УДК 517.912

Р.М. Тацій, д-р фіз.-мат. наук, професор, М.Ф. Стасюк, канд. фіз.-мат. наук, доцент
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕВНОГО КЛАСУ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Розглянуто одну з моделей дослідження реальних явищ – узагальнену лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь із кусково-змінними коефіцієнтами. Метод розв'язання такої системи проілюстровано на прикладі крайової задачі для квазідиференціального рівняння 2-го порядку. Результати роботи можна використовувати для розв'язання задач про розподіл температури під час пожеж у системах з дискретно-неперервними джерелами тепла, коливань стрижнів з насадженими дисками та аналогічних задач для пластинок і оболонок.

Ключові слова: квазіпохідна, квазідиференціальне рівняння, функція Діарка, власні значення, власна функція, фундаментальна матриця, коливання стрижня.

1. Постановка задачі. Широке коло задач математичної фізики (поперечні коливання струни, поздовжні та крутильні коливання стрижнів, задачі теплопровідності тощо) [1, 4, 10] зводяться до розв'язування узагальненого квазідиференціального рівняння

$$(gy')' + \lambda^2\left(h + \sum_{k=0}^{n} m_k\delta(x - x_k)\right)y = f + \sum_{k=0}^{n} s_k\delta(x - x_k),$$

де $x_0 = a < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$ – довільне розбиття інтервалу $[a,b]$ дійсної осі, $\delta(x - x_k)$ – функція Дірака з носієм в точці $x = x_k$, λ – параметр.

Функції g, h, f вважаємо кусково-неперервними, які мають наступні зображення:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)\Theta_k; \quad h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x)\Theta_k; \, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)\Theta_k, \tag{1}$$

де $\Theta_k = \begin{cases} 1, & x \in [x_k, x_{k+1}), \\ 0, & x \notin [x_k, x_{k+1}), \end{cases}$ – характеристична функція інтервалу $[x_k, x_{k+1})$.

Позначимо через $y^{[1]} \overset{df}{\equiv} gy'$ квазіпохідну [5, 10] рівняння (2). Тоді для цього рівняння можна поставити початкову задачу

$$(gy')' + \lambda^2\left(h + \sum_{k=0}^{n} m_k\delta(x - x_k)\right)y = f + \sum_{k=0}^{n} s_k\delta(x - x_k), \tag{2}$$

$$y(a) = y_0, \;\; y^{[1]}(a) = y_0^{[1]}. \tag{3}$$

2. Зведення до системи диференціальних рівнянь 1-го порядку. Для розв'язування задачі (2), (3) зведемо її до еквівалентної узагальненої системи диференціальних рівнянь 1-го порядку [5, 7-9]

$$\overline{Y}' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} G_k(x)\Theta_k + \sum_{k=0}^{n} M_k\delta(x - x_k)\right)\overline{Y} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{F}_k(x)\Theta_k + \sum_{k=0}^{n} \overline{S_k}\delta(x - x_k) \tag{4}$$

з початковою умовою
$$\overline{Y}(a) = \overline{Y}_0, \tag{5}$$

де $\overline{Y} = (y, y^{[1]})^T$, $\overline{Y}_0 = (y_0, y_0^{[1]})^T$, $\overline{F}_k = (0, -f_k(x))^T$, $\overline{S}_k = (0, -s_k)^T$ – двовимірні вектори, а $G_k(x) = \begin{pmatrix} 0 & g_k^{-1}(x) \\ -\lambda^2 h_k(x) & 0 \end{pmatrix}$, $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda^2 m_k & 0 \end{pmatrix}$ – квадратні матриці.

Зауважимо, що система (4) – коректна [5], оскільки виконуються рівності:

$$M_k^2 = 0, \quad M_k \overline{S}_k = \overline{0}. \tag{6}$$

У зв'язку з виконанням умов (6), вектор-функція $\overline{Y}$ справджує рівняння (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [1, 5]. Лінійна теорія задачі (4), (5) добре вивчена (див. наприклад [2, 5, 9]). Зокрема, з теореми існування та єдності випливає той факт, що стрибок розв'язку цієї системи в точці $x = x_k \in [a,b], \quad k = \overline{0,n}$, визначається співвідношенням

$$\Delta\overline{Y}(x_k) = M_k \cdot \overline{Y}(x_k - 0) + \overline{S}_k, \forall x_k \in [a,b] \tag{7}$$

де $\Delta\overline{Y}(x_k) = \overline{Y}(x_k + 0) - \overline{Y}(x_k - 0)$.

3. Розв'язання однорідної задачі. Розглянемо однорідну систему

$$\overline{Y}' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} G_k(x)\Theta_k + \sum_{k=0}^{n} M_k \delta(x - x_k) \right) \overline{Y}, \tag{8}$$

що відповідає системі (4) з тією ж початковою умовою (5). Відомо [2, 5, 6], що для системи (9) існує фундаментальна матриця Коші $B(x,s)$, яка володіє такими властивостями:

- $B(s,s) = E$;
- $B(x,s) = (E + M_k) B(x - 0, s), \forall x > s$, де E – одинична матриця;
- виконується співвідношення $B(x_3, x_2) \cdot B(x_2, x_1) = B(x_3, x_1), \forall x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ (властивість "гармонійності").

За допомогою фундаментальної матриці $B(x,s)$ розв'язок задачі (8), (5) подаємо у такому вигляді:

$$\overline{Y} = B(x,a) \cdot \overline{Y}_0. \tag{9}$$

Означення 1. Систему

$$\overline{Y}' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} G_k(x)\Theta_k \right) \overline{Y}, \tag{10}$$

що відповідає системі (8), називатимемо *визначальною.*

Фундаментальну матрицю визначальної системи на проміжку $[x_k, x_{k+1}), \quad k = \overline{0, n-1}$ (тобто системи $\overline{Y}_k' = G_k(x)\overline{Y}_k$) позначатимемо $\tilde{B}_k(x,s)$ і вважатимемо її відомою для $\forall k = \overline{0, n-1}$. Позначимо через $\tilde{M}_k = E + M_k$. Виявляється [2], що фундаментальна матриця системи (8) $B(x,a)$ обчислюється за формулою

$$B(x,a) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k(x,a)\Theta_k, \tag{11}$$

де матриці $B_k(x,a)$ визначають із рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned} &B_0(x,a) \overset{df}{=} \tilde{B}_0(x,a) \cdot \tilde{M}_0, \quad x \in [a, x_1), \\ &B_k(x,a) = \tilde{B}_k(x, x_k) \cdot \tilde{M}_k \cdot B_{k-1}(x_k - 0, a), \quad x \in [x_k, x_{k+1}), \quad k = \overline{1, n-1} \end{aligned} \tag{12}$$

Зокрема, для $x = b = x_n$ маємо

$$B_n(x_n, a) = \tilde{M}_n \cdot B_{n-1}(x_n - 0, a).$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що з рекурентних співвідношень (12) випливають два наслідки.

Наслідок 1. Для фундаментальної матриці системи (9) справедливе мультиплікативне зображення:

$$B(x,x_0)=\tilde{B}(x,x_k)\left(\prod_{i=0}^{k-1}\tilde{M}_k\tilde{B}_{k-i-1}(x_{k-i},x_{k-i-1})\right)\tilde{M}_0 \text{ для } \forall x\in[x_k,x_{k+1}). \tag{13}$$

Наслідок 2. Для двох довільних точок x_p, x_q розбиття відрізка $[a,b]$, таких що $x_p > x_q$, $x_q \neq x_0$ фундаментальну матрицю системи (8) можна обчислити за формулою:

$$B(x_p,x_q)=\prod_{i=0}^{p-q-1}\tilde{M}_{p-i}\tilde{B}_{p-i-1}(x_{p-i},x_{p-i-1}). \tag{14}$$

4. Розв'язання неоднорідної задачі. Повернемось до системи (4) з початковою умовою (5). Виявляється, що структура фундаментальної матриці відповідної однорідної системи, яка описана в попередньому пункті, дає змогу записати розв'язок задачі (4), (5) *в замкненій формі*. Таке твердження є частинним випадком результатів робіт **[**2, 9, 10**]**.

Теорема. Розв'язок задачі (4), (5) зображається у вигляді

$$\overline{Y}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\tilde{B}_k(x,x_k)\tilde{P}_k+\int_{x_k}^{x}\tilde{B}_k(x,s)\overline{F}_k(s)ds\right)\Theta_k, \tag{15}$$

де вектори $\overline{P}_k$ визначаються з рекурентних співвідношень:

$$\overline{P}_k=\tilde{M}_k\left(\tilde{B}_{k-1}(x_k,x_{k-1})\overline{P}_{k-1}+\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}\tilde{B}_{k-1}(x_k,s)\overline{F}_{k-1}(s)ds\right)+\overline{S}_k,\quad \overline{P}_0=\overline{C}_0\overline{Y}_0+\overline{S}_0. \tag{16}$$

Зауваження. Співвідношення (16) є неоднорідною лінійною дискретною системою із змінними коефіцієнтами. Вона може бути розв'язана методом варіацій довільних сталих **[**11**]**.

5. Приклад задачі про вимушені поздовжні коливання стрижня з вільними кінцями. На проміжку $[0;1]$ розглядаємо квазідиференціальне рівняння

$$\begin{gathered}(gy')'+\lambda^2\left(g+\frac{1}{6}\delta(x)+\frac{1}{3}\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}\delta(x-1)\right)y=x\Theta_0+\\ +5\Theta_1-\frac{3}{2}x^2\Theta_2+\sin x\Theta_3-\frac{1}{6}\delta(x)+\frac{1}{4}\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{5}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{6}\delta(x-1)\end{gathered} \tag{17}$$

при крайових умовах

$$y^{[1]}(0)=y^{[1]}. \tag{18}$$

Тут формули (1) реалізовані таким чином:

$$g(x)=4\Theta_0+2\Theta_1+4\Theta_2+2\Theta_3,$$

де $\Theta_0,\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3$ – характеристичні функції інтервалів $\left[0,\frac{1}{4}\right)$, $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $\left[\frac{3}{4},1\right)$ відповідно (ці функції описані в постановці задачі), а $\delta(x)$, $\delta\left(x-\frac{1}{4}\right)$, $\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $\delta\left(x-\frac{3}{4}\right)$, $\delta(x-1)$ – функції Дірака з носіями у відповідних точках. Графік функції $g(x)$ зображений на рис. 1.

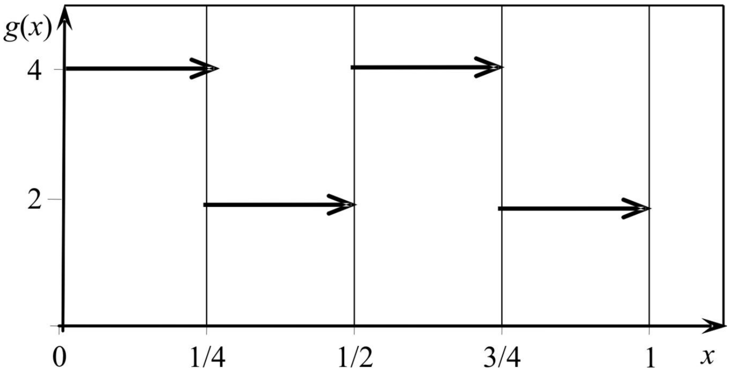

Рис. 1. Представлення функції функції Дірака

Відомо (див. на приклад [1, 3, 11]), що коли число λ не є власним значенням відповідної однорідної задачі (задачі на власні значення), то задача (17), (18) має єдиний розв'язок, що в даному випадку є першою координатою $\overline{y}(x)$ з формули (15).

6. Задача на власні значення. Як відомо (див. наприклад [1, 3]), вона формулюється наступним чином: знайти ті значення параметра λ, за яких за умов (18) існують нетривіальні розв'язки (власні функції) квазідиференціального рівняння

$$(gy')' + \lambda^2\left(g + \frac{1}{6}\delta(x) + \frac{1}{3}\delta\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}\delta(x-1)\right)y = 0. \quad (19)$$

У цьому випадку матриці $G_k(x)$ визначальної системи (10) мають вигляд:

$$G_k(x,\lambda) \equiv \begin{pmatrix} 0 & g_k^{-1} \\ -\lambda^2 g_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0,3}, \quad (20)$$

де (див. рис. 1) $g_0 = g_2 = 4, \quad g_1 = g_3 = 2$.

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що

$$\tilde{B}_k(x,s,\lambda) \equiv \begin{pmatrix} \cos\lambda(x-s) & \dfrac{\sin\lambda(x-s)}{g_k\lambda} \\ -\lambda g_k \sin\kappa(x-s) & cos\lambda(x-s) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0,3}. \quad (21)$$

Враховуючи, що

$$\tilde{M}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda^2 m_k & 1 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0,4}, \quad (22)$$

де $m_0 = \frac{1}{6}, m_1 = \frac{1}{3}, m_2 = \frac{1}{4}, m_3 = \frac{1}{2}, m_4 = \frac{1}{6}$. За формулами (12) будуємо матрицю $B_4 = (1,0,\lambda)$.

Вектор $\begin{pmatrix} y(1,\lambda) \\ y^{[1]}(1,\lambda) \end{pmatrix} \overset{def}{\equiv} B_4(1,0,\lambda) \cdot \tilde{M}_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ вже справджує крайову умову $y^{[1]}(0) = 0$. Тоді характеристичне (частотне) рівняння задачі (19), (18) має такий вигляд:

$$y^{[1]}(1,\lambda) = 0. \quad (23)$$

Перші 15 коренів (власних значень) рівняння (23) наведено в табл. 1.

λ_1=2.384529113769531	λ_6=15.667289733886719	λ_{11}=28.796195983886719
λ_2=5.033866882324219	λ_7=17.684150695800781	λ_{12}=29.789772033691406
λ_3=7.489067077636719	λ_8=18.904457092285156	λ_{13}=38.132942199707031
λ_4=8.905723571777344	λ_9=25.759376525878906	λ_{14}=39.178123474121094
λ_5=13.640220642089844	λ_{10}=27.176200866699219	λ_{15}=40.476905822753906

Кожному з цих власних значень (з точністю до сталого множника) відповідає власна функція (власна форма коливань). Так, наприклад, перша власна функція $y_1(x, \lambda_1)$ зображена на рис. 2.

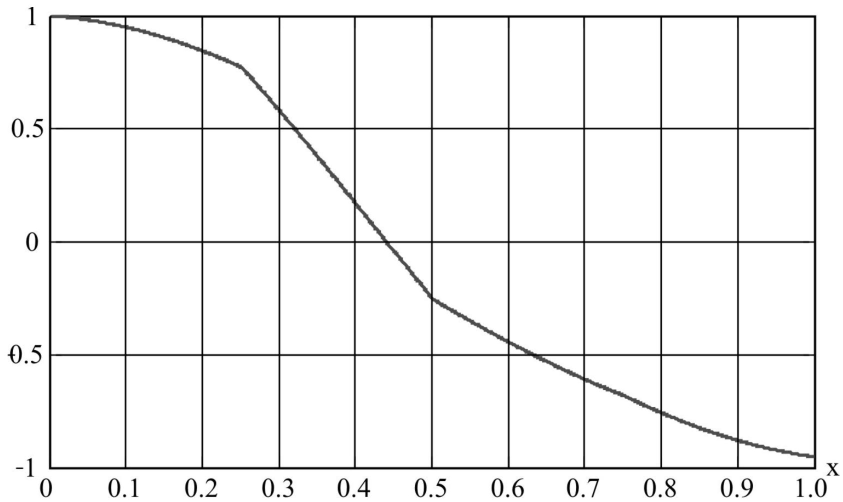

Рис. 2. Представлення власних значень (з точністю до сталого множника) у вигляді власної функції (власної форми коливань)

Розв'язування неоднорідної задачі. Конкретизуємо тепер значення параметра λ в рівнянні (17), вибравши, наприклад, $\lambda = 4$. З табл. 1 видно, що такий вибір гарантує єдиність розв'язку задачі (17), (18). За допомогою вектора $\overline{Y} = \left(y, y^{[1]}\right)^T$ зведемо рівняння (17) до системи вигляду (4) з коефіцієнтами:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{16}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{F}_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad \overline{F}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overline{F}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}x^2 \end{pmatrix}, \quad \overline{F}_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix},$$

$$\overline{S}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \overline{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \overline{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \overline{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \overline{S}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Для цієї системи крайові умови (18) запишемо у такому вигляді:

$$P\overline{Y}(0) + Q\overline{Y}(1) = 0, \tag{24}$$

де $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Така двоточкова задача стандартною процедурою **[9]** зводиться до задачі Коші (5) з початковим вектором

$$\overline{Y}_0 = \left[R - S \cdot B(1,0)\right]^{-1} \cdot S \cdot \int_0^1 B(1,s)\, d\overline{F}(s),$$

де: $B(1, s)$ – фундаментальна матриця відповідної однорідної системи; $d\overline{F}(s)$ – міра Стільтьєса правої частини цієї системи. Після обчислень отримуємо

$$\overline{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0,0554 \\ 0,0 \end{pmatrix}.$$

Використавши далі формулу (15), і, відчитавши першу координату вектора $\overline{Y}(x)$, отримуємо, що

$$y(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k(x)\Theta_k ,$$

де: $y_0(x) = 0.0554\cos 4x - 0.0196\sin 4x + 0.0156x - 0.0312\sin x\cos^3 x + 0.0156\sin x\cos x;$

$$y_1(x) = 0.0140\cos(4x-1) - 0.0890\sin(4x-1) + 0.0718 - 0.6753cos^4 x + 0.6754\cos^2 x -$$
$$-1.051\sin x\cos^3 x + 0.526\sin x\cos x;$$
$$y_2(x) = 0.00449\cos(4x-2) + 0.009669\sin(4x-2) - 0.00362 - 0.0234x^2 - 0.0524\cos^4 x +$$
$$+0.0524\cos^2 x + 0.00180\sin x\cos^3 x - 0.000902\sin x\cos x;$$
$$y_3(x) = 0.00681\cos(4x-3) + 0.0424\sin(4x-3) + 0.0333\sin x -$$
$$-0.0208\sin(4x-2.25) + 0.0125\sin(4x-3.75).$$

Висновки: У запропонованій роботі отримано загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (4) у замкненій формі. Метод розв'язання такої системи проілюстровано на прикладі вимушених поздовжніх коливань стрижня кусково-змінного перетину, який, крім розподіленої, витримує ще й зосереджені точкові маси за узагальненого зовнішнього навантаження.

Варто зауважити, що до систем типу (4) (для $M_k = 0$, $\forall k = 0, 1, ..., n$) зводяться стаціонарні та нестаціонарні задачі про поширення температури в багатошарових огороджувальних будівельних конструкціях у разі пожежі.

Список літератури:

1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи : пер. с англ. – М. : Изд-во "Мир", 1968. – 750 с.

2. *Кісілевич В.* Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференцальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами / В. Кісілевич, М. Стасюк, Р. Тацій // Вісник НУ "Львівська політехніка". Сер.: "Фізико-математичні науки". – 2004. – № 518. – С. 30-35.

3. *Колмогоров А.Н.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомін. – К. : Вид-во "Вища шк.", 1974. – 456 с.

4. *Кухта К.Я.* Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / К.Я. Кухта, В.П. Кравченко [и др.]. – К. : Вид-во "Наук. думка", 1981. – 335 с.

5. *Стасюк М.Ф.* Матричні та інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами / М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій // Вісник НУ "Львівська політехніка". Сер.: "Фізико-математичні науки". – 2006. – № 566. – С. 33-40.

6. *Таций Р.М.* О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения / Р.М. Таций, Б.Б. Пахолок // Доповіді АН УССР, С.А. – 1989. – № 4. – С. 25-28.

7. *Тацій Р.М.* Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її застосування / Р.М. Тацій, О.О. Власій // Доповіді НАН України. – 2007. – № 9. – С. 17-20.

8. *Тацій Р.М.* Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиферненціального рівняння 4-го порядку / Р.М. Тацій, О.О. Власій // Методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, №4. – С. 49-55.

9. *Тацій Р.М.* Структура розв'язків узагальнених систем з Кусково-змінними коефіцієнтами / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, О.О. Власій // Нелінійні проблеми аналізу : зб. матер. IV всеукраїнської наук. конф. – Івано-Франківськ, 2008. – С. 9.

10. *Тацій Р.М.* Частково-вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, О.О. Власій, М. Живічиньскі // Вісник НУ "Львівська політехніка". Сер.: "Фізико-математичні науки". – 2007. – № 601. – С. 18-27.

11. *Халанай А.* Качественная теория импульсных систем : пер. с рум. / А. Халанай, Д. Векслер. – М. : Изд-во "Мир", 1971. – 312 с.

Р.М. Таций, д-р физ.-мат. наук, профессор, М.Ф. Стасюк, канд. физ.-мат. наук, доцент (Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрена одна из моделей исследования реальных явлений – обобщенную линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений с кусочно-переменными коэффициентами. Метод решения такой системы проиллюстрирован на примере краевой задачи для квазидифференциального уравнения 2-го порядка. Результаты работы можно использовать для решения задач о распределении температуры во время пожаров в системах с дискретно непрерывными источниками тепла, колебаний стержней с насаженными дисками и аналогичных задач для пластинок и оболочек.

Ключевые слова: квазипроизводная, квазидифференциальное уравнение, функция Дирака, собственные значения, собственная функция, фундаментальная матрица, колебание стержня.

R.M. Taciy, Prof., M.F. Stasyuk, Assoc. prof. (Lviv State University of Vital Activity Safety)

MATHEMATICAL MODEL OF SOME CLASS OF DISCRETE AND CONTINUOUS PROBLEMS

One of models of research of the real phenomena is considered – the generalized linear heterogeneous system of differential equalizations with cobbed-variable coefficients. The method of decision of such system is illustrated on the example of regional task for quasidifferential equalization of 2th order. Job performances can be utillized for the decision of tasks about distributing of temperature during fires in the systems with the discretely continuous sources of heat, vibrations of bars with pressed-on disks and analogical tasks for plates and shells.

Keywords: quasiderivative, quasidifferential equalization, Diarc function, own values, own function, fundamental matrix, oscillation of a rod.