УДК 681.142.2; 622.02.658.284; 621.325

Д.Д. Пелешко, канд. техн. наук, доцент (НУ "Львівська політехніка"),
М.З. Пелешко, канд. техн. наук (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

МОДЕЛЬ ЛІНІЙНОГО ФУНКЦІОНАЛА, ВИЗНАЧЕНОГО НА ТОПОЛОГІЇ ЗОБРАЖЕННЯ

Розроблено представлення векторної функції, яки визначена на фрагментних топологіях зображень. На основі цього представлення запропоновано модель функціонала з простору топологічного покриття в одномірний простір дійсних чисел. Доведення лінійності цього функціонала дає змогу ввести операцію додавання та множення на скаляр для операторів, визначених на сепарабельних гільбертових просторах, і для задач, пов'язаних із факторизацією цих просторів. Встановлено, що лінійність запропонованого функціонала дає змогу перейти до побудови й аналізу адитивних груп функціональних відображень, визначених на дискретних топологіях зображення.

***Ключові слова*: факторизація, вектор-функція, векторні моделі.**

Вступ. Функціональні та імовірнісні моделі представлення зображень є основними з тих, що використовуються на практиці для розроблення методів оброблення зображень. Це стало основною причиною розроблення моделі фунціонала в межах представлення зображення як потоку вектор-функції.

У значній кількості прикладних випадків оброблення зображення передбачає операцію розбиття, тобто формування характеристичних топологій для подальшого оброблення їх методами класифікації, сегментації тощо. Для цього простори, на яких визначено моделі представлення повинні бути метричними і володіти властивістю сепарабельності за заданими метриками. Це означає, що побудова методів оброблення зображень передбачає визначення гільбертових сеперабельних топологічних просторів із метриками, які повинні виражати відношення еквівалентності, принаймні на множинах міри нуль. А тому дефініція гільбертового сепарабального простору і лінійного функціонала на ньому є актуальною теоретичною задачею для подальшого розроблення методів оброблення зображень.

1. Постановка задачі

Метою цієї роботи є побудова моделі лінійного відображення, визначеного на заданому підпросторі (покритті) топологічного простору, формалізація задачі факторизації колірного топологічного простору зображення та наборів зображень для подальшого розроблення прикладних методів цифрового оброблення зображень та наборів зображень.

Для досягнення цієї мети до розгляду потрібно ввести топологію зображення і визначити на ній вектор-функцію векторної моделі представлення зображення та наборів зображень.

2. Модель вектор-функції представлення зображення та наборів зображень

За основу математичної моделі векторного представлення зображень приймається гіпотеза, про існування деякого векторного поля **[**9**]** (вектор-функції від векторного аргументу, який виступає точкою простору). За вектор-функцію приймається вектор $\mathbf{C} = \left(\mathrm{C}^1\left(\mathbf{X}_z^{2,+,d}\right),\ldots,\mathrm{C}^{N_{pal}}\left(\mathbf{X}_z^{2,+,d}\right)\right)$, де N_{pal} – розмірність палітри кольорів.

За такого підходу характеристикою зображення P_z є потік абстрактного вектора **C**, через деяку плоску гіперповерхню $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ **[**5, 7, 9**]**, яка, своєю чергою, за геометричними параметрами рівна площині зображення P_z. Це означає, що кожному P_z у відповідність ставиться скалярний поверхневий інтеграл, який є потоком вектора **C** крізь поверхню $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$

$$P_z \to \Phi_z = \int\limits_{\mathrm{X}_z^{2,+,d}} \mathrm{C}\cdot d\mathrm{X}_z^{2,+,d}, \quad z = 1 \ldots N, \tag{1}$$

де: $\mathbf{\Phi}_z$ – потік вектора **C**; $\mathbf{X}_z^{2,+,d} \subset \mathbf{N}^{2,+}$ – двовимірний топологічний многовид [6], як хаусдорфовий топологічний підпростір [1, 6] евклідового простору $\mathbf{N}^{2,+}$ [6, 8] з границею $\partial\mathbf{X}_z^{2,+,d}$. Індекс z застосовують у тому випадку, коли зображення належить певному наборові

$$\mathbf{P} = \left\{P_z\right\}_{z=1\ldots N}, \tag{2}$$

де N – розмірність набору.

У (1) вектор **C** приймається направлений по нормалі до поверхні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$. Більше того, допускається наявність векторного елемента поверхні $d\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ майже усюди на $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ [5]. Оскільки $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ є замкненою і обмеженою поверхнею, то координатні напрями (i, j) впорядковуються так, щоб напрямок вектора $d\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ збігався по нормалі з напрямом вектора **C**. Очевидно, що площа $\int\limits_{\mathbf{X}_z^{2,+,d}} d\mathbf{X}_z^{2,+,d}$, поверхні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ повинна існувати.

Описаний підхід визначає наявність деякого силового поля $\left(\Omega_\mathbf{C}\right)$. Зображення фактично є ніби деяким перпендикулярним зрізом цього поля. Координати вектора **C** на поверхні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ можуть визначатись вектором

$$\mathbf{C}_z = \underbrace{\left(c^d_{z\,(1,1)}, \ldots, c^d_{z\,(l_z,h_z)}\right)}_{l_z h_z}, \tag{3}$$

або матрицею

$$\mathbf{C}_z = \begin{pmatrix} c^d_{z\,(1,1)} & \ldots & c^d_{z\,(l,1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c^d_{z\,(1,h)} & \ldots & c^d_{z\,(l,h)} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для набору **P**(2) спостерігається таке: якщо в просторі $\left(\Omega_\mathbf{C}\right)$ відносно представлень (3) або (4) ввести операцію додавання "$\oplus$" (як додавання векторів для (3) чи додавання матриць (4)) та множення на скаляр "$\cdot$", то многовид $\left(\Omega_\mathbf{C}\right)$ стає лінійним простором.

Із обмеженості простору (z = 1 та z = N) та зліченності $\left(\Omega_\mathbf{C}\right)$ випливає його замкненість. Оскільки лінійний многовид $\left(\Omega_\mathbf{C}\right)$ є замкненим, то він утворює векторний простір [3, 4].

Оператор набору можна подати у вигляді вектора матриць

$$\mathbf{C} = \left\{\mathbf{C}_z\right\}^{\mathrm{T}}_{z=1..N} = \left(\begin{pmatrix} c^d_{1\,(1,1)} & \ldots & c^d_{1\,(l,1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c^d_{1\,(1,h)} & \ldots & c^d_{1\,(l,h)} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} c^d_{N\,(1,1)} & \ldots & c^d_{N\,(l,1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c^d_{N\,(1,h)} & \ldots & c^d_{N\,(l,h)} \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

Тоді для **P** ставиться у відповідність набір вектор-функцій кольору **C** крізь різні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$. Цей набір є третьою характеристикою, але тільки набору зображень

$$\mathbf{P} \to \left\{\Phi_z\right\}_{z=1..N}. \tag{6}$$

Над евклідовим простором $\left\{\Phi_z\right\}$ можна ввести аксіоматику Колмогорова [10] і перейти до оброблення зображень та наборів зображень за допомогою класичних методів теорії ймовірностей і кореляційного аналізу.

Потік вектора у фрагментній топології. Зважаючи на адитивність поверхневого інтеграла **[**5, 7**]**, на заданій топології $\Im_z$ для зображення P_z визначимо скінченне покриття $\left(\chi_{z,m} \mid N_{\chi_z}\right)$. Тоді формулу (1) можна записати у вигляді

$$\Phi_z \le \sum_{m=1}^{N_{\chi_z}} \int_{\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}} \mathbf{C} d\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}, \qquad \mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d} \in \chi_z, \quad z = 1...N, \tag{7}$$

де $\int_{\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}} \mathbf{C} d\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}$ – потік вектора $\mathbf{C}$ через фрейм $\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}$ покриття $\left(\chi_{z,m} \mid N_{\chi_z}\right)$ зображення P_z і є характеристикою фрагмента $P_{z,m}$, який належить покриттю $\left(\vartheta_z \mid N_{\chi_z}\right)$ індукованої топології $\mho_z$. Якщо χ_z є унікальним, то випливає знак рівності

$$\Phi_z = \sum_{m=1}^{N_{\chi_z}} \int_{\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}} \mathbf{C} d\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}, \qquad \mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d} \in \chi_z, \quad z = 1...N, \tag{8}$$

Якщо ввести позначення потоку вектора $\Phi_{z,m}$ крізь фрейм $\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}$

$$\forall z \in [1...N]: \quad \Phi_{z,m} = \int_{\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}} \mathbf{C} d\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}, \qquad m \in \left[1..N_{\chi_z}\right], \tag{9}$$

то (6) можна записати у вигляді

$$\forall z \in [1...N]: \quad \Phi_z = \sum_{m=1}^{N_{\chi_z}} \Phi_{z,m}. \tag{10}$$

Приймаючи до уваги (1), інтеграл (9) у випадку скінченного унікального покриття можна звести до квадратурної формули **[**7**]**

$$\forall z \in [1...N]: \; \Phi_{z,m} = s_{\mathrm{fr}\;z,m} \sum_{i=y_{\text{поч}\;z,m}}^{x_{\text{поч}\;z,m}+l_{\mathrm{fr}\;z,m}} \; \sum_{j=y_{\text{поч}\;z,m}}^{y_{\text{поч}\;z,m}+h_{\mathrm{fr}\;z,m}} c_{z,m\,(i,j)}. \tag{11}$$

Визначений на фреймі $\mathbf{X}_{\mathrm{fr}\,z,m}^{2,+,d}$ потік $\Phi_{z,m}$ є функціоналом на топології $\Im_z$.

3. Гільбертовий простір у векторній моделі представлення зображень

Введення скалярного добутку дає змогу побудувати норму і перейти до нормованих чи гільбертових просторів. Розглянемо організацію гільбертового простору над набором **P** під час векторного представлення зображень, яке виконали у п. 2.

Розглянемо певний абстрактний простір $\left(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}\right)$. Для цього простору скалярний добуток введемо так

$$\left\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} \right\rangle = \Phi_{z_1} \Phi_{z_2}. \tag{12}$$

Тоді норму можна визначити

$$\left\| \mathbf{C}_z \right\|_{\mathbf{C},\Phi} = \Phi_z. \tag{13}$$

А метрикою може виступати звичайна евклідова відстань між потоками

$$d_{\mathbf{C},\Phi}\left(\mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}\right) = \left|\Phi_{z_1} - \Phi_{z_2}\right|. \tag{14}$$

Завдяки цьому поле $\Omega_{\mathbf{C}}$ можна розглядати нормованим векторним простором $\left(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}\right)$.

Твердження 1. Простір $\left(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}\right)$ є гільбертовим.

Доведення.

$\triangleleft$

Для скалярного добутку (12) виконуються умови:

1) додатної визначеності

$$\left\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_1} \right\rangle = \Phi_{z_1}^2 \geq 0\,. \tag{15}$$

2) ермітової симетрії

$$\left\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} \right\rangle = \Phi_{z_1}\,\Phi_{z_2} = \Phi_{z_2}\,\Phi_{z_1} = \overline{\left\langle \mathbf{C}_{z_2}, \mathbf{C}_{z_1} \right\rangle}\,. \tag{16}$$

3) асоціативності

$$\alpha\left\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} \right\rangle = \alpha\,\Phi_{z_1}\,\Phi_{z_2} = \Phi_{z_1}\left(\alpha\,\Phi_{z_2}\right) = \left\langle \mathbf{C}_{z_1}, \alpha\mathbf{C}_{z_2} \right\rangle. \tag{17}$$

4) дистрибутивності

$$\left\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} \right\rangle + \left\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_3} \right\rangle = \Phi_{z_1}\,\Phi_{z_2} + \Phi_{z_1}\,\Phi_{z_3} = \Phi_{z_1}\left(\Phi_{z_2} + \Phi_{z_3}\right) = \left\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} + \mathbf{C}_{z_3} \right\rangle. \tag{18}$$

Отже, простір $\left(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}\right)$ є унітарним. Унітарний скінченний простір є повним **[4]**. А повний унітарний векторний простір (банаховий простір) є гільбертовим.

$\triangleright$

Доведення твердження 1 може бути простішим – оскільки простір $\left(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}\right)$ є нормованим і скінченно-мірним, то він є повним, тобто банаховим. А банаховий простір із введеним скалярним добутком є гільбертовим.

Можливість формування різноманітних топологій при заданих метриках вимагає визначення властивості сепарабельності введеного гільбертового простору. Тому розглянемо наступне твердження.

Твердження 2. Простір $\left(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}\right)$ є сепарабельний.

Доведення.

$\triangleleft$

Простір $\left(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}\right)$ є нормованим простором із нормою (13). А будь-який скінченно-мірний нормований простір є сепарабельним **[4]**.

$\triangleright$

Твердження 3. $\|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}$ є метрикою факторпростору $\Omega_{\mathbf{C},\|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}}/\tilde{}$ гільбертового простору $\left(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}\right)$.

Доведення.

Згідно з (1) і (14) маємо

$$d_{\mathbf{C},\Phi}\left(\mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}\right) = 0 \wedge \mathbf{C}_{z_1} \neq \mathbf{C}_{z_2}\,. \tag{19}$$

Тобто (14) є напівметрикою (псевдометрикою) **[6]**. Звідси випливає, що (14) є метрикою простору $\Omega_{\mathrm{C},\|\cdot\|_{\mathrm{C},\Phi}}/\tilde{}$ і твердження доведено.

Зазначимо, що норма $\|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}$ не є напівнормою **[6]**, тому простір $\left(\Omega_{\mathrm{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}\right)$ є нормованим напівметричним векторним простором.

4. Модель лінійного функціонала на многовиді $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$

Зважаючи на (1), потік Φ_z можна прийняти значенням абстрактного функціонала F_z,

$$F_z : \mathbf{X}_z^{2,+,d} \to \mathrm{R}^1, \tag{20}$$

який визначений на топологічному многовиді $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$. За (1) маємо

$$P_z \to \Phi_z, \quad \text{де} \quad F_z\left(\mathbf{X}_z^{2,+,d}\right) = \Phi_z. \tag{21}$$

Твердження 4. На многовиді $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ функціонал F_z є лінійним.

Доведення.

На многовиді $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ визначимо покриття скінченне покриття $\left(\chi_z \mid N_{\chi_z}\right)$ розмірності $N_{\chi_z} = 2$ й індуковане покриття $\left(\vartheta_z \mid N_{\chi_z}\right)$ такої ж розмірності. Тоді $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ можна представити у виді об'єднання двох топологічних підмноговидів

$$\mathbf{X}_z^{2,+,d} = \bigcup_{m=1}^{2} \mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,m}^{2,+,d}. \tag{22}$$

На $\mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,1}^{2,+,d}$ і $\mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,2}^{2,+,d}$ визначимо однаковий векторний елемент, наприклад $d\mathbf{X}_z^{2,+,d}$. Тоді з адитивності поверхневого інтеграла **[**7, 9**]** випливає, що

$$\begin{aligned} F_z\left(\mathbf{X}_z^{2,+,d}\right) &= F_z\left(\mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,1}^{2,+,d} + \mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,2}^{2,+,d}\right) = \int\limits_{\left(\mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,1}^{2,+,d} + \mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,2}^{2,+,d}\right)} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}_z^{2,+,d} = \\ &= \int\limits_{\mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,1}^{2,+,d}} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}_z^{2,+,d} + \int\limits_{\mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,2}^{2,+,d}} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}_z^{2,+,d} = F_z\left(\mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,1}^{2,+,d}\right) + F_z\left(\mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,2}^{2,+,d}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

А це перша властивість лінійності функціонала.

З іншого боку, нехай задано скаляр k. Тоді з лінійності **[**7, 9**]** поверхневого інтегралу другого роду випливає, що

$$kF_z\left(\mathbf{X}_z^{2,+,d}\right) = k\Phi_z = k \int\limits_{\mathbf{X}_z^{2,+,d}} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}_z^{2,+,d} = \int\limits_{\mathbf{X}_z^{2,+,d}} k\mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}_z^{2,+,d} = F_z\left(k\mathbf{X}_z^{2,+,d}\right). \tag{24}$$

А це означає, що друга умова лінійності також виконується. Отже F_z є лінійним.

Висновки

Запропоновано векторну модель представлення зображення та набору зображень, яка визначена на топологіях цифрових зображень. Це дає змогу привнести в оброблення зображень методи теорії векторного поля. Визначено базові характеристики моделі розроблення алгоритмів практичного оброблення зображень.

Запропоновано модель функціонала, який визначений на метричному дискретному просторі із заданою топологією. Доведення лінійності цього функціонала дає змогу ввести операцію додавання та множення на скаляр для операторів, визначених на сепарабельних гільбертових просторах, і для задач, пов'язаних із факторизацією цих просторів. Понад це, лінійність запропонованого функціонала дає змогу перейти до побудови й аналізу адитивних груп функціональних відображень, визначених на дискретних топологіях зображення.

Список літератури:

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М. : Изд-во "Наука", 1977.

2. Гусейн-Заде С.М. Лекции по дифференциальной геометрии. – М. : Изд-во МГУ, 2001. – 236 с.

3. Драган Я.П. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів / Я.П. Драган, Л.С. Сікора, Б.І. Яворський. – Львів : Центр стратегічних досліджень еко-біо-технічних систем, 1999. – 133 с.

4. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. – 4-е изд. / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Изд-во "Наука", 1976. – 236 с.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Изд-во "Наука", 1968. – 720 с.
6. Милнор Дж. Дифференциальная топология / Дж. Милнор, А. Уоллес. – М. : Изд-во "Мир", 1972. – 424 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. – М. : Изд-во "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1972. – Т. 2. – 572 с.
8. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. – М. : Изд-во "Мир", 1968. – 426 с.
9. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. – М. : Изд-во ГИФМЛ, 1963. – 246 с.
10. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – 2-е изд. – М. : Изд-во "Наука", 1974. – 434 с.

Д.Д. Пелешко, канд. техн. наук, доцент (НУ "Львовская политехника"),
М.З. Пелешко, канд. техн. наук (Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности)

МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА, ОПРЕДЕЛЕННОГО НА ТОПОЛОГИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Разработано представление векторной функции определенной на фрагментных топологиях изображений. На основе этого представления предложена модель функционала из пространства покрытия в одномерное пространство действительных чисел. Доказанная линейности этого функционала дает возможность ввести операцию добавления и умножения на скаляр для опеРаторов, определенных на сепарабельных гильбертовых пространствах, и для задач, связанных с факторизацией этих пространств. Установлено, что линейность предложенного функционала дает возможность перейти к построению и анализу адитивных групп функциональных отображений, определенных на дискретной топологии изображения.
***Ключевые слова*:** факторизация, вектор-функция, векторные модели.

D.D. Peleshko, Assoc. prof. (NU "Lvivs'ka Politekhnika"),
M.Z. Peleshko, Assoc. prof. (Lviv State University of Vital Activity Safety)

MODEL OF LINEAR FUNCTIONAL, CERTAIN ON THE TOPOLOGY OF IMAGE

There is developed the presentation of the vector function of that determined on the fragmentary topologies of images. On the basis of this presentation the model of functional from the space of open covering into the space of real number is proposed. Well-proven linearness of this functional enables to enter the operation of addition and multiplying by scalars for operators, certain on separabel gil'bertovykh spaces, and for tasks, related to factorization of these spaces. It is set that the linearness of offered functional is given by possibility to pass to the construction and analysis of additive groups of functional reflections, certain on the discrete topology of image.
***Key words*:** factorization, vector-function, vectorial models.