УДК 517.912

Р.М. Тацій,** д-р фіз.-мат. наук, професор, **М.І. Кусій,** канд. пед. наук, **О.Ю. Пазен
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕПЛООБМІНУ В БАГАТОШАРОВІЙ НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛИТІ З ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИМ РОЗПОДІЛОМ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА

В даній роботі в замкненій формі розв'язана задача про визначення розподілу одновимірного стаціонарного температурного поля в багатошаровій нескінченній плиті з кусково-змінним коефіцієнтом теплопровідності за наявності дискретно-неперервних внутрішніх джерел тепла. Розв'язок задачі конструктивний і виражається виключно через її вихідні дані. При розв'язуванні задачі використовуються основні положення теорії теплопередачі, теорії узагальнених систем лінійних диференціальних рівнянь та елементи теорії узагальнених функцій.

Ключові слова: температура, тепловий потік, квазідиференціальне рівняння, матриця Коші, функція Дірака, функція обмеженої варіації.

Вступ. Багатошарові елементи конструкцій застосовуються у будівельній промисловості. При дії високих температур, зокрема при пожежі, виникає загроза їх руйнування. У зв'язку з цим задача дослідження температурного поля в будівельних конструкціях є актуальною. Визначенню температурного поля в багатошарових конструкціях при кусково-сталому коефіцієнті теплопровідності присвячено ряд робіт [1], [4].

В даній роботі в замкненій формі для довільного n розв'язана стаціонарна задача про поширення температури в n-шаровій нескінченній плиті з урахуванням впливу розподілених та точкових (міжшарових) внутрішніх джерел тепла.

Постановка задачі та її математична модель

В прямокутній декартовій системі координат oxyz розглядається нескінченна плита товщиною l, тобто $[1]$ область, що обмежена площинами $x = x_0 = 0$ і $x = x_n = l$. Ця область поділена на n шарів площинами: $x = x_1, x = x_2, ...x = x_{n-1}$, різної товщини. Припускається, що кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності та внутрішнім неперервним джерелом тепла. Крім цього, закладається наявність зосереджених джерел тепла на границях шарів. Будемо вважати, що температура в плиті поширюється лише в напрямку осі ox,тобто задача про дослідження теплообміну є одновимірною. В загальному випадку $[1]$ така задача зводиться до розв'язування на відрізку $[0,l]$ диференціального рівняння

$$\left(\lambda t'\right)' = -f \tag{1}$$

при певних крайових умовах.

Тут $t(x)$ – температура, $\lambda(x)$ – коефіцієнт теплопровідності, $f(x)$- функція розподілу джерел тепла, а точки $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ – сліди перетину відповідних площин з віссю ox.
Надалі використовуватимемо такі позначення: θ_k – характеристична функція напіввідкритого проміжку $[x_k, x_{k+1})$,тобто,

$$\theta_k = \begin{cases} 1, якщо x \in [x_к, x_{к+1}) \\ 0, якщо x \notin [x_к, x_{к+1}) \end{cases},$$

$\lambda_к(x)\rangle 1$ – коефіцієнт теплопровідності на проміжку $[x_k, x_{k+1})$;

$r_k(x)$ – функція розподілу джерела тепла на$[x_k, x_{k+1})$;

$\delta_k(x - x_k)$ – δ – функція Дірака з носієм в точці $x = x_k$; s_k– дійсні числа;

$BV^{+}[0;l]$ – клас неперервних праворуч функцій обмеженої на $[0;l]$ варіації [3];
для довільної функції $\phi(x) \in BV^{+}[0;l]$ $\Delta\phi(x_k) = \phi(x_k) - \phi(x_k - 0)$ – стрибок функції $\phi(x)$ в точці $x = x_k$.

Функції $\lambda_k(x)$ і $r_k(x)$ на відповідних проміжках вважатимемо неперервними.

Покладемо

$$\lambda_k(x) \overset{df}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(x)\theta_k , \; f(x) \overset{df}{=} -\sum_{k=0}^{n-1} r_k(x)\theta_k - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta(x - x_k);$$

Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(x)\theta_k \cdot t' \right)' = -\sum_{k=0}^{n-1} r_k\theta_k - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta(x - x_k); \tag{2}$$

Позначимо ще $y^{[1]} \overset{df}{=} \lambda y'$-квазіпохідна (тепловий потік).

До рівняння (2) слід додати систему двох лінійно-незалежних крайових умов, що в загальному випадку є нелокальними:

$$\begin{cases} p_{11} \cdot t(x_0) + p_{12} \cdot t^{[1]}(x_0) + q_{11} \cdot t(x_n) + q_{12} \cdot t^{[1]}(x_n) = \gamma_1 \\ p_{21} \cdot t(x_0) + p_{22} \cdot t^{[1]}(x_0) + q_{21} \cdot t(x_n) + q_{22} \cdot t^{[1]}(x_n) = \gamma_2 \end{cases}; \tag{3}$$

Тут p_{ij}, q_{ij}, γ_k – відомі дійсні числа, $t(x_0), t^{[1]}(x_0), t(x_n), t^{[1]}(x_n)$ – значення температури та теплового потоку в точках $x = x_0$ і $x = x_n$ відповідно.

Крайова задача (2), (3) є математичною моделлю розподілу температурного поля в нескінченній плиті при найбільш загальних крайових умовах та припущеннях відносно характеру внутрішніх джерел тепла.

Узагальнена система диференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами

Розглянемо на $[0,l]$ систему диференціальних рівнянь

$$\overline{Y}' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k\theta_k \right) \cdot \overline{Y} + \sum_{k=0}^{n-1} R_k\theta_k + \sum_{k=1}^{n-1} \overline{S}_k \cdot \delta(x - x_k); \tag{4}$$

З початковою умовою

$$\overline{Y}(x_0) = \overline{Y}^0; \tag{5}$$

де $\overline{Y}, \overline{R}_k, \overline{S}_k - n$ – вимірні вектори, A_k – квадратні $(m \times m)$ матриці, причому $\overline{Y}$ – невідомий вектор, $\overline{S}_k$ – числові вектори, A_k і $\overline{R}_k$ неперервні на проміжку $[x_k, x_{k+1})$ матриці-функції та вектор-функції відповідно.

На кожному з проміжків $[x_k, x_{k+1})$ система (4) має вигляд

$$\overline{Y}'_{(k)} = A_k \cdot \overline{Y}_{(k)} + \overline{R}_k + \overline{S}_k \cdot \delta(x - x_k), \tag{6}$$

де слід прийняти $\overline{S}_0 = \overline{0}$, $S_n = 0$.

Надалі вважатимемо, що для відповідної однорідної системи $\overline{Y}'_{(k)} = A_k \cdot \overline{Y}_{(k)}, k = 0,1,2,...,n-1$ (7) - відома матриця Коші $B_k(x,s)$, що має властивості $[2]$:

За змінною x вона справджує матричне рівняння $B'_k(x,s) = A_k B_k(x,s)$;

$B_к(s,s) = E$, де E – одинична матриця;

Для будь-яких $x_1, x_2, x_3 \in [x_k, x_{k+1})$ $B_2(x_3,x_2) \cdot B_1(x_2,x_1) = B(x_3,x_1)$.

Для будь-яких $k > i \geq 0$ додатково позначимо

$$B\left(x_k,x_i\right)\overset{df}{=}B_{k-1}\left(x_k,x_{k-1}\right)\cdot B_{k-2}\left(x_{k-1},x_{k-2}\right)...B_i\left(x_{i+1},x_i\right), \tag{8}$$

при цьому приймемо $B\left(x_k,x_k\right)=E$.

Розв'язок рівняння (4) на проміжку $\left[x_k,x_{k+1}\right)$ шукаємо у вигляді

$$\overline{Y}_k=B_k\left(x,x_k\right)\cdot\overline{P}_k+\int_{x_k}^{x}B_k\left(x,s\right)\cdot\overline{R}_k\left(s\right)ds, \tag{9}$$

де $\overline{P}_k$ поки що невідомий вектор.

Аналогічно, на $\left[x_k,x_{k+1}\right)$,

$$\overline{Y}_{k-1}=B_{k-1}\left(x,x_{k-1}\quad\right)\cdot\overline{P}_{k-1}+\int_{x_{k-1}}^{x}B_{k-1}\left(x,s\right)\overline{R}_{k-1}\left(s\right)ds \tag{10}$$

В точці $x=x_k$ повинна виконуватися умова спряження [2] $\overline{Y}_k\left(x_k\right)=\overline{Y}_{k-1}\left(x_k\right)+\overline{S}_k$, що згідно з формулами (9) і (10) приводить до рекурентного співвідношення

$$\overline{P}_k=B_{k-1}(x_k,x_{k-1})\cdot\overline{P}_{k-1}+\int_{x_{k-1}}^{x_k}B_{k-1}(x_k,s)\overline{R}_{k-1}(s)ds+\overline{S}_k. \tag{11}$$

Покладаючи $\overline{P}_0=\overline{Y}_0$, методом математичної індукції з (11) отримуємо, що

$$\overline{P}_k=B\ \left(x_k,x_0\right)\cdot\overline{Y}^0+\sum_{i=0}^{k}B(x_k,x_i)\cdot\overline{Z}_i, \tag{12}$$

де позначено

$$\overline{Z}_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}B_{i-1}(x_i,s)\overline{R}_{i-1}(s)ds+\overline{S}_i, i=1,2,...,n-1, \tag{13}$$

причому слід покласти $\overline{Z}_0=\overline{0},\overline{S}_n=\overline{0}$.

Таким чином, ми отримали такий результат.

Теорема. На кожному з проміжків $\left[x_k,x_{k+1}\right)$ задача Коші (4), (7) має єдиний розв'язок. $\overline{Y}_k\left(x\ \right)\in BV^+\left[0,l\right]$, що зображується у вигляді

$$\overline{Y}_k\left(x\right)=B_k\left(x,x_k\right)\cdot B\left(x_k,x_0\right)\cdot\overline{Y}^0+B_k\left(x,x_k\right)\cdot\sum_{i=0}^{k}B\left(x_k,x_i\right)\cdot\overline{Z}_i+\int_{x_k}^{x}B_k\left(x,s\right)\overline{R}_k\left(s\right)ds,$$
$$k=0,1,2,...,n-1, \tag{14}$$

де матриці $B\left(x_k,x_i\right)$ і вектори $\overline{Z}_i$ обчислюються за формулами (8) і (13) відповідно, причому, $B\left(x_k,x_k\right)=E$. При цьому стрибок разв'язку в точці $x=x_k$

$$\Delta\overline{Y}_k\left(x_k\right)=\overline{S}_k,\ k=1,2,\ldots,n-1.$$

Розвязування вихідної задачі шляхом зведення до відповідної системи

Введемо вектори

$$\overline{Y}=\left(t,t^{[1]}\right)^{\mathrm{T}},\overline{R}_k\left(0,-r_k\right)^{\mathrm{T}},\ \overline{S}_k\left(0,-s_k\right)^{\mathrm{T}}\text{та матриці } A_k=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\lambda_k}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тоді квазідиференціальне рівняння (2) зводиться до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку типу (4):

$$\bar{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k} \theta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \bar{Y} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\sum_{k=0}^{n-1} r_k \theta_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\sum_{k=1}^{n-1} s_k \delta\left(x - x_k\right) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Запишемо крайові умови (3) також в матричному вигляді $\left[3\right]$

$$P \cdot \bar{Y}\left(x_0\right) + Q \cdot \bar{Y}\left(x_n\right) = \bar{\Gamma}, \tag{16}$$

де позначено

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},\ \bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатися безпосередньою перевіркою, що матриця Коші $B_k\left(x, s\right)$ системи (що є аналогом системи (7))

$$\bar{Y}'_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \bar{Y}_{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1,$$

має вигляд

$$B_k\left(x, s\right) = \begin{pmatrix} 1 & b_k\left(x, s\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

де позначено

$$b_k\left(x, s\right) = \int_s^x \frac{d\tau}{\lambda_k\left(\tau\right)}. \tag{18}$$

Це дає можливість за допомогою формули (14) побудувати розв’язок $\bar{Y}_k\left(x\ \right)$ шляхом зведення двоточкової задачі (15), (16) до задачі Коші. Слід зауважити, що матриці типу (17) перемножуються спеціальним чином. Так, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \left(a_1 + a_2\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В зв’язку з цим і згідно з формулою (8) в нашому випадку

$$B\left(x_k, x_i\right) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=i}^{k-1} b_j\left(x_{j+1}, x_j\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Тоді
$$B\left(x\ , x_k\right) \cdot B\left(x_k, x_i\right) = \begin{pmatrix} 1 & \left(b_k\left(x, x_k\right) + \sum_{j=i}^{k-1} b_j\left(x_{j+1}, x_j\right)\ \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Обчислимо ще

$$\int_{x_k}^x B_k\left(x, s\right) \bar{R}_k\left(s\right) ds = \int_{x_k}^x \begin{pmatrix} 1 & b_k\left(x, s\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r_k\left(s\right) \end{pmatrix} ds = \int_{x_k}^x \begin{pmatrix} b_k\left(x, s\right) \cdot (-r_k\left(s\right)) \\ -r_k\left(s\right) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} I_k\left(x\right) \\ I_k^{[1]}\left(x\right) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

де позначено
$$I_k\left(x\right) = -\int_{x_k}^x b_k\left(x, s\right) \cdot r_k\left(s\right) ds,\ I_k^{[1]}\left(x\right) = -\int_{x_k}^x r_k\left(s\right) ds.$$

В цих позначеннях, згідно з (13)

$$\overline{Z}_i = \begin{pmatrix} I_{i-1}(x_i) \\ I_{i-1}^{[1]}(x_i) + s_i \end{pmatrix}, \quad \overline{Z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{Z}_n = \begin{pmatrix} I_{n-1}(x_n) \\ I_{n-1}^{[1]}(x_n) \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

(Ще раз зауважимо, що $\overline{Z}_0 = \overline{0}$!).

Щоб скористатися формулою (14) виразимо початковий вектор $\overline{Y}^0 = \overline{Y}(x_0)$ з (16), зауваживши при цьому, що $\overline{Y}(x_n) = \overline{P}_n$:

$$P \cdot \overline{Y}^0 + Q \cdot \overline{P}_n = \overline{\Gamma} \Rightarrow P \cdot \overline{Y}^0 + Q \cdot \overline{P}_n = \overline{\Gamma}, \Rightarrow P \cdot \overline{Y}^0 + Q\left[B(x_n, x_0) \cdot \overline{Y}^0 + \sum_{i=0}^{n} (x_n, x_i) \cdot \overline{Z}_i \right] = \overline{\Gamma},$$

$$\Rightarrow \overline{Y}^0 = \left[P + Q \cdot B(x_n, x_0) \right] \cdot \left[\ \overline{\Gamma} - Q \cdot \sum_{i=1}^{n} B(x_n, x_i) \cdot \overline{Z}_i \ \right]^{-1}. \qquad (23)$$

Отже, з урахуванням формул (19), (20), (21), (22) і (23), розв'язок крайової задачі (1), (2) на довільному проміжку $\left[x_k, x_{k+1}\right)$ є першою координатою двовимірного вектора.

$$\overline{Y}_k(x) = B_k(x, x_k) \cdot B(x_k, x_0) \cdot \overline{Y}^0 + B_k(x, x_k) \cdot \sum_{i=0}^{k} B(x_k, x_i) \cdot \overline{Z}_i + \int_{x_k}^{x} B_k(x, s) \cdot \overline{R}_k(s)\, ds. \qquad (24)$$

Очевидно, що цей розв'язок існує і єдиний, якщо $\det\left[P + Q \cdot B(x_n, x_0) \right]^{-1} \neq 0$. (25)

Спеціальний випадок

Розглянемо частковий, але важливий випадок, коли коефіцієнт теплопровідності $\lambda(x)$ та функція $r(x)$ є кусково-сталими на $\left[x_0, x_n\right]$: $\lambda_k = const$, $r_k = const$ $\forall k = \overline{0, n-1}$.

Тоді формули (17), (19), (20), (21) та (22) набувають вигляду:

$$B_k(x, s) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x-s}{\lambda_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (26)$$

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{j=i}^{k-1} \dfrac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (27)$$

$$B_k(x, x_k) \cdot B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \left[\dfrac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum\limits_{j=i}^{k-1} \dfrac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (28)$$

$$\int_{x_k}^{x} B_k(x, s)\, ds \cdot \overline{R_k} = \begin{pmatrix} \dfrac{-r_k}{2\lambda_k}(x - x_k)^2 \\ -r_k(x - x_k) \end{pmatrix}; \qquad (29)$$

$$z_i = \frac{r_{i-1}}{2\lambda_{i-1}}(x_i - x_{i-1})^2; \quad z_i^{[1]} = r_{i-1}(x_i - x_{i-1}); \quad z_0 = z_0^{[1]} = 0; \quad s_0 = s_n = 0; \qquad (30)$$

$$\overline{Z}_0 = \overline{0}, \ \overline{Z}_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_n^{[1]} \end{pmatrix}.$$

Тут в (30) для скорочення позначено $I_{i-1}(x_i) = z_i$, $I_{i-1}^{[1]}(x_i) = z^{[i]}$.

В цих позначеннях, очевидно,

$$\bar{Z}_i = \begin{pmatrix} z_i \\ z_i^{[1]} + s_i \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Приклад 1. Знайти на проміжку $\left[x_k, x_{k+1}\right)$ температуру $\left(t_k(x)\right)$ та тепловий потік $\left(t_k^{[1]}(x)\right)$, якщо на зовнішніх стінках задана температура:

$$\begin{cases} t(x_0) = t_0 \\ t(x_n) = t_n \end{cases}; \tag{32}$$

Розв'язування

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що крайові умови (32) можна записати у вигляді (16):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(x_0) \\ t^{[1]}(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(x_n) \\ t^{[1]}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_n \end{pmatrix}.$$

На основі (23) отримуємо:

$$\bar{Y}^0 = \begin{pmatrix} t^0 \\ t^{[1]0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ \dfrac{(t_n - t_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} \left\{ z_i + \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \cdot \sum\limits_{j=i}^{n-1} \dfrac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right\}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j}} \end{pmatrix}.$$

Підставляючи тепер знайдений вектор $\left(t^0, t^{[1]0}\right)^{\mathrm{T}}$, остаточно отримуємо, що

$$t_k(x) = t_0 + \frac{(t_n - t_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} \left\{ z_i + \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \cdot \sum\limits_{j=i}^{n-1} \dfrac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right\}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j}} \times \left[\frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right] -$$

$$- \sum_{i=0}^{k} \left\{ z_i + \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \cdot \left[\frac{x - x_k}{\lambda_k} + \sum_{j=i}^{k-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right] \right\} - \frac{r_k}{2\lambda_k} (x - x_k)^2 ;$$

$$t_k^{[1]}(x) = \frac{(t_n - t_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} \left\{ z_i + \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \cdot \sum\limits_{j=i}^{n-1} \dfrac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j} \right\}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_j}} - \sum_{i=0}^{к} \left\{ z_i + \left(z_i^{[1]} + s_i \right) \right\} - r_k (x - x_k).$$

Вирази для температури $t_k(x)$ і теплового потоку $t_k^{[1]}(x)$ отримані на довільному проміжку $\left[x_k, x_{k+1}\right)$. За допомогою характеристичних функцій θ_k температура $t(x)$ і тепловий потік $t_k^{[1]}(x)$ можуть бути записані єдиними аналітичними виразами для всієї плити:

$$t(x) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k(x) \theta_k , \quad t^{[1]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{[1]}{}_k(x) \theta_k .$$

Висновок. У запропонованій роботі розглянуто стаціонарну задачу про поширення тепла в n-шаровій нескінченній плиті при неідеальному тепловому контакті між шарами що зумовлено наявністю зосереджених між шарових джерел тепла.

Розв'язок поставленої задачі отримано в замкненій формі виключно через її вихідні дані. Застосування одержаних результатів проілюстровано на прикладі.

Список літератури:

1. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности/ А.В. Лыков// Высш. шк - М., 1967. – 559 с.
2. **Власій О.О.** Структура розв’язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами/ О.О. Власій, М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій// Вісник НУ «Львівська політехніка», фіз.-мат. науки. – 2009. – №660. – С.34-38.
3. **Халанай А.** Качественная теория импульсных систем/ А. Халанай, Д. Векслер// «Мир» – М:, 1971. – 309с.
4. **Величко Л.Д.** Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі/Л.Д. Величко, Р.Я. Лозинський, М.М. Семерак// «Сполом» – Львів., 2011. – 497с.

Р.М. Таций, М.И. Кусий, О.Ю. Пазен

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В МНОГОСЛОЙНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЕ ИЗ ДИСКРЕТНО НЕПРЕРЫВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕПЛА

В данной работе в замкнутой форме решена задача об определении распределения одномерного стандартного температурного поля в многослойной бесконечной плите с кусочно-переменным коэффициентом теплопроводности при наличии дискретно-непрерывных внутренних источников тепла. Решение задачи конструктивно и выражается исключительно через ее исходные данные. При решении задачи используются основные положения теории теплопередачи, теории обобщенных систем линейных дифференциальных уравнений и элементы теории обобщенных функций.

Ключові слова: температура, тепловой поток, квазидифференциальное уравнение, матрица Коши, функция Дирака.

R.M. Tatsiy, M.I. Kusiy, O.Y. Pazen

RESEARCH OF HEAT EXCHANGE IN MULTI-LAYERED ENDLESS PLATE FROM DISCRETELY CONTINUOUS HEAT DISTRIBUTION

The research in the reserved form solves a problem of determination of onedimensional stationary temperature field distribution in a multi-layered endless plate with cobbed-variable coefficient of heat-conducting at presence of discretely continuous internal sources of heat. Task solution is constructed and expressed exceptionally by means of its input data. To solve the task the main statements of heat transfer theory, theory of generalized systems of linear differential equalizations and elements of generalized functions theory have been used.

Key words: temperature, thermal stream, quasidifferential equation, Cauchy matrix, Dirac delta function, function of limited variation.

❖ ❖ ❖