

*Л.П. Гащук, П.М. Гащук, д-р техн. наук, професор  
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)*

## ЕКСТРЕМАЛЬНА ДИНАМІКА РОЗГОНУ Й ГАЛЬМУВАННЯ ПОЖЕЖНОГО АВТОМОБІЛЯ

Наводяться аргументи, що засвідчують особливу вагомість динамічних властивостей пожежного автомобіля. Розглядається модельний опис динаміки подовжнього прямолінійного руху пожежного автомобіля. На підставі цього опису в найзагальнішій аналітичній формі визначено необхідні й достатні умови екстремальної динамічності процесів розгону й гальмування пожежного автомобіля. Наголошується на тому, що традиційно екстремальну динамічність пов'язують з реалізацією максимального зчеплення коліс з дорогою. Натомість показано, що оптимальне проковзування коліс якраз не завжди відповідає максимальному значенню коефіцієнта зчеплення коліс з дорогою. Тому виникає потреба глибшого вивчення можливостей інтенсифікації процесів розгону і гальмування.

**Ключові слова:** пожежний автомобіль, динаміка подовжнього руху, розгін, гальмування, умови екстремальної динамічності.

**Мотивація.** Зазвичай пожежні (протипожежні) автомобілі будують на шасі серійних автомобілів комерційного чи військового призначення, а отже критерії досконалості, якими керуються при доборі конструктивних рішень, матеріалів, параметрів, характеристик в значній мірі залишаються ідентичними що для звичайних, що для пожежних автомобілів. Особливі вимоги висуваються, звісно, лише до спеціальної надбудови. Щоправда, деякі системи загального використання все-таки доводиться адаптувати. Приміром, не дивно, що інколи зміцнення й зміни параметрів потребує підвіска у разі застосування її саме на пожежному автомобілі – їй доводиться зазнавати тривалого значного статичного навантаження (обставини тут критичніші, ніж навіть у військового автомобіля). Але завжди виняткову вагу мають вимоги до динамічності як пересічного, так і пожежного автомобіля.

Зважмо, пожежний автомобіль належить до привілейованих учасників дорожнього руху. А отже саме він у всій повноті має можливість проявити свою динамічність (особливо – в місті). Висока динамічність, до того ж, завжди є свідомо бажаною. Це легко простежити, якщо звернути увагу на те, що до пожежно-рятувальних операцій віддавна залучають легкові автомобілі, рис. 1. Саме такими пожежними автомобілями можна, зокрема, суттєво вплинути на вільний перебіг (розвиток) пожежі – особливо, коли вода і піноутвірні засоби можна буде черпати із зовнішніх резервуарів. Якнайвищою динамічністю мають бути наділені, перш за все, рятувального, вогнегасного, розвідувального, штабного призначення легкові автомобілі, особливо в умовах міської інфраструктури. Саме завдяки їм оперативно-тактична діяльність пожежно-рятувальної служби має підстави стати організаційно якнайефективнішою. Але і від важких пожежних автомобілів доцільно вимагати якнайменших так званих динамічних габаритів, наділяючи їх екстремальними розгінними та гальмівними властивостями. Виявляється [1], висока динамічність позитивно позначається навіть на енергетичній ощадливості та екологічності автомобіля. Для прикладу на рис. 2 зображено загальний вигляд так званого пожежного сонерт-автомобіля, від якого окрім динамічності «вимагають» цілковитої екологічності. Таке бачення пожежного автомобіля майбутнього заслуговує особливої поваги.

Зважають [2, 3], що для підвищення інтенсивності (динамічності) гальмування, приміром, необхідно (коли нема загрози втрати курсової стійкості руху) утримувати проковзування  $s$  коліс в якнайвужчому околі значення  $s_{\mu}$ , відповідного максимальному значенню  $\mu_m$  коефіцієнта зчеплення  $\mu$  (рис. 3:  $OA$  – ділянка стійких проковзувань,  $AB$  – ділянка нестійких проковзувань,  $B$  – точка, що відповідає блокованому стану колеса;  $s = (v - \omega r_0) / v$  [4],  $v$  – швидкість руху автомобіля,  $\omega$  – швидкість обертання колеса,  $r_0$  – теоретичний радіус

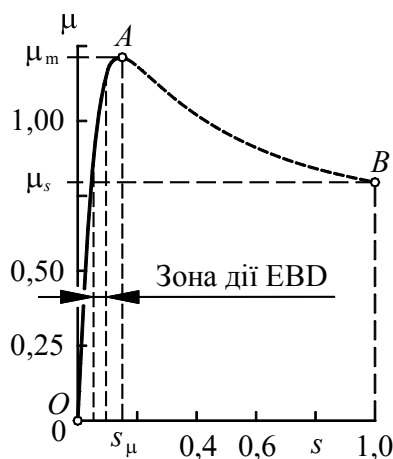
колеса;  $\mu_s < \mu_m$  – коефіцієнт тертя ковзання). Звісно, таку складну операцію доручають електронній ABS (Anti-lock Break System – блокувальна гальмова система).



*Рис. 1. Швидкісні пожежні машини з різних часів*



*Рис. 2. Концепційне бачення пожежного автомобіля*



*Рис. 3. Приклад гальмівної характеристики колеса*

Вважають також за доцільне [2, 3, 5–7] регулювати гальмівні сили відповідно до вертикальних динамічних навантажень на мостах автомобіля так, аби урівняти проковзування всіх коліс (а радше коліс різних мостів), запобігаючи при цьому надмірній втраті їх зчеплення з долівкою. Надання пристроєві штибу ABS додаткових функцій урівнювання проковзування передніх і задніх коліс призвело до виникнення пристрою, званого EBD (Electronic Break-Force Distribution – електронне розподілення сил гальмування; на позначення цього пристрою використовують також інші назви та аббревіатури). Пристрій EBD, виконуючи функції регулятора гальмівних сил, покладається на сигнали про швидкості обертання коліс, що надходять від ABS і визначає різницю між проковзуваннями передніх і задніх коліс. Якщо ця різниця перевищує заданий поріг, настає відповідне зменшення робочих зусиль в гальмових механізмах заднього моста.

У разі розгону автомобіля контролювати й запобігати надмірному проковзуванню коліс покликана система ASR (англ. Anti Skid Regulation, нім. Anti-Schlupf Regulierung – протиковзне регулювання; її ще називають Traction Control System (TCS) – система контролю тяги). Принцип роботи системи ASR (TCS) спирається на ту саму «ідеологію», що й принцип роботи ABS.

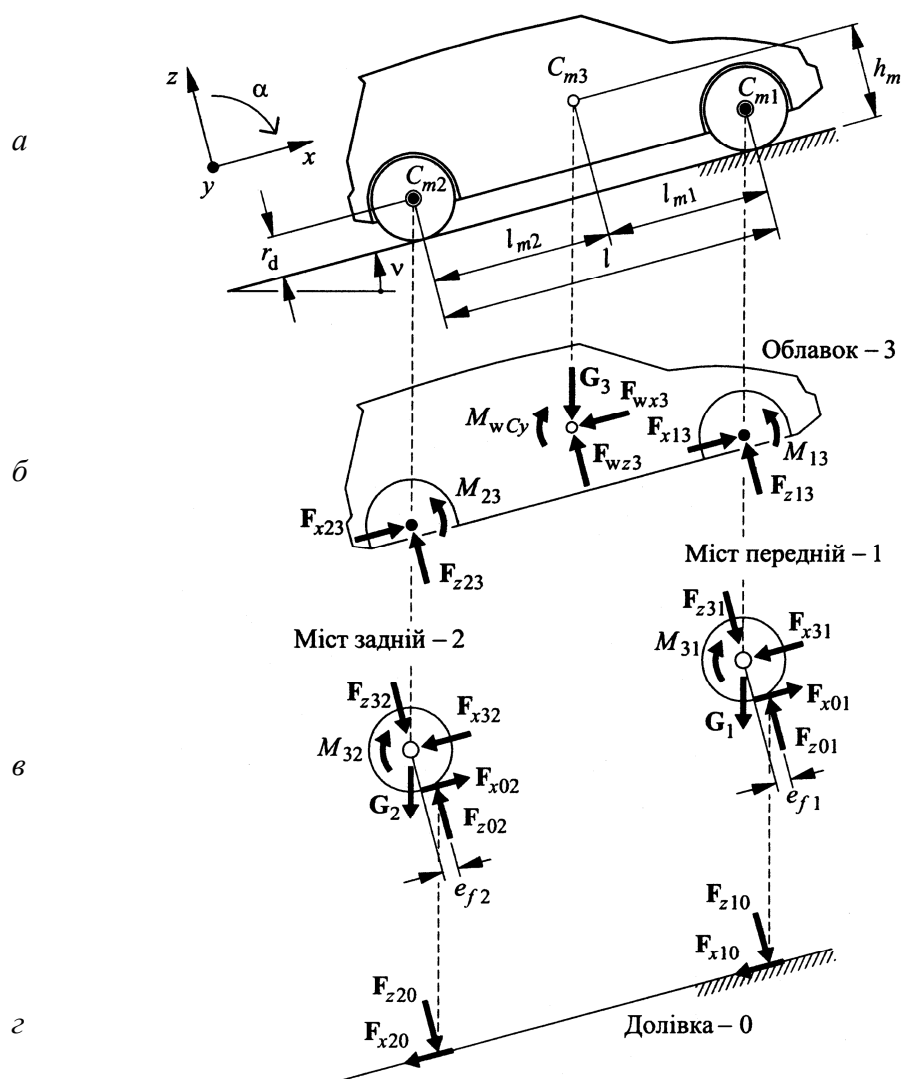
Але згадана «ідеологія» в більшій мірі визріла суто на евристичних началах. А якщо спираючись на точні аналітичні міркування, піддати сумніву твердження про те, що екстремальність розгону та гальмування пожежного (чи будь-якого іншого) автомобіля досягається саме при максимальних значеннях коефіцієнта зчеплення? Може статись, що існують непомічені раніше можливості підвищення динамічності автомобіля. Тож визріла мета статті: 1) сформулювати задачу екстремального керування розгоном та гальмуванням автомобіля в точних аналітичних термінах та 2) з'ясувати чи у всіх обставинах максимальне в кожну мить часу зчеплення коліс з долівкою – запорука екстремальної динамічності автомобіля.

**Модель автомобіля.** Розглядатимемо екстремально динамічні режими прямолінійного руху автомобіля. За приклад візьмімо двовісний автомобіль, рис. 4, який поділено на три основні частини – передній колісний міст (1), задній колісний міст (2), облавок (3); долівку (дорогу) позначено через 0. Йдеться про пласку модель, у яку закладено однаковість тягових чи гальмівних сил на лівому та правому колесах кожного моста. Вісь  $x$  ортогональної  $x - y - z$ -системи координат вказує напрям руху автомобіля; координатна вісь  $y$  спрямована перпендикулярно до площини рисунка у бік читача (її орієнтацію підказує також вказаний на рисунку додатний напрям відліку кута  $\alpha$  – відлік кута здійснюється за годинниковою стрілкою, якщо дивитися проти напрямку осі  $y$ ); координатна вісь  $z$  перпендикулярна до долівки. Тож кожній виокремленій частині автомобіля можна поставити у відповідність три рівняння руху штибу

$$m\ddot{x} = (\text{Сума сил, що діють у напрямі } x),$$

$$m\ddot{z} = (\text{Сума сил, що діють у напрямі } z),$$

$$I\ddot{\alpha} = (\text{Сума моментів сил відносно якогось центра (приміром, центра мас)}).$$



**Рис. 4.** Силowie чинники, що діють на автомобіль:

*a* – розташування центрів мас; *б* – сили й моменти, що діють на облавок автомобіля;

*в* – сили й моменти, що діють на колеса; *г* – сили, що діють на долівку

Вектори сил позначатимемо вертикальними потовщеними буквами, а модулі цих векторів – звичайними нахиленими однойменними буквами. Приміром,  $\mathbf{F}$  – це вектор сили, а  $F$  – його модуль. Нехтуватимемо, як це роблять зазвичай у подібних задачах, можливими деформаціями підвіски й еластичних коліс. Отож (див. рис. 4):  $\mathbf{F}_{x13} = -\mathbf{F}_{x31}$ ,  $\mathbf{F}_{x23} = -\mathbf{F}_{x32}$ ,  $\mathbf{F}_{z13} = -\mathbf{F}_{z31}$ ,  $\mathbf{F}_{z23} = -\mathbf{F}_{z32}$  – сили, якими взаємодіють колеса й облявок;  $\mathbf{F}_{x01} = -\mathbf{F}_{x10}$ ,  $\mathbf{F}_{z01} = -\mathbf{F}_{z10}$ ,  $\mathbf{F}_{z02} = -\mathbf{F}_{z20}$ ,  $\mathbf{F}_{x02} = -\mathbf{F}_{x20}$  – сили, якими взаємодіють колеса й долівка;  $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{G}_3$  – сили ваги переднього моста, заднього моста, облявка;  $\mathbf{F}_{wx}$  і  $\mathbf{F}_{wz}$  – аеродинамічні сили – сила лобового опору і сила підймальна, зведені до центра мас облявка  $C_{m3}$ , від якого зазвичай мало відхиляється центр мас  $C_m$  автомобіля загалом. При цьому  $F_{x13} = |\mathbf{F}_{x13}| = |\mathbf{F}_{x31}| = F_{x31}$ ,  $F_{x23} = |\mathbf{F}_{x23}| = |\mathbf{F}_{x32}| = F_{x32}$ ,  $F_{z13} = |\mathbf{F}_{z13}| = |\mathbf{F}_{z31}| = F_{z31}$ ,  $F_{z23} = |\mathbf{F}_{z23}| = |\mathbf{F}_{z32}| = F_{z32}$ ,  $F_{x01} = |\mathbf{F}_{x01}| = |\mathbf{F}_{x10}| = F_{x10}$ ,  $F_{z01} = |\mathbf{F}_{z01}| = |\mathbf{F}_{z10}| = F_{z10}$ ,  $F_{x02} = |\mathbf{F}_{x02}| = |\mathbf{F}_{x20}| = F_{x20}$ ,  $F_{z02} = |\mathbf{F}_{z02}| = |\mathbf{F}_{z20}| = F_{z20}$ . Активними силовими чинниками є обертальні моменти  $M_{13} = M_{31}$ ,  $M_{23} = M_{32}$ , якими взаємодіють облявок і колеса. Не треба забувати й про можливість існування аеродинамічного моменту, величина якого залежить від точки зведення аеродинамічних силових чинників;  $M_{wy3} = M_{wcy}$  – аеродинамічний момент, який доводиться прикладати до облявка автомобіля у разі зведення сил  $\mathbf{F}_{wx}$  і  $\mathbf{F}_{wz}$  до центра мас  $C_{m3}$  ( $M_{wy3} = 0$  тільки у разі прикладання сил  $\mathbf{F}_{wx}$  і  $\mathbf{F}_{wz}$  у центрі вітрильності облявка). Вплив аеродинамічних чинників на рух коліс не обліковуватимемо. Рівняння моментів укладатимемо відносно центрів мас мостів  $C_{m1}$ ,  $C_{m2}$  (у першому наближенні зносячи їх на осі коліс) та облявка  $C_{m3}$  (ототожнюючи його, часом, з центром маси автомобіля).

Відтак виникають підстави рівняння руху основних частин автомобіля подати у вигляді (див. рис. 4):

а) облявок 3 автомобіля (маса облявка –  $m_3$ , вага –  $G_3 = m_3g$ , координати центра маси –  $l_{m1}$ ,  $l_{m2}$ ,  $h_m$ , див. рис. 4а і б)

$$m_3 \ddot{x}_3 = m_3 \dot{v}_3 = m_3 v = F_{x13} + F_{x23} - G_3 \sin v - F_{wx}, \quad (1)$$

$$0 = F_{z13} + F_{z23} - G_3 \cos v + F_{wz}, \quad (2)$$

$$0 = -(F_{x13} + F_{x23})(h_m - r_d) - F_{z13} l_{m1} + F_{z23} l_{m2} - (M_{13} + M_{23}) + M_{wcy}; \quad (3)$$

б) передній міст 1 (див. рис. 4а і в: маса моста –  $m_1$ , вага –  $G_1 = m_1g$ , момент інерції –  $I_1$ , опір коченню характеризується зміщенням  $e_{f1}$  реакції долівки)

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 \dot{v}_1 = m_1 v = F_{x01} - F_{x31} - G_1 \sin v, \quad (4)$$

$$0 = F_{z01} - F_{z31} - G_1 \cos v, \quad (5)$$

$$I_1 \ddot{\alpha}_1 = I_1 \dot{\omega}_1 = M_{31} - F_{x01} r_d - F_{z01} e_{f1}; \quad (6)$$

в) задній міст 2 (див. рис. 4а і в: маса моста –  $m_2$ , вага –  $G_2 = m_2g$ , момент інерції –  $I_2$ , опір коченню характеризує зміщення  $e_{f2}$ )

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 \dot{v}_2 = m_2 v = F_{x02} - F_{x32} - G_2 \sin v, \quad (7)$$

$$0 = F_{z02} - F_{z32} - G_2 \cos v, \quad (8)$$

$$I_2 \ddot{\alpha}_2 = I_2 \dot{\omega}_2 = M_{32} - F_{x02} r_d - F_{z02} e_{f2}, \quad (9)$$

Рівняння записані з використанням позначень:

$$\dot{\dots} = \frac{d\dots}{dt}; \quad \ddot{\dots} = \frac{d^2\dots}{dt^2};$$

$t$  – час;  $v$  – узвіз;  $g$  – гравітаційне прискорення;  $v$  – швидкість руху автомобіля;  $\omega_1$  і  $\omega_2$  – швидкості обертання передніх і задніх коліс.

Додаючи рівняння (1), (4) і (7), знаходимо

$$m_1\dot{v}_1 + m_2\dot{v}_2 + m_3\dot{v}_3 = F_{x01} + F_{x02} - (G_1 + G_2 + G_3) \sin v - F_{wx}$$

чи

$$F_{x01} + F_{x02} = G \left( \frac{\dot{v}}{g} + \sin v \right) + F_{wx},$$

де  $m = m_1 + m_2 + m_3$  – маса автомобіля,  $G = G_1 + G_2 + G_3$  – вага автомобіля. Додаючи ж рівняння (2), (5), (8), дійдемо рівності

$$F_{z01} + F_{z02} - G \cos v + F_{wz} = 0.$$

Принципово важливими є співвідношення

$$F_{x01} = \mu_1 F_{z01}, \quad F_{x02} = \mu_2 F_{z02}, \quad (10)$$

у яких  $\mu_1$  і  $\mu_2$  – коефіцієнти зчеплення передніх і задніх коліс з долівкою (вважають, що  $\mu_1 = \mu_1(v, \omega_1)$ ,  $\mu_2 = \mu_2(v, \omega_2)$ ). Вони характеризують потенційні можливості реалізації тягових (гальмівних) властивостей автомобіля.

**Синхронна динаміка.** Можна наперед обумовити, що в процесі розгону (гальмування) автомобіля програми зміни лінійної швидкості руху облавка і швидкостей обертання коліс якимось взаємопов'язані. Приміром, логічно припустити:

$$v/\omega_1 = r_{k1} = \text{const}, \quad v/\omega_2 = r_{k2} = \text{const} \quad (11)$$

( $r_{k1}$  і  $r_{k2}$  – так звані радіуси кочення передніх і задніх коліс). В такому разі динаміку руху автомобіля доречно назвати синхронною.

Згуртуймо, враховуючи (10) та співвідношення синхронності (11), рівняння (2)–(9) в окрему систему алгебричних співвідношень

$$\begin{aligned} F_{z13} + F_{z23} &= G_3 \cos v - F_{wz}, \\ -(F_{x13} + F_{x23})(h_m - r_d) - F_{z13} l_{m1} + F_{z23} l_{m2} - M_{13} - M_{23} &= -M_{wcy}, \\ (G_1 + G_3)F_{x13} + G_1 F_{x23} - \mu_1 G_3 F_{z01} &= G_1 F_{wx}, \\ F_{z01} - F_{z13} &= G_1 \cos v, \\ G_2 F_{x13} + (G_2 + G_3)F_{x23} - \mu_2 G_3 F_{z02} &= G_2 F_{wx}, \\ F_{z02} - F_{z23} &= G_2 \cos v, \\ F_{x13} + F_{x23} - \frac{r_{k1} m_3}{I_1} [M_{13} - (\mu_1 r_d + e_{f1}) F_{z01}] &= G_3 \sin v + F_{wx}, \\ F_{x13} + F_{x23} - \frac{r_{k2} m_3}{I_2} [M_{23} - (\mu_2 r_d + e_{f2}) F_{z02}] &= G_3 \sin v + F_{wx}, \end{aligned} \quad (12)$$

а величині (прискоренню облавка)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_{x13} + F_{x23}}{m_3} - \frac{G_3 \sin v + F_{wx}}{m_3}, \quad (13)$$

(див. (1)) надаймо статус критерію динамічності.

Система (12) дає змогу визначити величини  $F_{x13}$ ,  $F_{x23}$  у формі

$$F_{x13} = \frac{D_1}{D_0}, \quad F_{x23} = \frac{D_2}{D_0}, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned}
D_0 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(h_m - r_d) & -(h_m - r_d) & -l_{m1} & l_{m2} & 0 & 0 & -1 & -1 \\ G_1 + G_3 & G_1 & 0 & 0 & -G_3\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ G_2 & G_2 + G_3 & 0 & 0 & 0 & -G_3\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{r_{k1}G_3}{I_1g}(\mu_1r_d + e_{f1}) & 0 & -\frac{r_{k1}G_3}{I_1g} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{k2}G_3}{I_2g}(\mu_2r_d + e_{f2}) & 0 & -\frac{r_{k2}G_3}{I_2g} \end{vmatrix}, \\
D_1 &= \begin{vmatrix} G_3 \cos v - F_{wz} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M_{wcy} & -(h_m - r_d) & -l_{m1} & l_{m2} & 0 & 0 & -1 & -1 \\ G_1 F_{wx} & G_1 & 0 & 0 & -G_3\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ G_1 \cos v & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ G_2 F_{wx} & G_2 + G_3 & 0 & 0 & 0 & -G_3\mu_2 & 0 & 0 \\ G_2 \cos v & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ G_3 \sin v + F_{wx} & 1 & 0 & 0 & \frac{r_{k1}G_3}{I_1g}(\mu_1r_d + e_{f1}) & 0 & -\frac{r_{k1}G_3}{I_1g} & 0 \\ G_3 \sin v + F_{wx} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{k2}G_3}{I_2g}(\mu_2r_d + e_{f2}) & 0 & -\frac{r_{k2}G_3}{I_2g} \end{vmatrix}, \\
D_2 &= \begin{vmatrix} 0 & G_3 \cos v - F_{wz} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(h_m - r_d) & -M_{wcy} & -l_{m1} & l_{m2} & 0 & 0 & -1 & -1 \\ G_1 + G_3 & G_1 F_{wx} & 0 & 0 & -G_3\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 \cos v & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ G_2 & G_2 F_{wx} & 0 & 0 & 0 & -G_3\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 \cos v & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & G_3 \sin v + F_{wx} & 0 & 0 & \frac{r_{k1}G_3}{I_1g}(\mu_1r_d + e_{f1}) & 0 & -\frac{r_{k1}G_3}{I_1g} & 0 \\ 1 & G_3 \sin v + F_{wx} & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{k2}G_3}{I_2g}(\mu_2r_d + e_{f2}) & 0 & -\frac{r_{k2}G_3}{I_2g} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Очевидно, що прискорення (13) при кожному значенні  $v$  задовольнятиме умову екстремальності

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_{x13} + F_{x23}}{m_3} - \frac{G_3 \sin v + F_{wx}}{m_3} \rightarrow \text{extremum}$$

в тому разі, коли чинною буде умова (див. (14))

$$F_{x13} + F_{x23} = F = \frac{D_1 + D_2}{D_0} = \frac{D}{D_0} \rightarrow \text{extremum}, \tag{16}$$

де (див. (15))

$$D = D_1 + D_2 =$$

$$= G_3 \begin{vmatrix} G_3 \cos v - F_{wz} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M_{wcy} & 0 & -l_{m1} & l_{m2} & 0 & 0 & -1 & -1 \\ G_1 F_{wx} & -1 & 0 & 0 & -G_3 \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ G_1 \cos v & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ G_2 F_{wx} & 1 & 0 & 0 & 0 & -G_3 \mu_2 & 0 & 0 \\ G_2 \cos v & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ G_3 \sin v + F_{wx} & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{k1} G_3}{I_1 g} (\mu_1 r_d + e_{f1}) & 0 & -\frac{r_{k1} G_3}{I_1 g} & 0 \\ G_3 \sin v + F_{wx} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{k2} G_3}{I_2 g} (\mu_2 r_d + e_{f2}) & 0 & -\frac{r_{k2} G_3}{I_2 g} \end{vmatrix} \quad (17)$$

**Умови оптимальності.** Вважаючи формально функцію  $F = D/D_0$  ( $D_0 \neq 0$ ) диференційовною необхідну кількість разів і застосовуючи операцію диференціювання до тотожності  $D_0 F = D$ , укладімо три системи співвідношень:

$$\left. \begin{aligned} D_0 \frac{\partial F}{\partial r_{k1}} + 0 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1}^2} &= \frac{\partial D}{\partial r_{k1}} - \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} F = \frac{\partial D}{\partial r_{k1}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}}, \\ 2 \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} \frac{\partial F}{\partial r_{k1}} + D_0 \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1}^2} &= \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2} F = \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 \frac{\partial F}{\partial r_{k2}} + 0 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k2}^2} &= \frac{\partial D}{\partial r_{k2}} - \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} F = \frac{\partial D}{\partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}}, \\ 2 \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} \frac{\partial F}{\partial r_{k2}} + D_0 \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k2}^2} &= \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2} F = \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 \frac{\partial F}{\partial r_{k1}} + 0 \cdot \frac{\partial F}{\partial r_{k2}} + 0 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} &= \frac{\partial D}{\partial r_{k1}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}}, \\ 0 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1}^2} + D_0 \frac{\partial F}{\partial r_{k2}} + 0 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} &= \frac{\partial D}{\partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}}, \\ \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} \frac{\partial F}{\partial r_{k1}} + \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} \frac{\partial F}{\partial r_{k2}} + D_0 \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} &= \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Тракуватимемо їх як системи лінійних рівнянь: першу – відносно величин  $\frac{\partial F}{\partial r_{k1}}$  і  $\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1}^2}$ ; другу – відносно величин  $\frac{\partial F}{\partial r_{k2}}$  і  $\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k2}^2}$ ; третю – відносно величин  $\frac{\partial F}{\partial r_{k1}}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial r_{k2}}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}}$ .

В такому разі системи (18) – (20) дають змогу знайти похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1}^2} = \frac{\begin{vmatrix} D_0 & \frac{\partial D}{\partial r_{k1}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} \\ 2 \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} & \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_0 & 0 \\ 2 \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} & D_0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{D_0^2} \begin{vmatrix} D_0 & \frac{\partial D}{\partial r_{k1}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} \\ 2 \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} & \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2} \end{vmatrix}, \quad (21)$$



$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k2}^2} = \frac{\begin{vmatrix} D_0 & \frac{\partial D}{\partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} \\ 2 \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} & \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_0 & 0 \\ 2 \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} & D_0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{D_0^2} \begin{vmatrix} D_0 & \frac{\partial D}{\partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} \\ 2 \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} & \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2} \end{vmatrix}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} &= \begin{vmatrix} D_0 & 0 & \frac{\partial D}{\partial r_{k1}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} \\ 0 & D_0 & \frac{\partial D}{\partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} \\ \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} & \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} & \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} D_0 & 0 & 0 \\ 0 & D_0 & 0 \\ \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} & \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} & D_0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{D_0^3} \begin{vmatrix} D_0 & 0 & \frac{\partial D}{\partial r_{k1}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} \\ 0 & D_0 & \frac{\partial D}{\partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} \\ \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} & \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} & \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

За необхідні умови оптимальності правлять рівності

$$\frac{\partial F}{\partial r_{k1}} = 0 \text{ і } \frac{\partial F}{\partial r_{k2}} = 0,$$

звідки (див. (18) і (19))

$$D_0 \frac{\partial F}{\partial r_{k1}} = \frac{\partial D}{\partial r_{k1}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} = 0, \quad D_0 \frac{\partial F}{\partial r_{k2}} = \frac{\partial D}{\partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial D_0}{\partial r_{k2}} = 0, \quad (24)$$

а тому співвідношення (21) – (23), набувають вигляду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1}^2} = \frac{1}{D_0} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2} \right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k2}^2} = \frac{1}{D_0} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2} \right), \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} = \frac{1}{D_0} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} \right). \quad (27)$$

Аби справджувалась умова екстремальності (16), поряд з рівностями (24) повинна справджуватися й нерівність

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{k1}^2} \frac{D}{D_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r_{k2}^2} \frac{D}{D_0} - \left( \frac{\partial^2}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} \frac{D}{D_0} \right)^2 > 0$$

тобто нерівність (див. (25)–(27))

$$\left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} \right)^2 > 0. \quad (28)$$

Саме в такому разі прискорення автомобіля буде найбільшим додатним (режим екстремального розгону), коли

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1}^2} = \frac{1}{D_0} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2} \right) < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k2}^2} = \frac{1}{D_0} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2} \right) < 0, \quad (29)$$

чи найменшим від'ємним (режим екстремального гальмування), коли

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_{k1}^2} = \frac{1}{D_0} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2} \right) > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r_{k2}^2} = \frac{1}{D_0} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2} \right) > 0. \quad (30)$$

**Аналітичні міркування.** Досліджуючи структуру виразів (див. (15), (17))

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{G_3^3}{g} \left( \frac{r_{k1}}{I_1} \frac{r_{k2}}{I_2} \left( \frac{G_3}{g} (h_m - r_d) + \frac{G}{g} r_d \right) + \frac{r_{k2}}{I_2} + \frac{r_{k1}}{I_1} \right) (\mu_2 - \mu_1) - \frac{r_{k1}}{I_1} \frac{r_{k2}}{I_2} \frac{G_3^3}{g^2} G (l - (e_{f2} - e_{f1})), \\ D &= -\frac{G_3^3}{g^2} \frac{r_{k1}}{I_1} \frac{r_{k2}}{I_2} \left( l(G_1 + G_2)F_{wx} + G_3\mu_1 \begin{vmatrix} G_3 \cos v - F_{wz} & 1 & 1 \\ -M_{wc y} & -l_{m1} & l_{m2} \\ G_1 \cos v & -1 & 0 \end{vmatrix} + \right. \\ &+ G_3\mu_2 \left. \begin{vmatrix} G_3 \cos v - F_{wz} & 1 & 1 \\ -M_{wc y} & -l_{m1} & l_{m2} \\ G_2 \cos v & 0 & -1 \end{vmatrix} \right) + \frac{G_3^3}{g^2} \frac{r_{k1}}{I_1} \frac{r_{k2}}{I_2} (G_1 + G_2)F_{wx} ((\mu_2 - \mu_1)r_d + (e_{f2} - e_{f1})) + \\ &+ \frac{G_3^3}{g} \left( \frac{r_{k2}}{I_2} + \frac{r_{k1}}{I_1} \right) (G_3 \sin v + F_{wx})(\mu_2 - \mu_1) + \frac{G_3^3}{g^2} \frac{r_{k1}}{I_1} \frac{r_{k2}}{I_2} G_3 (G \cos v - F_{wz})(\mu_1 e_{f2} - \mu_2 e_{f1}), \quad (31) \end{aligned}$$

спробуймо з'ясувати, чи справді умови екстремальності розгону та гальмування автомобіля зобов'язують дотримуватись динамічних режимів, яким властиві максимальні значення коефіцієнтів  $\mu_1(r_{k1})$ ,  $\mu_2(r_{k2})$  зчеплення коліс з долівкою. Для прикладу оцінюватимемо процес розгону автомобіля.

Тож вважатимемо, що: максимум  $\mu_1 = \mu_{1m}$  у разі  $r_{k1} = r_{k1\mu}$ ; максимум  $\mu_2 = \mu_{2m}$  у разі

$$r_{k2} = r_{k2\mu}; \quad \frac{\partial^2 \mu_1(r_{k1\mu})}{\partial r_{k1}^2} = \mu''_{1m} < 0, \quad \frac{\partial^2 \mu_2(r_{k2\mu})}{\partial r_{k2}^2} = \mu''_{2m} < 0 \quad (\text{можливий перебіг тягової характеристики}$$

колеса ілюструє рис. 5:  $r_0$  — теоретичний радіус кочення колеса, при якому проковзування колеса ніби зникає; характеристика калібрована відповідно до гальмівної характеристики, наведеної на рис. 3). Процес розгону на режимах граничного зчеплення коліс з долівкою іде-

нтифікують співвідношення  $\frac{\partial \mu_1(r_{k1\mu})}{\partial r_{k1}} = \frac{\partial \mu_2(r_{k2\mu})}{\partial r_{k2}} = \mu'_m = 0$ . Якщо цей процес, до того ж, екстремальний, то повинні справджуватись й умови (24), (29) (у разі гальмування — (30)), (28). У разі чинності рівностей (31) умови (24) набувають одного і того самого вигляду

$$\left( \frac{D}{D_0} - (G_3 \sin v + F_{wx}) \right) (\mu_{2m} - \mu_{m1}) = 0,$$

звідки випливає, що або  $D/D_0 \equiv (G_3 \sin v + F_{wx})$ , або  $\mu_{m1} = \mu_{2m}$ .

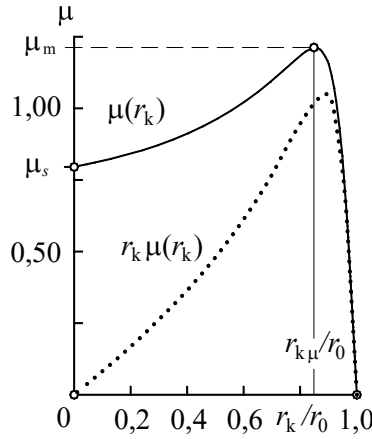


Рис. 5. Приклад тягової характеристики колеса

Перша обставина – тривіальна: вона ідентифікує не розгін (чи гальмування), а усталений рух автомобіля ( $v = \text{const}$ , див. (13)). Отже умови  $\mu_1 \equiv \max \mu_1 = \mu_{1m}$  і  $\mu_2 \equiv \max \mu_2 = \mu_{2m}$  ідентифікують екстремальний розгін (гальмування) пожежного автомобіля тільки в тому разі, коли  $\mu_{m1} = \mu_{2m} = \mu_m$ .

Оскільки (див. (31))

$$D_0 = -\frac{r_{k1\mu}}{I_1} \frac{r_{k2\mu}}{I_2} \frac{G_3^3}{g^2} G(l - (e_{f2} - e_{f1})) < 0,$$

$$D = -\frac{G_3^3}{g^2} \frac{r_{k1\mu}}{I_1} \frac{r_{k2\mu}}{I_2} ((G_1 + G_2)F_{wx}(l - (e_{f2} - e_{f1})) +$$

$$+ (l(G_1 + G_2)\cos v G_3 + (G_3 \cos v - F_{wz})G_3(l - (e_{f2} - e_{f1})))\mu_m),$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1} \partial r_{k2}} \equiv 0,$$

то вираз (28) набуває вигляду

$$\left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2} \right) > 0. \quad (32)$$

Отож для ідентифікації оптимального процесу достатньо керуватись лише умовами (29) – у разі розгону автомобіля (чи (30) – у разі гальмування). Це означає, зокрема, що величини

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k1}^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2}$$

мають мати однакові знаки: оскільки  $D_0 < 0$ , то  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$  – коли йдеться про процес розгону (і  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 < 0$  – коли йдеться про процес гальмування).

Умова  $\mu_{m1} = \mu_{2m} = \mu_m$  є відносно слабкою. Можна, приміром, стверджувати, що внаслідок неї набувають чинності співвідношення (див. (31))

$$\frac{\partial D_0}{\partial r_{k1}} = \frac{r_{k2}}{r_{k1}}, \quad \frac{\partial^2 D_0}{\partial r_{k2}^2} = -\frac{\mu_{2m}''}{\mu_{1m}''}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k2}^2} \frac{1}{\mu_{2m}''} + \frac{\partial^2 D}{\partial r_{k1}^2} \frac{1}{\mu_{1m}''} = -\frac{G_3^3}{g^2} \frac{r_{k1\mu}}{I_1} \frac{r_{k2\mu}}{I_2} G_3 (G \cos v - F_{wz}) (l - (e_{f2} - e_{f1})) < 0.$$

Але вона не вимагає аби справджувались, скажімо, такі рівності, як от  $r_{k1\mu} = r_{k2\mu}$ ,  $I_1 = I_2 = I$ ,  $e_{f2} = e_{f1} = e_f$ . Здається, що характеристики передніх і задніх коліс не конче мають бути однаковими. Проте не слід забувати про обов'язковість дотримання додаткової умови (32).

**Резюме.** Задача екстремального керування розгоном та гальмуванням пожежного автомобіля, сформульована в точних аналітичних термінах, виявилася надзвичайно прозорою. Винятком є, хіба що, умови оптимальності штибу нерівностей, які «читати» важко. Вдалося з'ясувати, що максимальне в кожному мить часу зчеплення коліс з долівкою є запорукою екстремальної динамічності пожежного автомобіля тільки у разі однакових граничних значень коефіцієнтів зчеплення з долівкою і задніх, і передніх коліс. Під практичним кутом зору цей висновок цілком прийнятний: якщо вдалося досягнути кращих зчепних властивостей на передніх (задніх) колесах, то чому б цими корисними властивостями не наділити задні (передні) колеса?..

Як впливає з викладеного, програму найдинамічнішого розгону автомобіля відбиває в собі рівняння

$$m_3 \frac{dv}{dt} = \left( \frac{G_1 + G_2}{G} F_{wx} + \left( \frac{l}{l - (e_{f2} - e_{f1})} \frac{(G_1 + G_2) G_3}{G} \cos v + \frac{(G_3 \cos v - F_{wz}) G_3}{G} \right) \mu_m \right) - (G_3 \sin v + F_{wx})$$

( $dv/dt$  – прискорення автомобіля;  $m_3$  – маса облавка;  $G$  – вага автомобіля;  $G_1$  і  $G_2$  – вага переднього та вага заднього мостів;  $G_3$  – вага облавка;  $e_{f1}$  і  $e_{f2}$  – зміщення реакцій долівки на передніх і задніх колесах;  $F_{wx}$  – сила лобового опору повітря;  $v$  – узвіз долівки;  $l$  – база автомобіля;  $\mu_m$  – максимальне значення коефіцієнта зчеплення). Аби отримати рівняння, яке описувало б найдинамічніше гальмування автомобіля, необхідно в модельному описі лише змінити напрями моментів та дотичних сил на колесах.

Екстремальні програми розгону та гальмування – це еталони, які можна втілити тільки у разі достатніх потужності двигуна та потужності гальмової системи, а також за умови оптимального керування цими потужностями. Добута інформація повинна стати в нагоді у процесі визначення-обґрунтування оптимальних (раціональних) параметрів та характеристик двигуна, трансмісії, колісного рушія, гальмової системи. До найважливіших параметрів і характеристик двигуна, скажімо, слід віднести номінальну потужність, максимальний обертальний момент, номінальну частоту обертання вала, зовнішні тягову й гальмівну характеристики, енергоперетворювальну характеристику. Властивості трансмісії визначають, перш за все, передатні відношення – у разі ступеневої скриньки передач, навантажувальна та перетворювальна (трансформаторна) характеристики – у разі варіатора. Властивості гальмової системи залежать від характеристик і параметрів гальмових механізмів та алгоритму роботи ABS, а також у деякій мірі – від властивостей системи ASR. Характеристики «крип-зчеплення» визначають властивості колісного рушія. Тож користь від використання добутої інформації може бути багатогранною.

#### Список літератури:

1. Гащук П. Н. Оптимизация топливно-скоростных свойств автомобиля. – Львов: Вища школа, 1987.– 168 с.
2. Mitschke M., Wallentowitz H. Dynamik der Kraftfahrzeuge.– Springer, 2010.– 709 s.
3. Renski A. Budowa samochodow. Układy hamulcowe i kierownicze oraz zawieszenia. – Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2004.– 208 s.
4. Гащук П. М., Миськів Т. Г. Теорія автомобіля: Колесо.– Львів: Українські технології, 2010.– 254 с.
5. Andrzejewski R., Awrejcewicz J. Nonlinear dynamics of a wheeled vehicle.– New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005.– 328 p.
6. Jazar R. N. Vehicle Dynamics: Theory and Application.– New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008.– 1015 p.
7. Kraftfahrtechnisches Taschenbuch / Bosch. [Chefred.: Horst Bauer].– 23., aktualisierte und erw. Aufl.– Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1999.– 960 s. (Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme).

## **ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ДИНАМИКА РАЗГОНА И ТОРМОЖЕНИЯ ПОЖАРНОГО АВТОМОБИЛЯ**

Приводятся аргументы, которые свидетельствуют об особой значимости динамических свойств пожарного автомобиля. Рассматривается модельное описание динамики продольного прямолинейного движения пожарного автомобиля. На основании этого описания в самой общей аналитической форме определены необходимые и достаточные условия экстремальной динамичности процессов разгона и торможения пожарного автомобиля. Подчеркивается, что традиционно экстремальную динамичность связывают с реализацией максимального сцепления колес с дорогой. Вместе с тем показано, что оптимальное проскальзывание колес как раз и не соответствует максимальному значению коэффициента сцепления колес с дорогой. Поэтому возникает потребность более глубокого изучения возможностей интенсификации процессов разгона и торможения.

**Ключевые слова:** пожарный автомобиль, динамика продольного движения, разгон, торможение, условия экстремальной динамичности.

*L.P. Hashchuk, P.M. Hashchuk*

## **FIRE TRUCKS EXTREME ACCELERATION AND BRAKING DYNAMICS**

The research provides facts that confirm the utmost importance of the dynamic properties of fire trucks. The model description of the dynamics of longitudinal rectilinear movement of fire vehicle was presented. Based on this description in the most general analytical form the necessary and sufficient factors of fire trucks' extreme acceleration and braking dynamics were determined. It is noted that the traditional extreme dynamism is associated with the implementation of the maximum adhesion with the road. Instead, it is shown that the optimal wheel slip does not always depend on maximum value of the coefficient of adhesion with the road. Therefore there is a need for a more profound study of the opportunities to intensify the process of acceleration and deceleration.

**Key words:** fire truck, the dynamics of longitudinal motion, acceleration, braking, conditions of extreme dynamics.

