

*В. М. Шатохин, д-р техн. наук, професор  
(Харківський національний університет будівництва і архітектури)  
О. М. Семків, канд. техн. наук, А. М. Попова  
(Національний університет цивільного захисту України)*

## УДОСКОНАЛЕННЯ ФОРМИ ЛОПАТИ РОТОРНОГО РОЗКИДАЧА ҐРУНТУ ДЛЯ ГАСІННЯ ЛІСОВИХ ПОЖЕЖ

Запропоновано метод визначення оптимальної форми профілю лопаті роторного розкидача ґрунту, який базується на розв'язанні задачі про брахістохрону для поля відцентрових сил інерції. Побудовано функціонал часу в полярній системі координат і записане відповідне рівняння Ейлера; отримано його перший інтеграл, для якого знайдено аналітичне розв'язання. Встановлено, що розв'язання має різну структуру залежно від параметрів розкидача. Представлено результати застосування теорії для знаходження оптимальної форми профілю лопаті роторного розкидача ґрунту.

**Ключові слова:** розкидач ґрунту, обертовий ротор, форма профілю лопаті, відцентрова сила інерції, брахістохрона, функціонал часу руху, рівняння Ейлера.

**Постановка проблеми.** При створенні технічних пристроїв певного класу виникає проблема вибору форми напрямних, у яких рухаються матеріальні частки (наприклад, ґрунту) під дією відцентрових сил. Зокрема, актуальною є проблема створення ґрунторозкидачів механізмів, використовуваних для гасіння лісових пожеж у місцевостях з дефіцитом джерел води [1-5]. На практиці застосовують роторні ґрунторозкидачі [2-5], які за допомогою прикріплених до обертового ротора лопатей викидають частки ґрунту до зони загоряння. Технологічні характеристики цих пристроїв істотно залежать від геометричної форми й розташування лопатей. Це вказує на актуальність дослідження форми профілю лопатей – включаючи і пошук їхньої оптимальної форми.

**Аналіз основних досліджень.** У роботах [2,3,5] проведені дослідження з вибору параметрів ґрунторозкидача, профіль лопатей яких є прямолінійним. Перспективним буде використання лопатей з криволінійними профілями [4]. Методи вибору їхньої форми й аналізу руху часток ґрунту по них до цього часу не досить розроблені. Задача вибору оптимальної форми лопаті може бути формалізована як визначення форми кривої у полі відцентрових сил інерції, яка забезпечує мінімальний час руху. Прототипом є задача про брахістохрону у полі відцентрових сил. Зазначимо, що класична задача про брахістохрону для однорідного поля сил ваги була відправною точкою при створенні варіаційного числення [6]. Відомі [7] спроби розв'язання аналогічних задач для випадку центральної сили тяжіння й сталої за величиною центральної сили відштовхування. У статті [8] викладено метод знаходження траєкторії точки за умови мінімізації часу руху при дії відцентрової сили інерції.

**Постановка завдання.** Розробити метод складання і розв'язання функціонала часу для задачі про брахістохрону у полі відцентрових сил інерції, та визначити оптимальні за геометричною формою профілі лопатей розкидачів ґрунту.

**Основна частина.** Розв'язання задачі про функціонал часу руху у полі відцентрових сил слід проводити в полярній системі координат.

**Побудова функціонала часу.** Нехай точки  $A$  і  $B$  розташовані в центральному полі сил відштовхування – відцентрових сил із центром у точці  $O$  (рис. 1). Проведемо через точки  $A$ ,  $B$  і центр  $O$  площину й розглянемо криві, що з'єднують ці точки й розташовані на цій площині. Виберемо із цих кривих таку, щоб матеріальна точка, яка виходить із  $A$  зі швидкістю  $v_0 = 0$  і рухається лише під дією відцентрової сили, досягла точки  $B$  за мінімальний час.

Уведемо полярну систему координат  $\rho$ ,  $\varphi$  із центром у зазначеній точці. Поточні координати точки  $M$  позначимо, як  $\rho$  і  $\varphi$ ; координати точок  $A$  і  $B$  нехай будуть відповідно  $(\rho_0, \varphi_0)$  й  $(\rho_1, \varphi_1)$ . Проекція відцентрової сили інерції матеріальної точки, пов'язаної з обертовим тілом, на напрямок радіуса  $\rho$  має вигляд:

$$F_\rho = ma_\omega = m\omega^2 \rho, \quad (1)$$

де  $m$  – маса точки;  $a_\omega = \omega^2 \rho$  відцентрове (нормальне) прискорення;  $\omega$  – кутова швидкість.

Тоді вираз для потенціальної енергії відцентрової сили інерції можна представити так [9]:

$$\Pi = \int_\rho^0 F_\rho d\rho = m\omega^2 \int_\rho^0 \rho d\rho = -\frac{m\omega^2}{2} \rho^2. \quad (2)$$

При записі формули (2) приймалося, що початковим положенням для визначення потенціальної енергії є відштовхувальний центр (точка  $O$ ), де потенціальна енергія дорівнює нулю.

Якщо знехтувати силами тертя й опору, то правдивим буде закон збереження енергії у відносному русі у рівномірно обертової навколо нерухомої осі системі координат [9]:

$$T + \Pi = h = const, \quad (3)$$

де  $T = \frac{1}{2}mv^2$  – кінетична енергія точки у відносному русі стосовно обертової системи координат;

$h = -\frac{m\omega^2}{2}\rho_0^2$  – постійна енергії.

Надалі вважатимемо, що у формулі (3) враховується тільки потенціальна енергія відцентрової сили інерції. З погляду впровадження це найбільш важливий випадок. У технологічних пристроях кутова швидкість така, що вплив сил ваги на рух точки є незначним. При аналізі руху в горизонтальній площині це застереження взагалі виявляється зайвим.

З урахуванням виразу (2) формула (3) набуває вигляду

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 = -\frac{m\omega^2}{2}\rho_0^2. \quad (4)$$

Звідки маємо формулу для обчислення швидкості точки

$$v = \omega\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (\rho \geq \rho_0). \quad (5)$$

З визначення алгебраїчної величини швидкості (проекції швидкості на дотичну до траєкторії)  $v = v_\tau = \frac{ds}{dt}$ , виразу для квадрата диференціала дуги у полярних координатах

$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$  і формули (5) слідує, що

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\omega\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi, \quad (6)$$

де

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi},$$

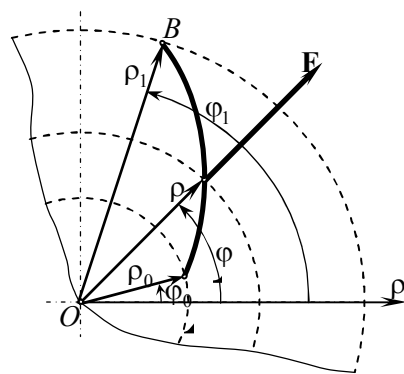


Рис. 1. Схема для побудови брахістохрони у полі відцентрових сил

При відліку дуги у напрямку руху точки диференціал шляху збігатиметься з диференціалом дугової координати  $ds$ , а модуль швидкості точки з її алгебраїчною величиною  $v = v_\tau$ .

Інтегруючи, одержимо функціонал

$$\tau[\rho(\varphi)] = \frac{1}{\omega} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi. \quad (7)$$

Пошук екстремуму функціонала. Для підінтегральної функції інтеграла (7) введемо позначення

$$P = P(\rho, \rho') = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}. \quad (8)$$

На кривій, яка реалізує екстремум розглянутого функціонала (7), має виконуватися умова, яка випливає з необхідних умов екстремуму функціонала [6].

$$P_\rho - \frac{d}{d\varphi} P_{\rho'} \equiv 0, \quad (9)$$

де  $P_\rho$ ,  $P_{\rho'}$  – похідні від  $P$  відповідно по  $\rho$  й  $\rho'$ .

Таким чином, шукана функція  $\rho = \rho(\varphi)$  є розв'язанням диференціального рівняння другого порядку (9), або з використанням позначення  $\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$ , в розгорнутому вигляді

$$P_\rho - P_{\varphi\rho'} - P_{\rho\rho'}\rho' - P_{\rho'\rho'}\rho'' = 0, \quad (10)$$

Рівняння (10) є рівнянням Ейлера. У розглянутому випадку  $P$  залежить лише від  $\rho$  і  $\rho'$ , тому фактично воно є більше компактним

$$P_\rho - P_{\rho\rho'}\rho' - P_{\rho'\rho'}\rho'' = 0, \quad (11)$$

тому що  $P_{\varphi\rho'} = 0$ .

Якщо помножити всі компоненти рівняння на  $\rho'$ , то ліва частина перетворюється в точну похідну:

$$\frac{d}{d\varphi} (P - \rho' P_{\rho'}).$$

Отже, рівняння Ейлера має перший інтеграл

$$P - \rho' P_{\rho'} = \frac{1}{C}. \quad (12)$$

У розглянутому випадку

$$P_{\rho'} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}},$$

тому формула (12) набуває вигляду

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} = \frac{1}{C}. \quad (13)$$

З виразу (13) після спрощень одержуємо,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{(\rho^2 - \rho_0^2)} - 1}. \quad (14)$$

Диференціальне рівняння (14) допускає аналітичний розв'язок (занадто громіздкий виклад формул тут не наводиться):

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} z + \frac{1}{z} + C_1, & C^2 = 1, \\ \operatorname{arctg} z - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{C^2-1}}{z + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1, \end{cases} \quad (15)$$

де

$$z = \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (16)$$

Для знаходження постійних  $C$  і  $C_1$  з врахуванням (16) випишемо крайові умови:

$$\text{при} \quad \varphi = \varphi_0 \quad \rho = \rho_0, \quad z = z(\rho_0) = z_0 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho_0^2} - 1} = \infty; \quad (17)$$

$$\text{при} \quad \varphi = \varphi_1 \quad \rho = \rho_1, \quad z = z(\rho_1) = z_1 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (18)$$

На лівій границі співвідношення (15) набувають вигляду

$$\varphi_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 = 1, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 < 1, \\ \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (19)$$

З виразів (19) слідує, що

$$C_1 = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 = 1, \\ \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2}, & C^2 < 1, \\ \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (20)$$

На підставі (15) співвідношення, які аналогічні (19), (20), можуть бути записані і на правій границі.

Для практики інтерес представляють випадки, коли  $C^2 < 1$  і  $C^2 > 1$ .

Вибір оптимальної форми лопатей ґрунторозкидача. На рис. 2 показана схема ґрунторозкидача: 1– ступиця; 2– кільце; 3– спиця; 4– криволінійна лопать. Передбачається, що роз-

кидач обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  проти ходу годинникових стрілок. Радіуси  $R_1$  і  $R_2$  є радіусом кіл, що проходять через задню й передню крайки лопаті. У викладеній теорії їм відповідають полярні радіуси  $\rho_0$  й  $\rho_1$ .

У цій роботі обмежимося аналізом розв'язку при  $C^2 < 1$ . Для знаходження константи

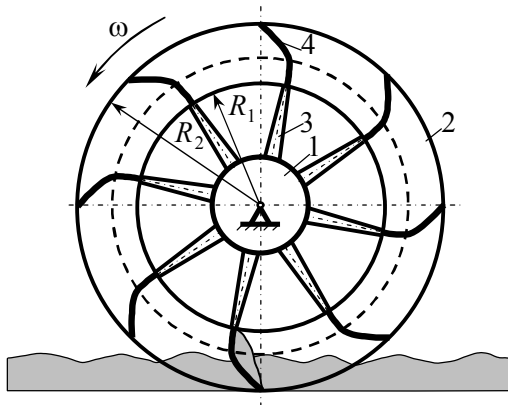


Рис. 2. Схема ґрунторозкидального механізму

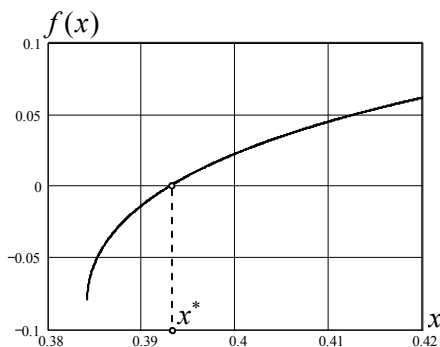


Рис. 3. Графік функції  $f(x)$

С скористаємося трансцендентним рівнянням, що випливає з порівняння правих частин відповідних рядків виразів для правої і лівої (20) границь із врахуванням крайової умови (18)

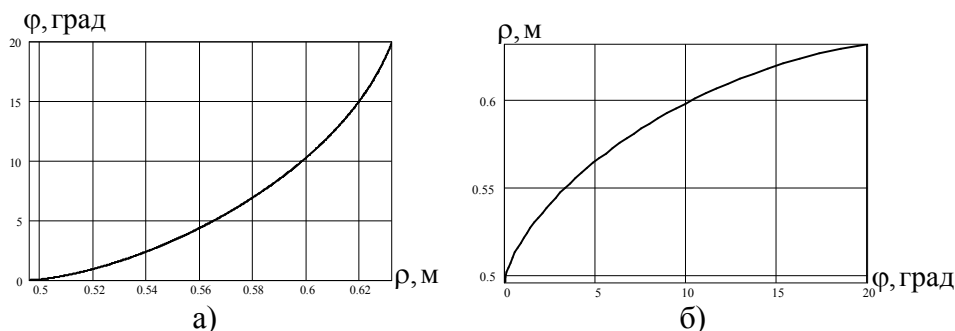


Рис. 4. Графіки функцій: а) –  $\varphi(\rho)$ ; б) –  $\rho(\varphi)$

$$f(x) = \varphi_1 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} - \varphi_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \frac{\pi}{2} = 0, \quad (21)$$

де  $x = C^2$ .

У середовищі MathCAD [10] при наявності графіка  $f(x)$  (рис. 3) корінь функції зручно знаходити з використанням вбудованої функції **root(f(x), x, a, b)**. Для кореня  $f(x)$  (тестовий варіант розраховано з параметрами:  $\rho_0 = 0,496$  м,  $\rho_1 = 0,632$  м,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = 20^\circ$ )

отримане значення  $x^* = 0,393 < 1$ , якому відповідає  $C = \sqrt{x^*} = 0,627$ . Відповідно до другого виразу (20) з урахуванням (18) для  $C_1$  маємо

$$C_1 = \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2} = \varphi_1 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \\ + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} = 0,445.$$

Знайдені значення постійних  $C$  і  $C_1$  за допомогою формул (15) і (16) дозволяють записати вираз для шуканої функції

$$\varphi(\rho) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} + C_1. \quad (22)$$

Графік цієї функції представлений на рис. 4 а; більш зручний для аналізу графік оберненої функції  $\rho(\varphi)$  – на рис. 4 б [11].

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на детальне вивчення залежності властивостей оптимальних траєкторій від параметрів.

#### **Висновки:**

1. Запропоновано метод визначення оптимальної форми профілю лопаті роторного розкидача ґрунту.
2. Розроблено метод розв'язання задачі про брахістохрону для поля відцентрових сил інерції.
3. Побудовано функціонал часу в полярній системі координат.
4. Отримано перший інтеграл рівняння Ейлера у формі диференціального рівняння першого порядку й знайдено його аналітичний розв'язок.
5. Наведено результати розрахунків траєкторій для вибору оптимальної форми лопаті розкидача ґрунту.

#### **Список літератури:**

1. **Семків О.М.** Розрахунок робочого органа ланцюгового ґрунтометального механізму / *Семків О.М., Шатохін В.М.* // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”. Випуск 87.– К.: КНУБА, 2011.– С. 303-312.
2. **Семків О.М.** Дослідження траєкторії руху частки ґрунту після її вильоту з робочої поверхні лопатки роторного ґрунтометальника / *Семків О.М., Попова А.М.* // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012.– Вип. 4.– Т. 54.– С. 126-134.
3. **Попова А.М.** Дослідження руху частки ґрунту по лопатці: результати комп'ютерних експериментів / *Попова А.М., Шатохін В.М.* // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012.– Вип. 4.– Т. 54.– С. 135-144.
4. **Семків О.М.** Исследование движения частицы ґрунта по лопатке с профилем оптимальной формы в поле центробежных сил инерции / *Семков О.М., Шатохин В.М., Попова А.Н.* // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Технічна естетика і дизайн”.– К.: КНУБА.–2012.– Вип. 11.– С. 165-174.
5. **Шатохін В.М.** Исследование движения частиц ґрунта со случайными параметрами, выбрасываемых роторным ґрунтометателем / *Шатохин В.М., Шатохина Н.В., Попова А.Н.* // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”.– К.: КНУБА, 2012.– Вип. 90.– С. 383-390.

6. Эльсгольц Л.В. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Эльсгольц Л.В. – М.: Наука, 1969.– 279 с.

7. Геронимус Я.Л. Вариационные методы решения задач оптимизации: Учеб. пособие. / Геронимус Я.Л., Голинский Б.Л. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1987.– 114 с.

8. Шатохин В.М. Оптимальные траектории движения точки, перемещающейся под действием центробежной силы инерции / Шатохин В.М., Шатохина Н.В. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий.– Харьков, 2012.– Вып. 4/7 (58).– С. 9-14.

9. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики. В 2-х томах. т. II. Динамика. / Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. – М.: Наука, 1983.– 640 с.

10. Кирьянов Д.В. Mathcad 13. / Кирьянов Д.В. – СПб.: ВХВ-Петербург, 2006.– 608 с.

11. Семків О.М. Опис руху частки ґрунту по лопатці із профілем брахістохрони у полі відцентрових сил інерції / Семків О.М., Шатохін В.М., Попова А.М. // Геометричне та комп'ютерне моделювання.– Харків: ХДУХТ, 2012.– Вип. 30.– С. 190-200.

*В.М. Шатохин, О.М. Семкив, А.Н. Попова*

#### **УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ФОРМЫ ЛОПАСТИ РОТОРНОГО МЕТАТЕЛЯ ГРУНТА ДЛЯ ТУШЕНИЯ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ**

Предложен метод определения оптимальной формы лопасти роторного грунтометателя, который базируется на решении задачи о брахистохроне для поля центробежных сил инерции. Построен функционал времени в полярной системе координат и записано соответствующее уравнение Эйлера; получен его первый интеграл, для которого найдено аналитическое решение. Установлено, что решение имеет разную структуру в зависимости от параметров метателя. Представлены результаты применения теории для нахождения оптимальной формы лопасти грунтометателя.

*V.M. Shatokhin, O.M. Semkiv, A.N. Popova*

#### **DEVELOPMENT OF ROTARY GROUND-THROWER BLADE'S OPTIMUM FORM FOR FOREST FIRE EXTINGUISHING**

Method of determination of ground-thrower blade's optimum form based on solution of brachistochrone problem for the field of centrifugal inertial forces. Time functional in polar coordinate system is built and corresponding Euler equation is written; its first integral is obtained, for which the analytical solution is found. It is determined that solution has different structure depending on thrower's parameters. Results of the theory application for search of ground-thrower blade's optimum form are represented.

**Key words:** ground-thrower, turning rotor, blade profile form, centrifugal inertial force, brachistochrone, movement time functional, Euler equation.

