

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МАНІПУЛЯТОРА РОБОТА ДЛЯ ЛІКВІДАЦІЇ НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ**

На сьогодні для ліквідації різного роду надзвичайних ситуацій, в тому числі пожеж, широкого використовують роботи. У матеріалах статті наведено математичну модель маніпулятора робота на основі представлення Денавіта-Хартенберга з використанням Лагранжевих рівнянь. Використання останніх дає можливість отримати рівняння динаміки ланок маніпулятора робота, які дадуть змогу досліджувати характеристики останнього та вибрати оптимальні параметри керування. Ця модель враховує конструктивні особливості ланок маніпулятора і, тим самим, дає можливість створювати високоточні та швидкодіючі системи автоматичного керування маніпулятором робота.

**Ключові слова:** робот, маніпулятор робота, представлення Денавіта-Хартенберга, рівняння Лагранжа.

**Постановка проблеми.** На сьогодні все частіше для виконання певних робіт у будь-якій сфері людської діяльності використовують роботи, які стали невід'ємною частиною суспільства. Роботи здатні полегшити наше життя і забезпечити безпеку життєдіяльності. Усе частіше вони використовуються на небезпечних об'єктах для вирішення певних задач з ліквідації різного роду надзвичайних ситуацій, де людському життю загрожує небезпека: гасінні пожеж, в розмінуванні вибухівок, охороні, розвідці. Наприклад, особливо актуальною для атомних електростанцій стала необхідність заміни пожежників в небезпечних зонах під час аварій – роботами, які здатні працювати в екстремальних умовах.

Не дивлячись на такий стрімкий розвиток, існує ряд проблем у створенні роботів. Вони полягають у розробленні математичних моделей, які б були зручні для реалізації в цифровому вигляді, систем керування, алгоритмів керування, орієнтації в просторі і т.д. Так для того щоб забезпечити високу точність позиціонування та швидкодію, система керування механізмами робота з однієї сторони потребує математичної моделі, яка б точно описувала динаміку руху цих механізмів, а з іншої – була придатною для синтезу системи керування.

**Аналіз останніх досліджень.** Використання роботів в пожежній охороні в Україні вперше було здійснено під час ліквідації аварії на ЧАЕС. Пожежний робот очистив частину покрівлі на відмітці 70,8 м від радіоактивних частин конструкцій. В Європі роботизовані системи пожежогасіння використовуються на таких об'єктах: на ТЕЦ – для охолодження перекриття машинного залу при пожежі; на деревообробних підприємствах – для гасіння заданої секції зберігання пиломатеріалів; на нафтових об'єктах – для гасіння піною і охолодження водою резервуарного парку та зливно-наливної залізничної естакади, захисту резервуарів; на об'єктах газової промисловості – для захисту газоконденсатної зливно-наливної естакади.

В роботах [1-3] розглянуто ряд методів розроблення математичних моделей роботів на основі рівнянь Д'Аламбера, Лагранжа, Ейлера, наведено їх порівняння, переваги та недоліки. Дані математичні моделі точно описують динаміку руху ланок маніпулятора робота з урахуванням їх геометричних розмірів, однак є складними під час розроблення систем керування і потребують застосування потужних процесорів.

**Задачі дослідження.** Для створення високоточної та швидкодіючої системи автоматичного керування маніпулятором робота необхідно розробити математичну модель. В даній роботі для розроблення математичної моделі маніпулятора робота пропонується застосувати представлення Денавіта-Хартенберга з використанням Лагранжевих рівнянь. Їхнє використання дасть нам можливість отримати рівняння динаміки ланок маніпулятора робота, які дозволять досліджувати характеристики останнього, синтезувати систему керування та вибрати оптимальні параметри керування.

**Вирішення проблеми.** Денавітом і Хартенбергом для опису обертальних і поступальних зв'язків між сусідніми ланками був запропонований матричний метод послідовної побудови систем координат, зв'язаних з кожною ланкою кінематичної схеми. Суть представлення Денавіта-Хартенберга полягає в тому, що необхідно сформувати однорідну матрицю перетворення, яка має розмірність  $4 \times 4$  і описує положення системи координат кожної ланки відносно системи координат попередньої ланки. Це дає можливість послідовно перетворити останню систему координат, яка зв'язана нерухомо з кінцем останньої ланки в базову систему координат (основа робота, яка кріпиться на рухому платформу). Для складання рівнянь динаміки розглянемо лише три рухи робота (рис. 1). Кінематична схема триланкового робота показана на рис. 2.

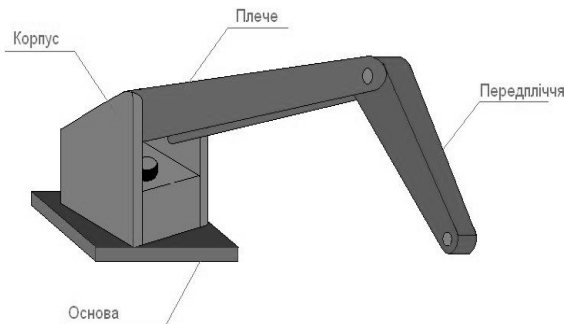


Рис. 1. Конфігурація триланкового робота

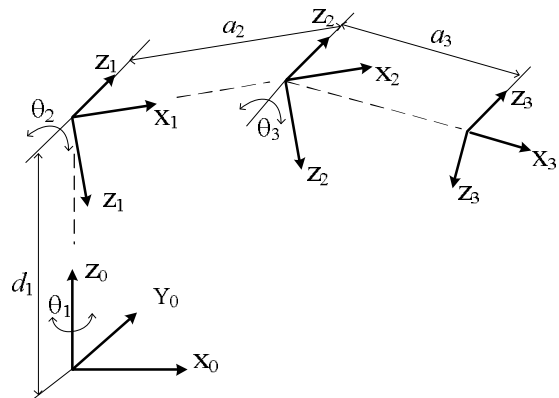


Рис. 2. Кінематична схема триланкового робота

Параметри системи координат ланок робота наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Параметри системи координат				
№ зчленування	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	$\theta_1$	$-90^\circ$	0	$d_1$
2	$\theta_2$	0	$a_2$	0
3	$\theta_3$	0	$a_3$	0

Однорідна матриця перетворення для обертального руху має вигляд [2]:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Якщо задані координати точки  $r_i$  в  $i$ -й системі координат, то використовуючи матрицю перетворення (1) або (2), можна знайти координати цієї точки в  $i-1$  системі координат:

$${}^{i-1}\mathbf{r}_i = {}^{i-1}\mathbf{A}_i {}^i\mathbf{r}_i,$$

де  ${}^{i-1}\mathbf{r}_i = [x_{i-1} \ y_{i-1} \ z_{i-1} \ 1]^T$  – координати точки  $r_i$  в  $i-1$ -й системі координат;

${}^i\mathbf{r}_i = [x_i \ y_i \ z_i \ 1]^T$  – координати точки  $r_i$  в  $i$ -й системі координат.

Перемноживши матриці перетворення для суміжних систем координат, знайдемо матрицю перетворення, яка визначає зв'язок між системою координат  $i$ -ланки і базовою системою координат  ${}^0\mathbf{A}_i = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot \dots \cdot {}^{i-1}\mathbf{A}_i$ .

Для прийнятих систем координат, на підставі табл. 1 та матриці  ${}^{i-1}A_i$  (1), знайдемо однорідні матриці перетворення для маніпулятора робота:

$${}^0A_1 = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad {}^1A_2 = \begin{vmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_2 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_2 \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$${}^2A_3 = \begin{vmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & a_3 \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & a_3 \sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Знаходимо матриці, які зв'язують системи координат 2, 3 ланок з базовою  ${}^0A_2$ ,  ${}^0A_3$  і матрицю, яка зв'язує систему координат 3 ланки з 1-ю.

$${}^0A_2 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2; \quad {}^0A_3 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3; \quad {}^1A_3 = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3. \quad (3)$$

Для складання диференціальних рівнянь руху маніпулятора використаємо рівняння Лагранжа у векторно-матрицевій формі запису [2].

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{D}(\mathbf{q}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{C}(\mathbf{q}(t)), \quad (4)$$

де  $\boldsymbol{\tau}(t) = [\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t)]^T$  – вектор узагальнених сил (моментів), які створюються силовими приводами в зчленуваннях маніпулятора;  $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$  – вектор приєднаних змінних;  $\dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T$  – вектор узагальнених швидкостей;  $\ddot{\mathbf{q}}(t) = [\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_n(t)]^T$  – вектор узагальнених прискорень;  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  – симетрична матриця розмірністю  $n \times n$ ;  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$  – вектор коріолісових і відцентрових сил;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}) = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$  – вектор гравітаційних сил (моментів).

Згідно з даним описом, векторно-матрицеве рівняння триланкового робота матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

де  $D_{ik}$  – коефіцієнти, які встановлюють зв'язок сил, моментів, що діють у зчленуваннях з прискореннями приєднаних змінних;  $h_{ikm}$  – коефіцієнти, які встановлюють зв'язок сил і моментів, що діють у зчленуваннях, із швидкостями зміни приєднаних змінних;  $C_i$  – коефіцієнти, які враховують силу тяжіння, що діє на кожному ланку.

Елементи матриці  $\mathbf{D}$  визначаються згідно з виразом

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{Tr}(\mathbf{U}_{jk} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad (\text{де } i, k = 1, 2, 3; n = 3 - \text{кількість ланок})$$

та будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \text{Tr}(\mathbf{U}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + \text{Tr}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) + \text{Tr}(\mathbf{U}_{31} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{31}^T); \\ D_{12} &= D_{21} = \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) + \text{Tr}(\mathbf{U}_{32} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{31}^T); \quad D_{13} = D_{31} = \text{Tr}(\mathbf{U}_{33} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{31}^T); \\ D_{22} &= \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) + \text{Tr}(\mathbf{U}_{32} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{32}^T); \quad D_{23} = D_{32} = \text{Tr}(\mathbf{U}_{33} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{32}^T); \quad D_{33} = \text{Tr}(\mathbf{U}_{33} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{33}^T). \end{aligned} \quad (6)$$

Матриця  $\mathbf{U}_{ij}$  описує зміну положення  $i$ -ї ланки, яке спричинене рухом в  $j$ -му зчленуванні і обчислюється за виразом [2]:

$$U_{ij} = \frac{\partial^0 \mathbf{A}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0 \mathbf{A}_{j-1} \cdot \mathbf{Q}_j \cdot {}^{j-1} \mathbf{A}_i, & \text{якщо } j \leq i \\ 0, & \text{якщо } j > i, \end{cases} \quad (7)$$

де матриця  $\mathbf{Q}_i$  для обертового та поступального зчленувань має вигляд:

Звідси запишемо, що

$$\begin{aligned} U_{11} = \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0 \mathbf{A}_1; \quad U_{21} = \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0 \mathbf{A}_2; \quad U_{31} = \mathbf{Q}_1 \cdot {}^0 \mathbf{A}_3; \quad U_{22} = {}^0 \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1 \mathbf{A}_2; \\ U_{32} = {}^0 \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot {}^1 \mathbf{A}_3; \quad U_{33} = {}^0 \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}_3 \cdot {}^2 \mathbf{A}_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Елементи матриці  $\mathbf{J}_i$  обчислюються за відомими виразами [2].

Для визначення складових, які описують відцентрові і коріюлісові сили, використаємо

вираз  $h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m$  (де  $i = 1, 2, 3$ ;  $n = 3$ ). Вони матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} h_1 = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 h_{1km} \dot{q}_k \dot{q}_m = & h_{111} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + h_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{113} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + h_{121} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + h_{122} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + h_{123} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + h_{131} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 + \\ & + h_{132} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + h_{133} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_3; \\ h_2 = \sum_{k=2}^3 \sum_{m=2}^3 h_{2km} \dot{q}_k \dot{q}_m = & h_{211} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + h_{212} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{213} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + h_{221} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + h_{222} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + h_{223} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + h_{231} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 + \\ & + h_{232} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + h_{233} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_3; \\ h_3 = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 h_{3km} \dot{q}_k \dot{q}_m = & h_{311} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + h_{312} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{313} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + h_{321} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + h_{322} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + h_{323} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + h_{331} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 + \\ & + h_{332} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + h_{333} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_3. \end{aligned} \quad 9)$$

Коефіцієнти  $h_{ikm}$  знаходимо з виразу  $h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Tr}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T)$  (де  $i, k, m = 1, 2, 3, n = 3$ ).

$$\mathbf{U}_{jkm} = \begin{cases} {}^0 \mathbf{A}_{k-1} \cdot \mathbf{Q}_k \cdot {}^{k-1} \mathbf{A}_{m-1} \cdot \mathbf{Q}_m \cdot {}^{m-1} \mathbf{A}_m, & \text{якщо } j \geq m \geq k \\ {}^0 \mathbf{A}_{m-1} \cdot \mathbf{Q}_m \cdot {}^{m-1} \mathbf{A}_{k-1} \cdot \mathbf{Q}_k \cdot {}^{k-1} \mathbf{A}_j, & \text{якщо } j \geq k \geq m \\ 0, & \text{якщо } j < k \text{ або } j < m. \end{cases}$$

Вплив гравітаційних сил (моментів), які діють на маніпулятор, визначається за фор-

мулою  $C_i = \sum_{j=i}^n (-\mathbf{m}_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji} \cdot {}^j \bar{\mathbf{r}}_j)$  (де  $i = 1, 2, 3$ ;  $n = 3$ ;  $\mathbf{g} = |0 \quad 0 \quad -g \quad 0|$  – вектор рядок, що описує

гравітаційне прискорення в базовій системі координат;  ${}^i \bar{\mathbf{r}}_i$  – радіус-вектор центра мас  $i$ -ланки). Для нашого випадку вирази для їх обчислення запишуться таким чином:

$$\left. \begin{aligned} C_1 = & -(m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{11} \cdot {}^1 \bar{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{21} \cdot {}^2 \bar{\mathbf{r}}_2 + m_3 \mathbf{g} \mathbf{U}_{31} \cdot {}^3 \bar{\mathbf{r}}_3), \\ C_2 = & -(m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{22} \cdot {}^2 \bar{\mathbf{r}}_2 + m_3 \mathbf{g} \mathbf{U}_{32} \cdot {}^3 \bar{\mathbf{r}}_3), \\ C_3 = & -(m_3 \mathbf{g} \mathbf{U}_{33} \cdot {}^3 \bar{\mathbf{r}}_3). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Вектор узагальнених моментів, які створюються зовнішніми впливами в зчленуваннях, має вигляд:

$$\tau(t) = \begin{pmatrix} M_1 - M_{f1} \\ M_2 - M_{f2} \\ M_3 - M_{f3} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

де  $M_1, M_2, M_3$  – моменти, що діють на ланки механізму з боку приводів переміщення;  
 $M_{f1}, M_{f2}, M_{f3}$  – моменти зовнішнього в'язкого тертя у відповідних зчленуваннях.

Підставивши знайдені вирази (6), (9), (10), (11) у (5) і провівши необхідні перетворення, отримуємо математичну модель, що описує динаміку триланкового маніпулятора робота, яка дасть можливість синтезувати систему керування з використанням теорії автоматичного керування.

#### **Висновки**

Розроблено математичну модель триланкового маніпулятора робота на основі представлення Денавіта-Хартенберга і методу Лагранжа, яка дає змогу:

- досліджувати динаміку руху ланок маніпулятора робота враховуючи їх конструктивні особливості;
- синтезувати систему автоматичного керування маніпулятором робота з використанням теорії автоматичного керування та досліджувати їх характеристики;
- створити програму керування маніпулятором робота.

#### **Список літератури**

1. **Фу К.**, Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. – М.: Мир, 1989. – 624с.
2. **Шахинпур М.** Курс робототехники. – М.: Мир, 1990. – 327с.
3. **Промышленные роботы:** Конструирование, управление, эксплуатация. Костюк В.И., Гавриш А.П., Ямпольский Л.С., Карлов А.Г. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985. –359с.

*А.П. Кушнір*

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАНИПУЛЯТОРА РОБОТА ДЛЯ ЛИКВИДАЦИИ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ**

Сегодня для ликвидации разного рода чрезвычайных ситуаций, в том числе пожаров, широко используют роботов. В материалах статьи приведена математическая модель манипулятора робота на основе представления Денавита-Хартенберга с использованием Лагранжевых уравнений. Использование последних дает возможность получить уравнение динамики частей манипулятора робота, которые в дальнейшем разрешат исследовать характеристики последнего и выбирать оптимальные параметры управления. Данная модель учитывает конструктивные особенности частей манипулятора и, тем самым, позволяет создавать высокоточные и быстродействующие системы автоматического управления манипулятором робота.

**Ключевые слова:** робот, манипулятор робота, представление Денавита-Хартенберга, уравнение Лагранжа.

*А.Р. Kushnir*

### **ROBOT'S MANIPULATOR MATHEMATICAL MODEL FOR EXTRAORDINARY SITUATIONS LIQUIDATION**

Today, robots are extensively used for liquidation of different emergencies, including fires. The mathematical model of the robot's manipulator based on Denavit-Hartenberh example and Lagrange equations is presented in this paper. The use of the latest makes it possible to obtain dynamic equation of links of robot's manipulator that will enable to explore its features and choose the best control options. The structural features of the manipulator's links are taken into account in this mathematical model, thus enabling to create highly accurate and fast automatic control systems of robot's manipulator.

**Key words:** robot, robot's manipulator, Denavit-Hartenberg example, Lagrange equation.