

*К. С. Іванків, канд. фіз.-мат. наук, доцент
(Львівський національний університет імені Івана Франка)*

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМ ТЕМПЕРАТУРНИМ РЕЖИМОМ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ

Представлено математичну модель задачі оптимізації процесу теплопровідності для термочутливих тіл із внутрішніми джерелами тепла та складним теплообміном на границі. Процес керування температурним режимом тіла відбувається за допомогою внутрішніх (керування передбачено у рівнянні) і зовнішніх (керування передбачено у граничних умовах) джерел тепла.

Ключові слова: оптимальне керування, нестационарний температурний режим, термочутливе тіло, методи розщеплення.

Актуальність теми. Оптимізація технологічних процесів нагрівання елементів конструкцій і вузлів під час їхнього виготовлення та експлуатації пов'язана з визначенням функцій керування – внутрішніх чи зовнішніх джерел тепла, а також забезпеченням при цьому відповідних критеріїв оптимальності – мінімуму часу нагрівання, мінімальних затрат енергії, заданого розподілу температури або термонапружень наприкінці режиму нагрівання. Крім того, технологічні процеси нагрівання передбачають необхідність виконання додаткових обмежень на параметри температурного режиму – максимальну чи мінімальну температуру тіла, максимальний перепад температури, максимальний градієнт температурного поля, середньо-інтегральну температуру в тілі та інші характеристики.

Здебільшого дослідження задач оптимального керування нестационарними температурними режимами здійснювали у лінійній постановці для одновимірного випадку. У зв'язку з тим, що останнім часом набули поширення неоднорідні матеріали, а також матеріали, фізико-механічні характеристики яких залежать від температури, актуальними є задачі оптимального за швидкістю керування нестационарними температурними режимами у багатовимірних термочутливих тілах.

Постановка задачі. Розглянемо термочутливе тіло, яке моделює елемент електронного пристрою і займає однозв'язну область D з границею Γ тривимірного евклідового простору R^3 . Температурне поле тіла, якщо припустити, що торці $z = -l$ та $z = l$ теплоізолювані, задовольняє початково-крайову задачу теплопровідності [1, 3]

$$c_v(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = W(t, T, x, y), \quad (x, y, t) \in G_\theta = D \times (t_0, \theta); \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = g(x, y, t, T, u_2), \quad (x, y, t) \in S_\theta = \Gamma \times (t_0, \theta); \quad (2)$$

$$T(x, y, t_0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D} = D \cup \Gamma, \quad (3)$$

де n – зовнішня нормаль до граничної поверхні Γ тіла; (x, y) – точка області \bar{D} ; t – час; $W(t, T, x, y) = u_1(t, T) f(x, y)$; $u_1(t, T)$ – характеризує густину внутрішніх теплових джерел; $u_2(t, T)$ – характеризує густину зовнішніх теплових джерел; $f(x, y)$ – функція, що характеризує розміщення теплових джерел; T – температура, К; $\lambda(T)$ – задана функція; $c_v(T) = c(T) \rho(T)$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу (Вт/м·К) і об'ємна теплоємність матеріалу відповідно ($c(T)$ – теплоємність при сталому тиску, Дж/кг·К; ρ – густина матеріалу, кг/м³).

Задачу оптимального керування нагріванням (охолодженням) формулюємо так [2; 6]: необхідно визначити такі функції керування $u_i (i = 1, 2)$, які за обмеження на параметри тем-

пературного поля за час t^* даватимуть змогу перевести тіло з початкової температури (3) до кінцевої, що визначають рівністю

$$RT = T^*, \quad (4)$$

де R – деякий функціонал; $T^* = \text{const}$ – задана температура.

Температурний режим тіла має задовольняти рівнянню (1), граничним умовам (2), початковій умові (3).

Функції керування $u_i (i=1,2)$ не можуть перевищувати деяких гранично-допустимих значень

$$\omega_1^- \leq u_1 \leq \omega_1^+, (x, y, t) \in G_\theta, \quad (5)$$

$$\omega_2^- \leq u_2 \leq \omega_2^+, (x, y, t) \in S_\theta. \quad (6)$$

За інтенсивного нагрівання тіл обмежують параметри температурного поля:

$$\max_D T(x, y, t) \leq v(t, T), t \in [0, t^*], \quad (7)$$

де $v(t, T)$ – задана функція.

З метою забезпечення міцності, однорідності та якості мікроструктурних перетворень задають обмеження на перепад температур

$$\max_D T(x, y, t^*) - \min_D T(x, y, t^*) \leq \delta T, \quad (8)$$

де δT – гранично допустимий перепад температур.

Економічні методи розв'язування задачі нестационарної теплопровідності. Головною складовою частиною оптимального керування є визначення температурного режиму. У випадку, коли кількість просторових змінних у задачах теплопровідності більша або рівна двом, значно зростає об'єм обчислювальної роботи, яку необхідно виконати при числовій реалізації різницевих схем.

З огляду на це, нами використано для розв'язання задачі (1)-(3) локально-одновимірні схеми, які належать до адитивних схем [4; 5].

Розглянемо переріз призматичного тіла (рис.1). Вважатимемо, що торці тіла при $z = -1$ та $z = 1$ теплоізолювані. Тоді у будь-який момент часу температура не залежить від z . Джерело тепла задається у прямокутнику

$$a_1 \leq x \leq a_1 + d_x, b_1 \leq y \leq b_1 + d_y,$$

де

$$0 < d_x \leq a, 0 < d_y \leq b, 0 \leq a_1 \leq a - d_x, 0 \leq b_1 \leq b - d_y.$$

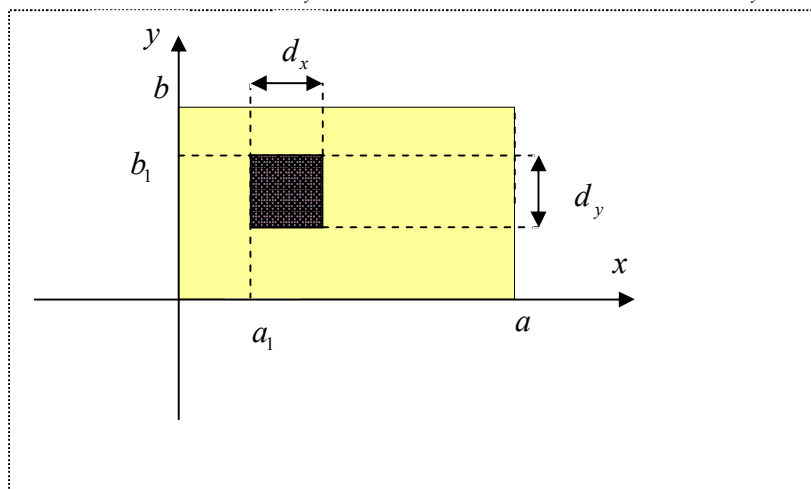


Рис. 1. Поперечний переріз призматичного тіла

$$\begin{aligned} \lambda(T)\beta_{01}\frac{\partial T}{\partial x}-\alpha_{01}T=T_{01}, \quad x=0; \quad \lambda(T)\beta_{11}\frac{\partial T}{\partial x}+\alpha_{11}T=T_{11}, \quad x=a, \\ \lambda(T)\beta_{02}\frac{\partial T}{\partial y}-\alpha_{02}T=T_{02}, \quad y=0; \quad \lambda(T)\beta_{12}\frac{\partial T}{\partial y}+\alpha_{12}T=T_{12}, \quad y=b, \end{aligned} \quad (9)$$

де параметри $\alpha_{ij}(i=0,1; j=1,2)$, $\beta_{ij}(i=0,1; j=1,2)$ набувають значення нуль або один у залежності від типу граничної умови;

$$f(x, y) = [S_-(x - a_1) - S_+(x - (a_1 + d_x))] * [S_-(y - b_1) - S_+(y - (b_1 + d_y))],$$

де S_+ , S_- – асиметричні одиничні функції.

Як засвідчує практика, для реальних задач достатньо взяти квадратичні апроксимації коефіцієнтів $\lambda(T)$, $c_v(T)$, отож покладемо:

$$c_v(T) = c_{v0} + c_{v1}T + c_{v2}T^2; \quad \lambda(T) = \lambda_0 + \lambda_1T + \lambda_2T^2.$$

Дискретизація задачі за просторовими та часовою координатами.

У прямокутнику $\bar{\Omega}$ побудуємо рівномірну по кожному напрямку x_ξ сітку $\bar{\omega}_h = \{x = (x_1, x_2) : x_\xi \in \omega_{h,\xi}, \xi = 1, 2\}$; $\bar{\omega}_{h,\xi} = \{x_\xi = i_\xi h_\xi, i_\xi = 0, 1, \dots, N_\xi, h_\xi = l_\xi / N_\xi\}$, а на відрізку $[0, T_{\max}]$ – сітку $\bar{\omega}_\tau = \{t = t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, M\}$,

де $\tau = T_{\max} / M$ – крок за часом; x_1, x_2 – просторові координати x та y , відповідно.

Апроксимуємо рівняння теплопровідності різницевою схемою з ваговими коефіцієнтами

$$y_t = \alpha\sigma\Lambda\hat{y} + \alpha(1-\sigma)\Lambda y + \frac{1}{c\rho}\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau,$$

де y – шуканий розв'язок; $\alpha = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт теплопровідності; σ – ваговий коефіцієнт;

$$\begin{aligned} y_t = (\hat{y} - y) / \tau; \quad y = y^n = y(x, t_n), \quad \hat{y} = y^{n+1} = y(x, t_{n+1}), \quad x \in \bar{\omega}_h; \\ \varphi = W(x, t_n + 0.5\tau); \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2; \quad \Lambda_\xi y = y_{x_\xi x_\xi}, \quad \xi = 1, 2. \end{aligned}$$

Для розв'язування задачі (1), (9), (3) використаємо локально-одновимірні схеми (ЛОС) [5].

Суть ЛОС полягає в тому, що поряд з основними ярусами t_n , t_{n+1} розглядають проміжний ярус $\bar{t} = t_{n+1/2} = t_n + 0,5\tau$, до якого належить значення розв'язку $\bar{y} = y^{n+1/2}$. Розв'язок \hat{y} на ярусі $t + \tau$ відшукуємо у два етапи:

$$\frac{\bar{y} - y}{\tau} = a\Lambda_1\bar{y} + \frac{1}{c\rho}\varphi_1; \quad (10)$$

$$\frac{\hat{y} - \bar{y}}{\tau} = a\Lambda_2\hat{y} + \frac{1}{c\rho}\varphi_2, \quad (11)$$

де $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ (наприклад, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,5\varphi$), а $\varphi = W(x, t)$.

Кожне з рівнянь (10), (11) не апроксимує диференціальне рівняння (1). Проте сумарна похибка апроксимації прямує до нуля. Крім того, отримана схема абсолютно стійка і має другий порядок точності за h_1, h_2 і перший за τ [5].

Реалізація отриманої ЛОС відбувається за допомогою методу прогонки по поздовжніх і поперечних лініях сітки. Для врахування нелінійності задачі, спричиненої коефіцієнтами рівняння, використано методи простої ітерації та запізнюючих коефіцієнтів і метод лінеаризації за Ньютоном [1]. Використовуючи метод лінеаризації за Ньютоном, різницева схема розглядуваної задачі в індексній формі набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_v(\tilde{y}_{i_2}) \frac{\bar{y}_{i_2} - y_{i_2}}{\tau} = \\
& = \frac{\partial \tilde{\lambda}(\tilde{y}_{i_2})}{\partial y} \left[(\tilde{y}_{i_2+1} - \tilde{y}_{i_2-1}) \frac{\bar{y}_{i_2+1} - \bar{y}_{i_2-1}}{2h_1^2} - \frac{(\tilde{y}_{i_2+1} - \tilde{y}_{i_2-1})^2}{4h_1^2} \right] + \\
& \quad + \tilde{\lambda}(\tilde{y}_{i_2}) \frac{\bar{y}_{i_2+1} - 2\bar{y}_{i_2} + \bar{y}_{i_2-1}}{h_1^2} + \varphi_1; \\
& \tilde{\lambda}(\tilde{y}_{0_2}) \beta_{01} \frac{\bar{y}_{1_2} - \bar{y}_{0_2}}{h_1} - \alpha_{01} \bar{y}_{0_2} = T_{01}(x_2, \bar{t}) ; \\
& \tilde{\lambda}(\tilde{y}_{N_2}) \beta_{11} \frac{\bar{y}_{N_2} - \bar{y}_{N_2-1}}{h_1} + \alpha_{11} \bar{y}_{N_2} = T_{11}(x_2, \bar{t}) , \quad i_\xi = 1, 2, \dots, N_\xi - 1, \quad \xi = 1, 2; \\
& \tilde{c}_v(\tilde{y}_{i_2}) \frac{\bar{y}_{i_2} - y_{i_2}}{\tau} = \\
& = \frac{\partial \tilde{\lambda}(\tilde{y}_{i_2})}{\partial y} \left[(\tilde{y}_{i_2+1} - \tilde{y}_{i_2-1}) \frac{\bar{y}_{i_2+1} - \bar{y}_{i_2-1}}{2h_1^2} - \frac{(\tilde{y}_{i_2+1} - \tilde{y}_{i_2-1})^2}{4h_1^2} \right] + \\
& \quad + \tilde{\lambda}(\tilde{y}_{i_2}) \frac{\bar{y}_{i_2+1} - 2\bar{y}_{i_2} + \bar{y}_{i_2-1}}{h_1^2} + \varphi_2; \\
& \tilde{\lambda}(\tilde{y}_{i_0}) \beta_{02} \frac{\hat{y}_{i_1} - \hat{y}_{i_0}}{h_2} - \alpha_{02} \hat{y}_{i_0} = T_{02}(x_1, \hat{t}) ; \\
& \tilde{\lambda}(\tilde{y}_{i_2}) \beta_{12} \frac{\hat{y}_{i_2} - \hat{y}_{i_2-1}}{h_2} + \alpha_{12} \hat{y}_{i_2} = T_{12}(x_1, \hat{t}) , \quad i_\xi = 1, 2, \dots, N_\xi - 1, \quad \xi = 1, 2.
\end{aligned}$$

Тут \tilde{y}_{i_2} – наближене до y_{i_2} значення шуканої функції, отримане методом простої ітерації чи запізнюючих коефіцієнтів. Побудовано багаторівневу ієрархію класів для реалізації методів розщеплення багатовимірних задач для нелінійних нестационарних рівнянь параболічного типу. На базі цього ядра реалізовано два способи розщеплення типу локально-одновимірної схеми. На рис. 2 подано загальний вигляд вікна результатів.

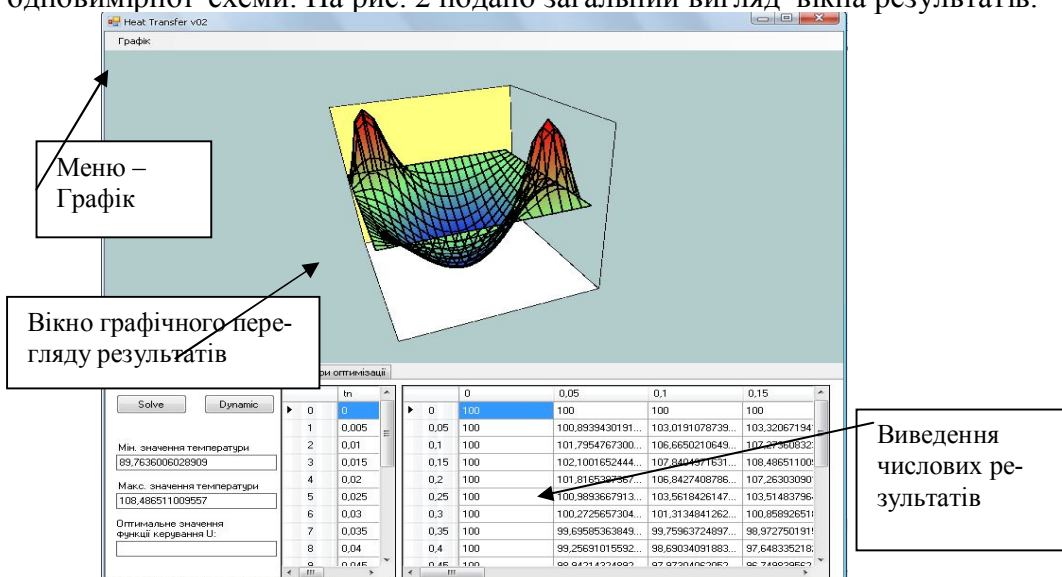


Рис.2. Загальний вигляд результатів роботи програми у режимі перегляду

Для написання програми використано середовище Microsoft Visual Studio 2008 та мову програмування C#. Виконано кілька числових експериментів на прикладі двовимірної нестационарної задачі теплопровідності для призматичного тіла із внутрішніми джерелами тепла для випадку лінійної і квадратичної залежності теплофізичних характеристик від температури за різних умов теплової взаємодії на границях.

Оптимальне керування нестационарним температурним режимом. Розв'язано задачу оптимізації для призматичного тіла з джерелом тепла. На границі тіла здійснюється теплообмін за законом Ньютона.

Оптимальне керування здійснюватимемо завдяки підвищенню температури на границі тіла $x = a$. Критерієм мети обрано функціонал

$$J = \left| \max(T(x, y, t^*) - T^* \right| \longrightarrow \min, \quad (12)$$

де T^* - задане значення температури, t^* - час нагріву (задається), $\bar{D} = D \cup \Gamma$.

Функція $T(x, y, t)$ задовольняє рівняння (1), граничні умови (9) і початкову умову (3).

Функція керування $T_c(t) = T_{11}$ входить у граничну умову та обмежена зверху і знизу заданими значеннями $u_1(t)$, $u_2(t)$:

$$u_1(t) \leq T_c(t) \leq u_2(t).$$

Числові розрахунки виконано за таких значень фіксованих величин:

$c_{v0} = 41,80819\rho$; $c_{v1} = 0,297222\rho$; $c_{v2} = 0,0000204069\rho$; $\rho = 1$;

$\lambda_0 = 5,059$; $\lambda_1 = 0,03288$; $\lambda_2 = 0,00000561428$;

$T^* = 110$ К, $u_1(t) = 0$ К, $u_2(t) = 2000$ К, $t^* = 1$;

інтенсивності джерела тепла $q = 2\,000$

і точності обчислень методом прямого пошуку $\varepsilon = 0,01$.

Отримано такі результати:

значення функції керування $T_c = 310,5$ К; максимальна температура $T = 110,0$ К;

кількість ітерацій методу прямого пошуку $n = 26$.

За тих же значень параметрів і лінійної апроксимації коефіцієнтів $c_v(T)$ та $\lambda(T)$ отримано такі результати:

значення функції керування $T_c = 309,0$ К; максимальна температура $T = 110,0$ К;

кількість ітерацій методу прямого пошуку $n = 26$.

Як бачимо, квадратична та лінійна апроксимації коефіцієнтів об'ємної теплоємності та теплопровідності матеріалу дають практично однакові результати. Якщо коефіцієнти $c_v(T)$ та $\lambda(T)$ не залежать від температури, то отримане значення функції керування, яке відрізняється від попередніх на 28,57%.

Збіжність методу прямого пошуку проілюстровано у наведеній таблиці.

Значення функції керування та максимальної температури на різних ітераціях

Параметри оптимізації \ номер ітерації	1	4	7	10	13	16	19	22	26
$\max T$	138,24	113,85	109,5	111,7	110,1	109,8	110,09	110,02	110,00
T_c	1000,0	400,0	300,0	350,0	312,5	306,25	312,54	310,94	310,57

Для розв'язання задачі оптимізації з врахуванням функціонального обмеження (8) використано метод дихотомії у поєднанні з методом штрафних функцій. Штрафну функцію обрано у вигляді [7]:

$$\phi(u) = 10^{20} A |F(u)|, \quad F(u) = \delta T - \max_D T(x, y, t^*) + \min_D T(x, y, t^*), \quad A = \begin{cases} 1, & F(u) < 0, \\ 0, & F(u) \geq 0. \end{cases}$$

За значень фіксованих параметрів $T^*=110$ К, $u_1(t)=0$ К, $u_2(t)=2\,000$ К, $\delta T=8$ К, $t^*=1$, інтенсивності джерела тепла $q=2\,000$ (розміри та розміщення задані), квадратичній апроксимації коефіцієнтів об'ємної теплоємності матеріалу $c_v(T)$ та теплопровідності $\lambda(T)$ і точності обчислень методом дихотомії ($\varepsilon=0,01$) отримано такі результати:

значення функції керування $T_c=264,6$ К; значення функціонала $J=2,0$ К;

кількість ітерацій методу дихотомії $n=18$.

Збіжність методу дихотомії можна добре прослідкувати у характерному перерізі $y=0.5$ у момент часу $t=1$ для значень функції керування на першій ($T_c=1000,002$), п'ятій ($T_c=281,254$) та вісімнадцятій ($T_c=264,633$) ітераціях (рис.3).

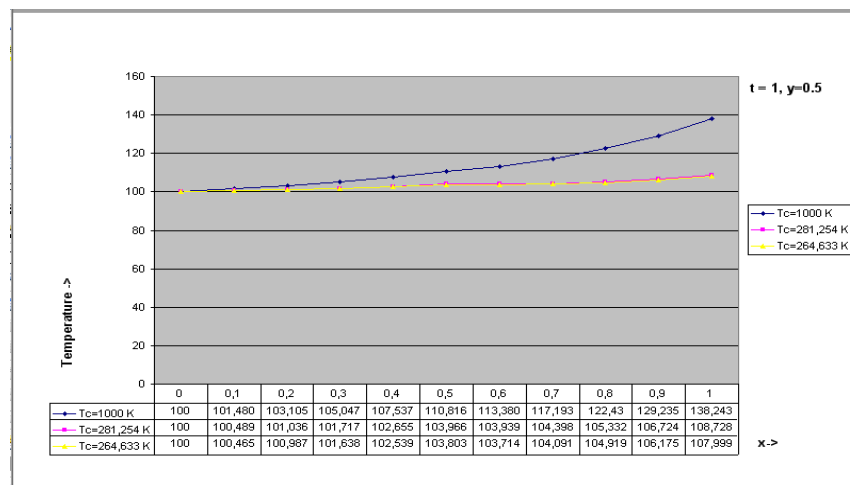


Рис. 3. Характер збіжності методу дихотомії

Висновки. Розроблено алгоритм, чисельні методики та програмне забезпечення визначення температурного режиму та оптимального керування у двовимірних термочутливих тілах з внутрішніми джерелами тепла та тепловими потоками на границі за обмежень на керування та параметри теплового процесу. Розроблену методику можна застосувати у автоматизації процесів управління температурними режимами елементів конструкцій.

Список літератури:

- Андерсон Д.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т. – Т.1; / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер, пер. с англ. – М. : Мир, 1990. – 384с.
- Вигак В. М.** Оптимальное управление нестационарными температурными режимами / В. М. Вигак. – Киев Наук. думка, 1979. – 360 с.
- Іванків К.** Розв'язування нестационарних задач теплопровідності для термочутливих тіл зі складним теплообміном методами розщеплення / Іванків К., Первов Д., Попович В. // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т.- Львів, 2006.-Т.1.- С.196-198.
- Егоров А. И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А. И. Егоров – М. : Наука, 1978. – 504 с.
- Марчук Г И.** Методы расщепления / Г. И. Марчук.– М. : Наука, 1988.- 264с.
- Самарский А. А.** Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. :Едиториал УРСС, 2003.- 784 с.
- Шуп Т.** Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп // Практическое руководство ; пер. с англ. – М. :Мир, 1982. – 238 с.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ТЕЛ

В работе представлена математическая модель задачи оптимизации процесса теплопроводности термочувствительных тел с внутренними источниками тепла и сложным теплообменом на границе. Управление температурным режимом осуществляется с помощью внутренних (управление входит в уравнение) и внешних (управление входит в граничные условия) источников тепла.

Ключевые слова: оптимальное управление, нестационарный температурный режим, термочувствительное тело, методы расщепления.

K. S. Ivankiv,

OPTIMAL CONTROL OF TRANSIENT TEMPERATURE REGIME OF THERMAL SENSITIVE BODIES

In this paper the mathematical model of heat conduction optimal control is presented. Power of internal heat sources and (or) temperature of environment are parameters to control.

Multilevel class hierarchy to implement locally one-dimensional splitting scheme for solving multidimensional problems of transient heat conduction in thermal sensitive bodies is constructed. To find optimal parameters the method of penalty functions in conjunction with methods of zero order is applied.

Key words: optimal control, transient temperature regime, thermal sensitive body, methods of splitting

