сходами.

$$E_{\text{кін.сх.}} = \frac{1}{2} \cdot (m_{\text{тіла}} + m_{\text{прот}}) \cdot (v_{\text{верт.}}^2 + v_{\text{гор.}}^2) \cdot n_{\text{сход.}}, \quad (9)$$

де:

$v_{\text{верт.}} = \frac{h_{\text{сход.}}}{t_{\text{сход.}}}$ – вертикальна швидкість при підйомі сходами;

$v_{\text{гор.}} = \frac{d_{\text{сход.}}}{t_{\text{сход.}}}$ – вертикальна швидкість при підйомі сходами;

$d_{\text{сход.}}$ – ширина сходинки.

Для комбінованих маршрутів (горизонтальні ділянки та сходи) сумарну енергозатрату потрібно підсумовувати

Параметри математичної моделі

Параметр	Без ампутації	Протез гомілки	Протез стегна
Маса тіла $m_{тіла}$, кг	80	80	80
Маса ноги m_n , кг	16	10	7
Маса протеза, $m_{прот}$ кг	–	2,5	4,0
Коефіцієнт асиметрії протеза $\delta_{асим}$	–	0,1	0,2
Коефіцієнт дисипації $k_{дис}$, Дж/м	–	0,5	1
Метаболічний коефіцієнт $k_{метаб}$	1,0	1,30	1,55
Довжина кроку $d_{кр}$, м	0,8	0,75	0,7
Висота підйому центру маси $\Delta h_{ц.м.}$, м	0,05	0,05	0,05
Висота сходинки $h_{сход}$, м	0,17	0,17	0,17
ККД руху η	0,25	0,25	0,25
Коефіцієнт гальмування $\eta_{сп}$	0,6	0,6	0,6
Швидкість руху v , м/с	1,4	1,2	1,0

$$E = E_{гориз.} + E_{сход} \quad (10)$$

Валідація розробленої математичної моделі енергозатрат під час евакуації осіб із протезами нижніх кінцівок здійснювалась шляхом аналізу відповідності отриманих результатів фундаментальним законам механіки, біомеханіки руху людини та узгодженості з відомими фізіологічними закономірностями.

У таблиці 1 наведено значення параметрів моделі під час виконання обчислень.

На рис. 1, а представлено залежність енергозатрат від довжини маршруту для горизонтального руху. Отримані результати демонструють лінійний характер зростання енергоспоживання зі збільшенням дистанції, що відповідає теоретичним уявленням про пропорційність роботи сил опору та кількості виконаних кроків. При цьому енергозатрати для осіб із протезом гомілки та стегна перевищують аналогічні показники для здорової людини, що пояснюється додатковими втратами енергії на дисипацію та компенсаційні рухи.

На рис. 1, б наведено аналогічні залежності для руху сходами вгору. Спостерігається суттєве зростання енергозатрат у порівнянні з горизонтальним рухом, що зумовлено необхідністю виконання роботи проти сили тяжіння. При цьому різниця між досліджуваними категоріями осіб є найбільш вираженою, що підтверджує підвищене навантаження на осіб із проксимальними ампутаціями.

На рис. 1в показано залежність енергозатрат при русі сходами вниз. На відміну від підйому, енергозатрати мають менший градієнт зростання, однак залишаються суттєвими. Це пояснюється необхідністю виконання ексцентричної роботи м'язів для контролю руху та стабілізації положення тіла, що враховано в моделі через коефіцієнт керованого гальмування.

Загалом отримані результати відповідають відомим експериментальним спостереженням, згідно з якими:

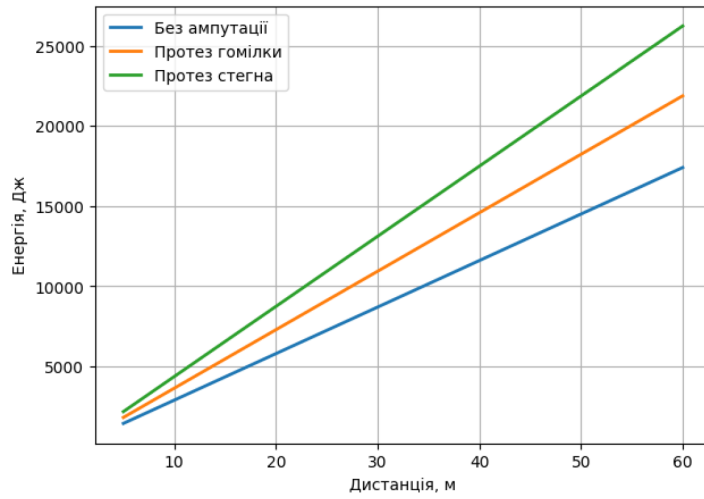
- енергетична вартість пересування осіб із протезами є вищою, ніж у здорових людей;
- найбільш енергозатратним є рух сходами вгору;
- рух сходами вниз, незважаючи на відсутність підйому центру мас, також потребує значних енерговитрат.

Таким чином, модель демонструє фізичну узгодженість, логічну інтерпретованість та придатність для подальшого використання у задачах оцінювання ефективності евакуації. Підвищені значення енергозатрат для осіб із протезами додатково підсилюються введенням метаболічного коефіцієнта, який узагальнено враховує фізіологічну неефективність руху та підтверджує узгодженість моделі з експериментальними спостереженнями.

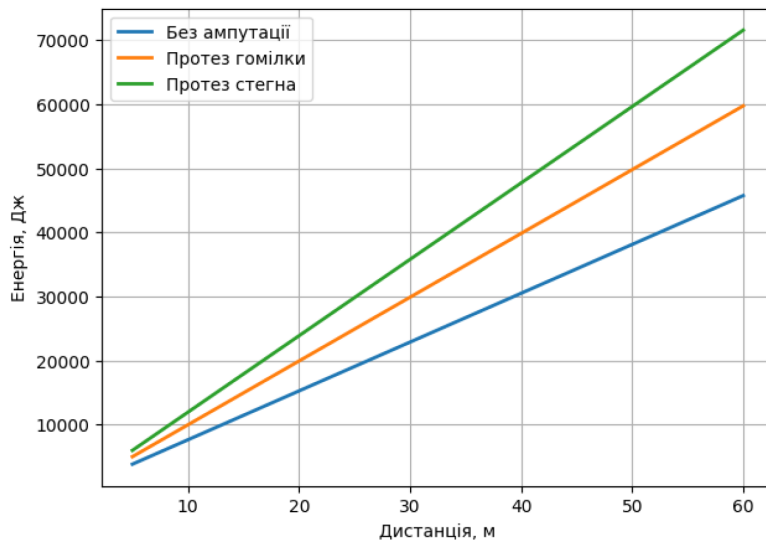
Додаткову валідацію адекватності розробленої моделі проведено шляхом аналізу впливу швидкості руху на енергозатрати при різних типах ділянок евакуаційного маршруту.

На рис. 2, а наведено залежності енергозатрат від швидкості руху для горизонтальної ділянки. Отримані криві мають виражений нелінійний характер, що узгоджується з аналітичною структурою моделі, у якій кінетична енергія та дисипативні втрати пропорційні квадрату швидкості. При цьому для осіб із протезами спостерігається більш стрімке зростання енергозатрат, що пояснюється наявністю додаткових втрат енергії, пов'язаних із неідеальною передачею механічної енергії та необхідністю компенсаційних рухів.

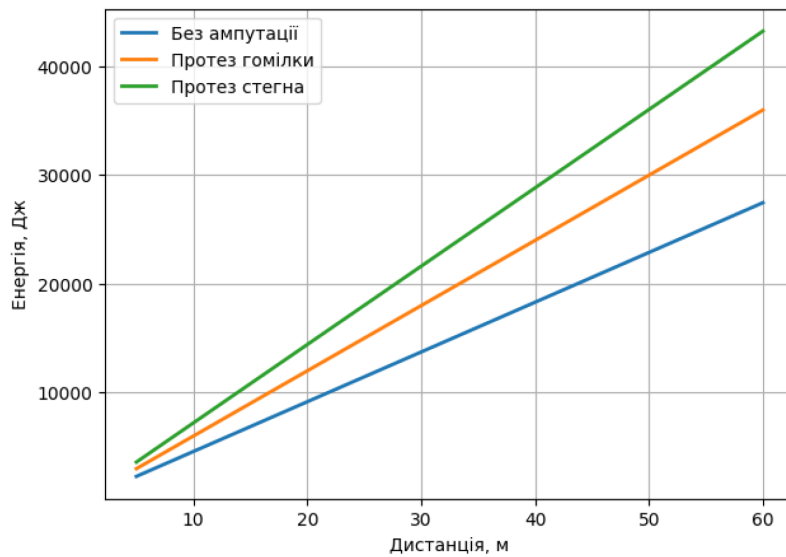
На рис. 2, б представлено аналогічні залежності для руху сходами вгору. На відміну від



а

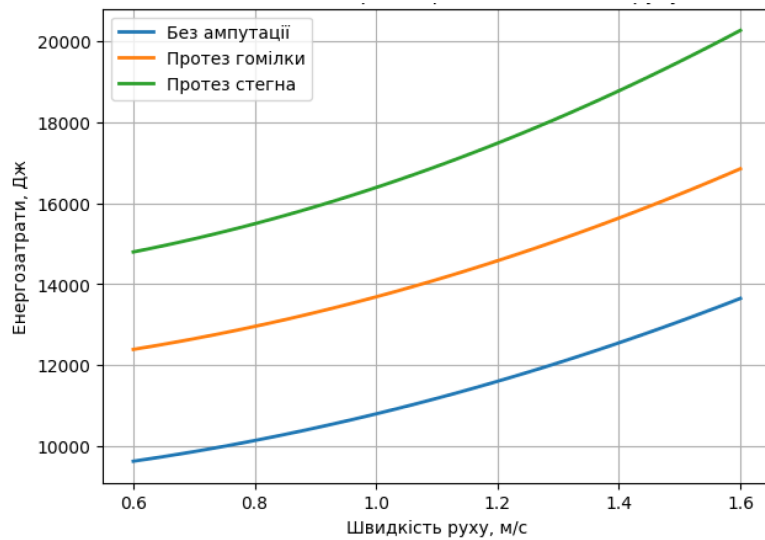


б

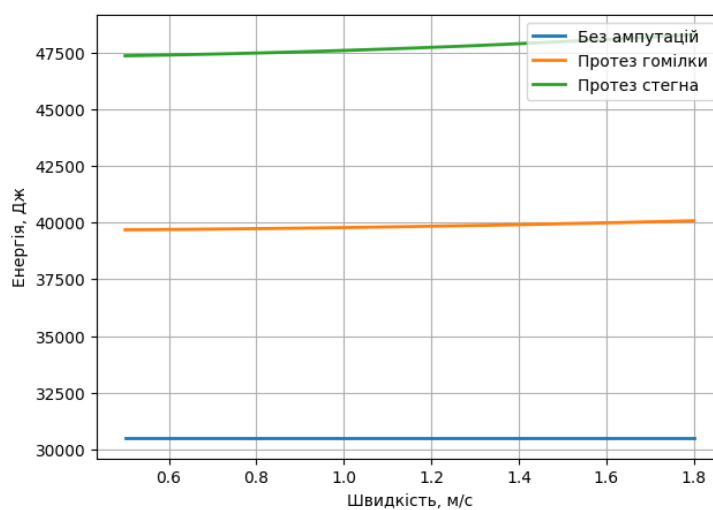


в

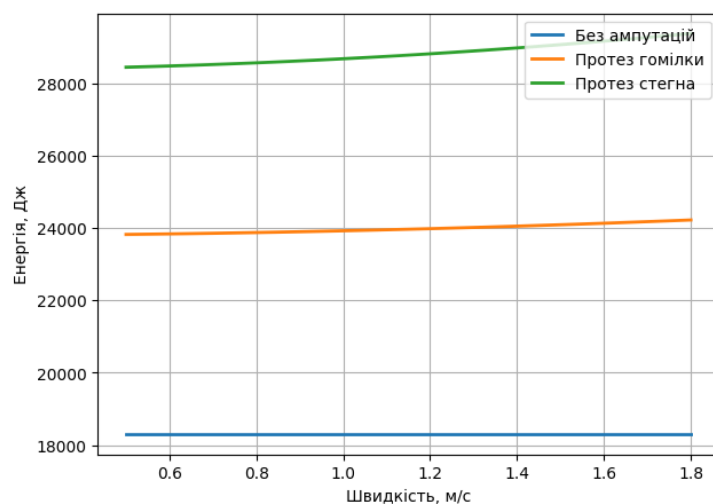
Рис. 1. Залежність енергозатрат від відстані:
 а) рух на горизонтальних ділянках; б) рух сходами вгору; в) рух сходами вниз



а



б



в

Рис. 2. Залежність енергозатрати від швидкості руху:
а) рух на горизонтальних ділянках; б) рух сходами вгору; в) рух сходами вниз

горизонтального руху, отримані результати демонструють слабку залежність енергозатрат від швидкості. Такий характер кривих пояснюється домінуванням складової, пов'язаної з виконанням роботи проти сили тяжіння, яка не залежить від швидкості руху. Внесок швидкісно-залежних компонент (кінетичної енергії та дисипації) є відносно незначним у загальному енергетичному балансі.

На рис. 2, в наведено результати для руху сходами вниз. Як і у випадку підйому, спостерігається незначна залежність енергозатрат від швидкості. Це пояснюється тим, що основну частку енерговитрат становить ексцентрична робота м'язів, спрямована на контроль та стабілізацію руху під час спуску, яка в моделі враховується через коефіцієнт керованого гальмування. Дана складова також практично не залежить від швидкості, тоді як швидкісно-залежні втрати залишаються другорядними.

Таким чином, результати моделювання демонструють принципово різний характер впливу швидкості руху на енергозатрати залежно від типу ділянки: для горизонтального переміщення швидкість є визначальним фактором, тоді як при русі сходами домінують гравітаційні та стабілізаційні складові. Отримані закономірності узгоджуються з базовими положеннями біомеханіки та фізіології руху людини, що підтверджує адекватність запропонованої моделі.

Слід зазначити, що діапазон швидкостей, використаний у моделюванні (до 1,8 м/с), охоплює як типові, так і граничні значення, що дозволяє дослідити загальний характер залежностей енергозатрат. При цьому для осіб із протезами нижніх кінцівок, особливо під час руху сходами, реальні швидкості пересування є суттєво нижчими, а верхня межа діапазону має ілюстративний характер. Отримані результати у зоні підвищених швидкостей слід розглядати як теоретичну екстраполяцію моделі, що не претендує на відображення типових умов евакуації, але дозволяє оцінити граничні тенденції зміни енергозатрат.

Валідація моделі. З огляду на складність проведення натурних експериментів із залученням осіб із протезами нижніх кінцівок, валідацію моделі виконано на основі узагальнення результатів відомих біомеханічних досліджень енергозатрат при ходьбі.

Як критерій порівняння використано питомі енергозатрати (Дж/(кг·м)). Згідно з класичними роботами [15], а також узагальненнями сучасних досліджень, для осіб без ампутацій питомі енергозатрати при ходьбі становлять у середньому

3,0–4,0 Дж/(кг·м). Експериментальні дослідження [16] показали, що для осіб із протезами гомілки енергетичні витрати є приблизно на 16–30 % вищими порівняно зі здоровими особами.

Для осіб із протезами стегна зростання енергоспоживання є ще більш суттєвим і може досягати 50–70 %, що підтверджується як експериментальними, так і оглядовими дослідженнями.

Таблиця 2

Валідація моделі на основі літературних даних

Тип протеза	Літературні значення, Дж/(кг·м)	Результати моделі, Дж/(кг·м)	Узгодженість
Без ампутації	3,0–4,0	3,6	відповідає
Протез гомілки	3,5–5,0	4,7	відповідає
Протез стегна	4,5–7,0	6,2	відповідає

Як видно з табл. 2, результати моделювання для всіх розглянутих категорій осіб потрапляють у діапазони значень, наведені в літературних джерелах, що свідчить про узгодженість моделі з експериментальними даними. та підтверджує адекватність моделі.

Важливо відзначити, що модель коректно відтворює не лише абсолютні значення, але й відносне зростання енергозатрат залежно від рівня ампутації, що узгоджується з відомими біомеханічними закономірностями. Важливо, що модель коректно відтворює відносне зростання енергозатрат: близько 20–30 % для осіб з протезами гомілки і близько 50 % для осіб з протезами стегна, що підтверджується сучасними дослідженнями.

Крім того, встановлено, що підвищення енергетичних витрат пов'язане з необхідністю компенсації втраченої функції суглобів та залученням додаткових м'язових груп, що знижує ефективність руху.

Таким чином, проведена валідація підтверджує, що запропонована модель фізично узгодженою, адекватно відображає біомеханічні закономірності та може бути використана для подальшого аналізу процесів евакуації.

Висновки. У роботі розроблено та апробовано математичну модель оцінювання енергозатрат осіб із протезами нижніх кінцівок під час евакуації, що дозволяє кількісно враховувати вплив типу протезування, параметрів руху та характеристик маршруту.

Відповідно до поставлених завдань отримано такі результати.

1. Сформовано узагальнену модель енергозатрат, яка базується на поєднанні механічних складових руху із урахуванням біомеханічних особливостей пересування осіб із протезами. Введення коригувальних коефіцієнтів, що відображають зміну кінематики руху, додаткові втрати енергії та підвищене метаболічне навантаження, дозволило адаптувати класичні підходи до специфіки досліджуваної категорії осіб.

2. На основі розробленої моделі проведено чисельне моделювання енергозатрат для різних сценаріїв руху, зокрема для горизонтальних ділянок, руху сходами вгору та вниз. Згідно моделі енергозатрати зростають лінійно зі збільшенням довжини маршруту для всіх типів руху, однак їх абсолютні значення істотно відрізняються залежно від типу ділянки. Найбільші витрати енергії характерні для руху сходами вгору, що обумовлено необхідністю виконання роботи проти сили тяжіння, тоді як при русі сходами вниз енергозатрати формуються переважно за рахунок стабілізаційних процесів та контролю руху. Для осіб із протезами, особливо при проксимальних ампутаціях, зафіксовано систематичне зростання енергоспоживання у порівнянні зі здоровими особами.

3. Досліджено вплив швидкості руху на енергозатрати. Показано, що для горизонтального переміщення швидкість є визначальним фактором, що зумовлює нелінійне зростання енергоспоживання. Водночас для руху сходами вплив швидкості є обмеженим, оскільки домінуючими залишаються складові, пов'язані з гравітаційною роботою та стабілізацією тіла. Отримані закономірності узгоджуються з базовими положеннями біомеханіки та фізіології руху людини, що підтверджує адекватність запропонованої моделі.

Загалом результати дослідження свідчать про те, що використання узагальнених енергетичних критеріїв дозволяє більш обґрунтовано оцінювати складність маршрутів евакуації для осіб із протезами та може бути використане при нормуванні евакуаційних шляхів, а також у системах підтримки прийняття рішень в сфері пожежної безпеки.

Разом з тим розроблена модель має певні обмеження. Зокрема, у ній не враховано ефект накопичення втоми в процесі руху. Для відносно коротких дистанцій цей ефект не є критичним для осіб без ампутацій, однак для осіб із протезами навіть на таких ділянках може спостерігатися суттєве зниження функціональних можливостей унаслідок підвищеного метаболічного навантаження. Ігнорування цього ефекту може призводити до

недооцінки реальних енергозатрат і, відповідно, до оптимістичної оцінки здатності до евакуації.

У зв'язку з цим перспективним напрямом подальших досліджень є розширення моделі шляхом урахування динаміки втоми, зокрема через введення залежності енергетичних витрат і доступної потужності від часу або пройденої дистанції, а також її експериментальну перевірку. Доцільним є також врахування індивідуальних характеристик користувачів протезів, типів протезних конструкцій, а також стохастичних факторів, пов'язаних із поведінкою людей у стресових умовах евакуації. Реалізація таких підходів дозволить підвищити точність моделювання та забезпечити створення більш реалістичних інструментів оцінювання ефективності евакуаційних процесів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Жезло-Хлевна Н., Хлевной О., Назар Ю., Борзов Ю., Довбняк В. Евакуація осіб із модульними протезами нижніх кінцівок при пожежі: сучасний стан, проблеми та перспективи досліджень. *Пожежна безпека*. Львів, 2025. № 46. С. 53–64. DOI: <https://doi.org/10.32447/20786662.46.2025.05>
2. Хлевной О., Жезло-Хлевна Н., Доценко О., Борисова А., Калиновський А. Біомеханічні особливості руху осіб із двосторонніми протезами нижніх кінцівок під час евакуації в умовах пожежі. *Науковий вісник: Цивільний захист та пожежна безпека*. Київ, 2025. № 1(19). С. 120–128. DOI: <https://doi.org/10.33269/nvcz.2025>
3. ДСТУ 8828:2019. Пожежна безпека. Загальні положення. [Чинний від 2020-01-01]. Київ : ДП «УкрНДНЦ», 2019. 163 с.
4. ДБН В.2.2-40:2018. Інклюзивність будівель і споруд. [Чинний від 2019-04-01]. Київ : Мінрегіон України, 2018. 70 с.
5. Pandolf K. B., Givoni B., Goldman R. F. Predicting energy expenditure with loads while standing or walking very slowly. *Journal of Applied Physiology*. 1977. Vol. 43, No. 4. P. 577–581. <https://doi.org/10.1152/jappl.1977.43.4.577>
6. Zai C. Z., Grabowski A. M. The metabolic power required to support body weight and accelerate body mass changes during walking on uphill and downhill slopes. *Journal of Biomechanics*. 2020. Vol. 103. 109667. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2020.109667>
7. Cavagna G. A., Thys H., Zamboni A. The sources of external work in level walking and running. *The Journal of Physiology*. 1976. Vol. 262, No. 3. P. 639–657. DOI: <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1976.sp011613>
8. Energy cost of walking in people after lower limb amputation: A systematic review and meta-analysis. *Gait & Posture*. 2020. Vol. 81(S1). P. 89–90. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2020.07.076>

9. Narang Y. S., Arelekatti V. N., Winter A. G. The effects of prosthesis inertial properties on prosthetic knee moment and hip energetics required to achieve able-bodied kinematics. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*. 2016. Vol. 24, No. 7. P. 754–763. DOI: <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2015.2455054>

10. Zelik K. E. et al. Systematic variation of prosthetic foot spring affects center-of-mass mechanics and metabolic cost during walking. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*. 2011. Vol. 19, No. 4. P. 411–419. DOI: <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2011.2159018>

11. Ernst M., Altenburg B., Bellmann M., Schmalz T. Standing on slopes – how current microprocessor-controlled prosthetic feet support transtibial and transfemoral amputees in an everyday task. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*. 2017. Vol. 14. Art. 114. DOI: <https://doi.org/10.1186/s12984-017-0322-2>

12. Ronchi E., Nilsson D. Fire evacuation in high-rise buildings: a review of human behaviour and modelling research. *Fire Science Reviews*. 2013. Vol. 2. Art. 7. DOI: <https://doi.org/10.1186/2193-0414-2-7>

13. Kuligowski E. D., Peacock R. D., Hoskins B. L. A review of building evacuation models. *Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology*, 2010. (NIST Technical Note 1680). DOI: <https://doi.org/10.6028/NIST.TN.1680>

14. Ronchi E. Developing and validating evacuation models for fire safety engineering. *Fire Safety Journal*. 2021. Vol. 120. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2020.103020>

15. Krebbeckx G. G. J., Waterval N. F. J., Brehm M. A., Kerkhoffs G. M. M. J., Bramer J. A. M., Verspoor F. G. M. Gait biomechanics and energy cost of walking after rotationplasty: A systematic review and meta-analysis compared to above-knee amputation and healthy participants. *Clinical Biomechanics*. 2025. Vol. 128. 106626. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2025.106626>

16. Bonnet-Lebrun A., Sedran L., Heidsieck C., Thomas-Pohl M., Pillet H., Bonnet X. Mechanical work and metabolic cost of walking with knee-foot prostheses: a study with a prosthesis simulator. *IRBM*. 2024. Vol. 45, No. 6. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.irbm.2024.100863>

17. Hulida E., Pasnak I., Koval O., Tryhuba A. Determination of the critical time of fire in the building and ensure successful evacuation of people. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. 2019. Vol. 63, No. 1. P. 308–316. DOI: [10.3311/PPci.12760](https://doi.org/10.3311/PPci.12760)

REFERENCES

1. Zhezlo-Khlevna, N., Khlevnoi, O., Nazar, Yu., Borzov, Yu., & Dovbniak, V. (2025). *Evakuatsiia osib iz modulnymy protezamy nyzhnikh kintsivok pry pozhezhi: suchasnyi stan, problemy ta perspektyvy doslidzhen* [Evacuation of persons with modular lower limb prostheses in case of fire: current state, problems

and research prospects]. *Pozhezha bezpeka*, (46), 53–64. <https://doi.org/10.32447/20786662.46.2025.05> [in Ukrainian].

2. Khlevnoi, O., Zhezlo-Khlevna, N., Dotsenko, O., Borysova, A., & Kalynovskyi, A. (2025). *Biomekhanichni osoblyvosti rukhu osib iz dvostoronnimy protezamy nyzhnikh kintsivok pid chas evakuatsii v umovakh pozhezhi* [Biomechanical features of movement of persons with bilateral lower limb prostheses during evacuation in fire conditions]. *Naukovyi visnyk: Tsyvilnyi zakhyst ta pozhezha bezpeka*, 1(19), 120–128. <https://doi.org/10.33269/nvcz.2025> [in Ukrainian].

3. DSTU 8828:2019. (2019). *Pozhezha bezpeka. Zahalni polozhennia* [Fire safety. General provisions]. Kyiv : DP “UkrNDNTs”. [in Ukrainian].

4. DBN V.2.2-40:2018. (2018). *Inklyuzyvnist budivel i sporud* [Inclusiveness of buildings and structures]. Kyiv : Minrehion Ukrainy. [in Ukrainian].

5. Pandolf, K. B., Givoni, B., & Goldman, R. F. (1977). Predicting energy expenditure with loads while standing or walking very slowly. *Journal of Applied Physiology*, 43(4), 577–581. <https://doi.org/10.1152/jappl.1977.43.4.577>

6. Zai, C. Z., & Grabowski, A. M. (2020). The metabolic power required to support body weight and accelerate body mass changes during walking on uphill and downhill slopes. *Journal of Biomechanics*, 103, 109667. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2020.109667>

7. Cavagna, G. A., Thys, H., & Zamboni, A. (1976). The sources of external work in level walking and running. *The Journal of Physiology*, 262(3), 639–657. <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1976.sp011613>

8. (2020). Energy cost of walking in people after lower limb amputation: A systematic review and meta-analysis. *Gait & Posture*, 81(S1), 89–90. <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2020.07.076>

9. Narang, Y. S., Arelekatti, V. N., & Winter, A. G. (2016). The effects of prosthesis inertial properties on prosthetic knee moment and hip energetics required to achieve able-bodied kinematics. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 24(7), 754–763. <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2015.2455054>

10. Zelik, K. E., et al. (2011). Systematic variation of prosthetic foot spring affects center-of-mass mechanics and metabolic cost during walking. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 19(4), 411–419. <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2011.2159018>

11. Ernst, M., Altenburg, B., Bellmann, M., & Schmalz, T. (2017). Standing on slopes – how current microprocessor-controlled prosthetic feet support transtibial and transfemoral amputees in an everyday task. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 14, 114. <https://doi.org/10.1186/s12984-017-0322-2>

12. Ronchi, E., & Nilsson, D. (2013). Fire evacuation in high-rise buildings: a review of human behaviour and modelling research. *Fire Science Reviews*, 2, 7. <https://doi.org/10.1186/2193-0414-2-7>

13. Kuligowski, E. D., Peacock, R. D., & Hoskins, B. L. (2010). *A review of building evacuation models*. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology. <https://doi.org/10.6028/NIST.TN.1680>
14. Ronchi, E. (2021). Developing and validating evacuation models for fire safety engineering. *Fire Safety Journal*, 120. <https://doi.org/10.1016/j.fire-saf.2020.103020>
15. Krebbekx, G. G. J., Waterval, N. F. J., Brehm, M. A., Kerkhoffs, G. M. M. J., Bramer, J. A. M., & Verspoor, F. G. M. (2025). Gait biomechanics and energy cost of walking after rotationplasty: A systematic review and meta-analysis compared to above-knee amputation and healthy participants. *Clinical Biomechanics*, 128, 106626. <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2025.106626>
16. Bonnet-Lebrun, A., Sedran, L., Heidsieck, C., Thomas-Pohl, M., Pillet, H., & Bonnet, X. (2024). Mechanical work and metabolic cost of walking with knee-foot prostheses: a study with a prosthesis simulator. *IRBM*, 45(6). <https://doi.org/10.1016/j.irbm.2024.100863>
17. Hulida, E., Pasnak, I., Koval, O., & Tryhuba, A. (2019). Determination of the critical time of fire in the building and ensure successful evacuation of people. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 63(1), 308–316. <https://doi.org/10.3311/PPci.12760>

© Н. В. Жезло-Хлевна, О. В. Хлевной, О. О. Карабин, Ю. С. Назар, В. М. Пилипенко

Науково-методична стаття

Дата першого надходження статті до видання: 10.03.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 15.04.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 29.05.2026