Вісник ЛДУБЖД

Bulletin of Lviv State University of Life Safety

ISSN 2078-4643
https://journal.ldubgd.edu.ua/index.php/Visnuk/
УДК 519.7
DOI: 10.32447/20784643.19.2019.02

Л.П. Гащук, П.М. Гащук
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ПРО НЕСПОДІВАНКИ В МАТЕМАТИЦІ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ ПРИЧИНИ АВАРІЙ/КАТАСТРОФ

Суть проблеми. У низці досліджень стверджується, що класична теорія динамічних систем ігнорує особливі випадки неповної еквівалентності перетворень математичних описів. Інколи навіть наполягають, що (всупереч поширеній парадигмі) дослідження суто характеристичного полінома системи керування (системи диференціальних рівнянь) не гарантує правильного судження про параметричну стійкість і запаси стійкості системи, а ймовірне хибне трактування стійкості може стати причиною аварій і навіть катастроф за участі дефектно спроектованого об'єкта. Такий висновок ніби безпосередньо випливає з факту існування прикладів систем, що мають один і той самий характеристичний поліном та докорінно відрізняються за параметричною стійкістю та запасами стійкості у разі варіацій параметрів. У цих дослідженнях висловлено також занепокоєння тим, що повсюдно використовувані пакети прикладних програм — а вони здебільшого потребують еквівалентного в класичному сенсі зведення описової системи диференціальних рівнянь до єдиної «стандартної» форми — не здатні без застосування додаткових контрольних підпрограм забезпечити достовірність розрахунків динамічних систем та гарантувати коректність аналізу їхніх властивостей. Приміром, в первісній системі ніби можуть існувати загрози втрати стійкості, але якщо її звести, як це часто роблять, до системи рівнянь першого порядку, то ці загрози стануть цілком непомітними, і так з'явиться джерело загрозливих несподіванок — аварій і катастроф у разі матеріального втілення систем. Відтак категорично задекларовано обов'язковість додаткових досліджень на коректність усіх результатів роботи інженерів і IT-спеціалістів, а також необхідність відповідних доповнень в начальних програмах підготовки фахівців (магістрів і аспірантів/ад'юнктів).

Мотивація дослідження. Тож природно визріла потреба достеменно з'ясувати, чи справді реально існують невловимі раніше загрози аварій/катастроф і чи справді класична теорія динамічних систем не знає про несподівану можливість втрати коректності своїх задач унаслідок (у процесі) еквівалентних їх трансформацій. У з'ясуванні суті й змісту такого штибу «відкриттів» власне й полягає мета цієї статті. В роботі ретельно досліджено прості приклади систем, що ніби мають підтвердити можливі загрози від еквівалентних в класичному сенсі перетворень математичних описів.

Основні результати дослідження. З'ясувалось, що після еквівалентних перетворень нестійкість, як і некоректність, насправді не «ховаються», вони не стають непомітними і невистежуваними. Радше дослідники самі свідомо не звертають уваги на можливості суттєвого деформування перетвореної системи. Справді, у разі зведення опису системи до вигляду нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку можливості втрати стійкості стають непомітними не тому, що перетворення були нееквівалентними, а тому, що не передбачається можливість варіювання порядку системи, а відтак ставлення до первісної (де можлива зміна порядку є очевидною) і вивідної систем є принципово різним. При цьому і рівняння регулятора — конкретизований перший інтеграл — є саме проявом ще одного можливого порядку системи, який нема сенсу ігнорувати. Отже насправді багато чого залежить від того, як укладаємо, бачимо, читаємо, тлумачимо аналітичний опис того чи іншого явища чи процесу.

Одному й тому самому характеристичному поліномові можуть відповідати різні характеристичні визначники, що ідентифікують, по суті, різні динамічні системи. Визначник можна свідомо еквівалентно перетворювати (деформувати), і кожен перетворений (деформований) визначник ідентифікуватиме нову систему. Тож будь-яке перетворення — це, без перебільшення, творення нового, чогось уже нетакого як було.

Процес розв'язування лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та їх варіювання з метою оцінювання стійкості розв'язків чи коректності аналітичного опису зводиться до розв'язування відповідної алгебричної задачі та дослідження її властивостей та особливостей. Тому енігматичних ефектів чи катастрофічних несподіванок годі чекати у разі професійного, педантично ретельного ведення дослідження.

Висновки. Особливості будь-якої системи глибше за характеристичний поліном відображає характеристичний визначник. Усякі еквівалентні перетворення системи обов'язково стають помітними в структурі визначника, навіть якщо вони й не позначатимуться на його коренях (нулях). Унаслідок еквівалентного перетворення обов'язково виникає новотвір — ніби та сама система, але з новими властивостями (а якби було інакше, то потреби в перетвореннях не було б жодної). За несподіванку зазвичай сприймають втрату робастності унаслідок вмотивованої деформації системи, яку, виявляється, легко прогнозувати. Неробастні системи, мабуть, мають свою перспективу. Широке їх застосування — ще попереду.

Ключові слова: динамічна система, еквівалентні перетворення, коректність аналітичного опису, стійкість системи, робастність системи, характеристичний визначник, характеристичний поліном.

Мотиви (спонуки). В науці надзвичайно конструктивним методом/засобом дослідження є так звана звідність — особлива взаємність між виразами, висловлюваннями, задачами, завданнями, алгоритмами, критеріями, теоріями тощо, яка означає (породжує) можливість редукції (власне зведення) одного до іншого за певним чином окреслених умов і правил. Розрізняють, приміром, зведення множин предикатів за розв'язністю, зведення функцій за обчислюваністю, зведення диференціальних рівнянь до інтегральних… Кожен різновид зведеності породжує своє відношення еквівалентності.

Приміром, у разі $\sqrt{-1}=i$ числа $\sqrt{i}$ та $\pm(1+i)/\sqrt{2}$ — синоніми, бо через еквівалентні перетворення перше з них зводиться до другого. Справді, очікуючи, що число $\sqrt{i}$ є комплексним — $\sqrt{i}=a+bi$ (a і b — дійсні числа), і визначаючи його квадрат $(\sqrt{i})^2=(a+bi)^2$, доходимо співвідношень:

$0+1\cdot i=(a^2-b^2)+2abi \Rightarrow (a^2-b^2=0, \quad 2ab=1)$, звідки $a=b=\pm 1/\sqrt{2}$. І очевидно, що $(\pm(1+i)/\sqrt{2})^2=i$.

Ще приклад… Хай a, b, n — цілі додатні числа, такі що $a>b$, $n>b$ і $a^n+b^n=c^n$. Fred Discepoli довів, що в такому разі c не може бути цілим числом — ледь не Велика чи Золота теорема Ферма. І справді…

Оскільки $a^n+b^n=c^n$, то $a<c$. До того ж, $(a+1)^n=a^n+na^{n-1}+\ldots$, $b<n$ і $b^{n-1}<a^{n-1}$. Відтак, підставляючи в другий член формули розкриття бінома замість множників n і a^{n-1} менші відповідно b і b^{n-1}, матимемо

$$c^n=a^n+b^n<(a+1)^n.$$

Звідси

$$a<c<a+1.$$

Отже c лежить між двома сусідніми цілими числами, а тому не може бути цілим. Цей приклад також ілюструє просування думки на засадах еквівалентних перетворень.

Нетривіальне і дуже корисне еквівалентне перетворення відбиває в собі, скажімо, формула інтегрування частинами

$$\int_a^b uv^{(n)}dx=[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\ldots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v]\Big|_a^b+(-1)^n\int_a^b u^{(n)}vdx.$$

Кожне з наведених співвідношень унаслідок цілком коректних перетворень ставало не таким як було раніше. Тим перетворене власне й ставало цікавішим. Та й узагалі, будь-яке (зокрема, й еквівалентне) перетворення хоч якого математичного опису веде до такого нового його представлення, яке хоч і випливає з первісного за жорсткими правилами (є коректно похідним від нього) і до нього ж зворотно знову-таки може бути зведене, та в жодному разі не є цілковито тотожним зі старим. Якщо б було інакше, то мотивувати перетворення стало б неможливо, перетворення як таке було б непотрібним — не існувало б якоїсь вигоди від перетворення системи, яку пізнають. «Нове» обов'язково чимось, хоча б структурою/будовою, відрізняється від «старого» а отже унаслідок якоїсь дії деформуватиметься, спотворюватиметься кожне геть по-іншому (з цього, власне, й слід користати).

Еквівалентні перетворення відіграють принципово важливу роль в теорії механічних систем, в математичних описах яких фігурують звичні звичайні (і не тільки) диференціальні рівняння, квазідиференціальні рівняння (рівняння з квазіпохідними), диференціальні рівняння з особливостями в коефіцієнтах, сингулярні диференціальні рівняння, інтегральні рівняння [1—5], що хоч як, але пов'язані відношеннями звідності. Коректно обумовлені диференціальне рівняння, система диференціальних рівнянь, інтегральне рівняння вважають цілком еквівалентними в дуже узагальнених моделях систем (див., приміром, [4]). І всюди, звісно, ретельно турбуються про дотримання (в найрізноманітніших сенсах) умов коректності у здійснюваних перетвореннях і зведеннях. Усякі нетривіальні наслідки еквівалентних перетворень є пізнавально бажаними, навіть свідомо шуканими і навряд чи можуть виявитися несподіваними в рутинному сенсі.

Натомість існує низка досліджень [6—8, …], у яких стверджується, що класична теорія динамічних систем ігнорує особливі випадки неповної еквівалентності перетворень математичних описів. В роботі [6], зокрема, саме й наполягають, що (всупереч поширеній парадигмі) дослідження єдино характеристичного полінома системи керування (системи диференціальних рівнянь) не гарантує правильного судження про параметричну стійкість і запаси стійкості системи, а ймовірне хибне сприйняття стійкості може стати причиною аварій і навіть катастроф з участю проектованого об'єкта. Такий висновок ніби випливає безпосередньо з існування прикладів систем, що мають один і той самий характеристичний поліном та разом з тим докорінно відрізняються за параметричною стійкістю та запасами стійкості у разі варіацій параметрів. Можна ніби віднайти системи, для яких існує функція Ляпунова, та які, незважаючи на це, схильні втрачати стійкість у разі як завгодно малих варіацій своїх параметрів. Проблема є тим вагомішою, чим складнішим є диференціальний опис динамічного об'єкта (а його порядок може сягати 20…30 і більше). Висловлено занепокоєння тим, що повсюдно використовувані пакети прикладних програм — а вони здебільшого потребують еквівалентного в класичному сенсі зведення описової системи диференціальних рівнянь до єдиної «стандартної» (зазвичай нормальної) форми — не здатні без введення в них додаткових контрольних підпрограм забезпечити достовірність розрахунків динамічних систем та гарантувати коректність аналізу їхніх властивостей. Приміром, в первісній системі можуть існувати загрози втрати стійкості, але якщо її звести, як це часто роблять, до системи рівнянь першого порядку, то ці загрози стануть цілком непомітними — так з'явиться джерело загрозливих несподіванок (аварій і катастроф у разі матеріального втілення систем). До того ж, нееквівалентності в розширеному сенсі ніби помічені навіть в лінійному програмуванні [9]. До слова, існують ще й праксеологічні нечітко сформульовані задачі, серед яких — задачі нечіткого лінійного програмування [10], де операції перетворення могли б провокувати нееквівалентність в зазначеному сенсі. Відтак категорично задекларовано обов'язковість додаткових досліджень на коректність усіх результатів роботи інженерів і спеціалістів IT-супроводу, а також необхідність відповідних доповнень в начальних програмах підготовки фахівців (магістрів і аспірантів/ад'юнктів).

Постановка проблеми (засновок). Мета дослідження. Тож як можна залишати поза увагою такі вагомі здобутки науки? Відтак природно визріла потреба з'ясувати, що ж то за такі невловимі раніше «відкриття» було зроблено в [6—8, …], і чи справді класична теорія динамічних систем не знає про несподівану можливість втрати коректності своїх задач унаслідок (у процесі) еквівалентних їх трансформацій. У з'ясуванні суті, змісту, вагомості, корисності, можливостей застосування цих відкриттів власне й полягає мета цієї статті. Вибудовуючи (в рамках нав'язаного в [6, …] нескладного математичного апарату) свої критичні судження/зауваження, покладатимемося здебільшого на приклади, що наведені саме в [6]. Зокрема, йтиметься про звичайні лінійні автономні системи.

Можна казати, що висунуте завдання є простим. Для доказу цього може стати в нагоді (мабуть утопічна) ідея Рене Декарта (R. Descartes, 1596—1650) дати універсальний метод розв'язування задач. Його найпростіша схема втілення цієї високої ідеї передбачає таке розуміння професійного підходу до хоч якої задачі: 1) хоч яка задача зводиться до математичної задачі; 2) хоч яка математична задача зводиться до алгебричної задачі; 3) хоч яка алгебрична задача зводиться до розв'язування одного-єдиного (алгебричного) рівняння. Саме під цю схему підпадає процес розв'язування звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Звісно, цілком простою можна вважати задачу, до якої простіше застосувати евристичний метод проб і помилок, аніж якийсь універсальний формалізований метод. Але такого штибу задачі краще відразу віднести до тривіальних. Цікаво, що за Декартом коректно сформульовані задачі відрізняються від некоректно сформульованих тим, що вони відразу зводяться до математичних, а от з тими іншими виникають клопоти.

Матеріал подано в найуживаніших і найпрозоріше утлумачених поняттях, означеннях, термінах. Стаття призначена радше для магістрів і аспірантів/ад'юнктів. Викладені міркування оцінюватимемо за рівнем простоти в розумінні Р. Декарта: якщо задача проста, то про які несподіванки може йтися?

Про еквівалентність (рівносильність) перетворень диференціальних систем. Еквівалентність (рівносильність) перетворень системи математичних співвідношень (рівнянь) зазвичай означують як таку, що не змінює множини розв'язків [11]. В цьому сенсі первісна й вивідна (похідна) системи будуть еквівалентними. Але, як часом стверджують (згадаймо [6]), еквівалентні перетворення хоча й не позначаються на розв'язках, скажімо, диференціальних рівнянь, та саме через них властивість зберігати стійкість у разі варіації параметрів нових рівнянь ніби може змінюватись (чи зникати, чи з'являтись). Отже такі перетворення слід трактувати як класичні, але водночас обов'язково необхідно шукати еквівалентність в розширеному сенсі.

Хоча, всім відомо, що, приміром, розв'язок первісної системи лінійних алгебричних рівнянь є також розв'язком вивідної системи, але вивідна система лінійних алгебричних (і не тільки) рівнянь може мати розв'язки, які не є розв'язками первісної системи. А тому зазвичай визнають [12]: в загальному випадку первісна і вивідна системи не еквівалентні. Тож зайвих розв'язків слід позбуватись, якщо вони нічим не цікаві. Але це загалом не створює жодних клопотів. І в певній мірі висловлене стосується також диференціальних рівнянь.

Підхід, коли описують об'єкт (систему) звичними звичайними диференціальними рівняннями, є загальним в математичному сенсі і може застосовуватись у всіх випадках. Та стосовно лінійних систем вдаються також і до операторного способу відображення. В такому разі досліджувану систему поділяють на частини — ланки напрямленої (від входу до виходу) дії. Сукупність таких ланок разом з лініями зв'язку між ними (лініями взаємодії між собою) відображають наочною структурною схемою [13]. І якщо функціональна схема характеризує систему за складом елементів з погляду їх призначення (їх функцій), то структурна схема покликана відобразити в математичних термінах потенційні динамічні властивості системи через характеристики ланок. Ланка характеризується передатною функцією (відношенням операторного зображення вихідної величини до операторного зображення вхідної), а загальна структура схеми — набором ланок в'язями між ними. Структурна схема — це, зрештою, наочна форма відображення диференціальних рівнянь. Структурні схеми також можна певним чином в рамках еквівалентності перетворювати. Але ці перетворення є корисними в тому разі, коли еквівалентність не перекреслює корисної новизни перетворення (еквівалентність — це не заперечення іншості).

На переконання авторів робіт [7, 8] ними (окрім двох всім відомих — коректних і некоректних — класів задач математики, фізики, техніки) виявлено існування особливого третього класу «задач-перевертнів», що здатні змінювати свою коректність унаслідок еквівалентних (у класичному сенсі) перетворень, що супроводжують процес їх розв'язування. Тож неочікувана зустріч із задачами третього класу може, як уважають, стати причиною помилок в розрахунках і породжених цими помилками аварій і катастроф. А для запобігання помилкам було запропоновано керуватись перетвореннями, еквівалентними в «розширеному» сенсі, які, по-перше, є еквівалентними в класичному сенсі, а по-друге, не змінюють коректності розв'язуваної задачі [6, 14—17].

Еквівалентними перетвореннями рівняння вважають, приміром, множення всіх його членів на число, що не дорівнює нулю, або перенесення членів з правої частини в ліву (і навпаки) зі зміною знаку (чи віднімання/додавання і праворуч, і ліворуч одного і того самого), додавання одного рівняння до іншого… Особливе місце посідають поняття зведеності і еквівалентності в теорії диференціальних рівнянь та в теорії динамічних систем, опис яких спирається, зокрема, на ці рівняння. Вважають зазвичай, що множення правої і лівої частини рівності на один і той самий операторний поліном $P[D]$ ($D = d(\cdot)/dt$ — диференціальний оператор) є в певному сенсі еквівалентним перетворенням цієї рівності. Але існує такий відомий приклад заперечного змісту [6].

Розв'язком рівняння

$$\dot{x} + x \equiv (D+1)x = 0 \qquad (1)$$

є функція

$$x = ce^{-t} \ (c = x(0))$$

з ознаками стійкості. А розв'язком рівняння

$$\ddot{x} - x = (D+1)(D-1)x = (D^2 - 1)x = 0\,, \qquad (2)$$

отриманого множенням попереднього (1) на оператор $P[D] = D - 1$, буде функція

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}\,. \qquad (3)$$

Початкові умові $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ задовольняє розв'язок $x(t) \equiv 0$ (оскільки в цьому випадку $c_1 = c_2 = 0$). Але цей розв'язок нестійкий в тому сенсі, що найменша зміна $x(0) = \varepsilon_1$ чи/та $\dot{x}(0) = \varepsilon_2$ початкових умов провокує його перебіг

$$x = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} e^{-t} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} e^{t}\,,$$

що необмежено зростає з часом, якими б малими за модулем не були ε_1 і $\varepsilon_2 \neq -\varepsilon_1$.

В [6] цей приклад покликаний проілюструвати можливість втрати системою стійкості, що не зумовлена варіаціями коефіцієнтів рівняння: в розв'язку (3) рівняння (2) з'являється експонентно зростаючий член з показником степеня, що не залежить від варіацій параметрів, а є коренем (так званого негурвіцевого) полінома $D-1$ від оператора D диференціювання, на якого було помножено первісне рівняння. Звісно, такого штибу причина можливої втрати стійкості всім відома. І тому доречно зробити висновок, що операції, пов'язані з диференціюванням рівностей, не завжди еквівалентні/рівносильні (не звертаючись до поняття гурвіцевості перетворень).

Було задекларовано також, що теорема про неперервну залежність розв'язків звичайних диференціальних рівнянь від параметра, яка доведена для одного рівняння *n*-го порядку та системи *n* диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі, загалом не може бути поширена, як це зазвичай робиться, на будь-які системи, що задовольняють умові Ліпшиця. Бо гейби існують системи, що насправді не мають неперервної залежності розв'язків від коефіцієнтів і параметрів [18]. Для математичних моделей, що містять такого штибу системи, результати розрахунку поблизу точок розриву неперервності завідомо недостовірні. Перевіряти коректність задач знаходження розв'язків системи диференціальних рівнянь слід а рамках первісних рівнянь, ще не зведених до нормальної форми. Цей факт трактують як «одне з найважливіших якщо не найважливіше кінця двадцятого століття» відкриття неповноти теореми про неперервну залежність розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь від параметрів.

Але насправді багато чого залежить від того, як укладаємо, бачимо, читаємо, тлумачимо аналітичний опис того чи іншого явища чи процесу.

Наслідуючи [6], звернімо увагу на ніби «дивну» параметрично обумовлену систему

$$\ddot{x}_1 = -\dot{x}_2 - x_2\,,\ \dot{x}_2 = -m\ddot{x}_1 + e^{-t}\,,$$

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = 0\ \ (m > 0). \qquad (4)$$

Позбуваючись змінної x_1, дійдемо рівняння

$$(1-m)\dot{x}_2 - mx_2 = e^{-t}\,, \qquad (5)$$

розв'язком якого за початкової умови $x_2(0) = 0$ є функція

$$x_2 = e^{\frac{m}{1-m}t} - e^{-t}\,. \qquad (6)$$

В околі значення параметра $m=1$ розв'язок (6) стійкий, якщо $m>1$, і нестійкий, якщо $m<1$; у разі $m=1$ справжній розв'язок навряд чи розпізнаваний: і у разі $m \to 1+0$, і у разі $m \to 1-0$ не збагнути, чи дотримуються початкові умови. Зате значення $m=1$ є сенс підставити в (5) і переконатися, що розв'язку немає: $x_2 = -e^{-t}$ і $x_2(0) = -1 \neq 0$. Про стійкість за змінною x_1 взагалі не йдеться:

$$x_1 = -\frac{1-m}{m^2}e^{\frac{m}{1-m}t} + \frac{1}{m}t + \frac{1-m}{m^2}\,.$$

Систему (4) за допомогою додаткової змінної $x_3 = \dot{x}_1$ ніби й можна звести до канонічної форми

$$\dot{x}_1 = x_3\,,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{m}{1-m}x_2 + \frac{1}{1-m}e^{-t} = (\mu - 1)x_2 + \mu e^{-t}\,, \qquad (7)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{1-m}x_2 - \frac{1}{1-m}e^{-t} = -\mu x_2 - \mu e^{-t}\,,$$

де позначено $\frac{1}{1-m} = \mu$. Від параметра μ (на відміну від параметра m) розв'язок системи (7) залежить неперервно (як і, до слова, функція (6), що є розв'язком рівняння (5), яке можна подати у формі $\dot{x}_2 - (\mu-1)x_2 = \mu e^{-t}$).

Але цей «особливо простий» приклад покликаний був в [6] посіяти сумніви щодо правомірності твердження про неперервну залежність розв'язків від параметрів. Та насправді в цьому сенсі він мало чого навчає: в теорії диференціальних рівнянь наперед окреслено, що коефіцієнт при похідній вищого порядку (як приміром, коефіцієнт $1-m$ в (5)) не дорівнює нулю (в іншому разі доведеться мати справу з рівнянням нижчого порядку — і тільки); якщо розв'язати рівняння відносно вищої похідної, то неперервність розв'язків вимагатиме неперервності за параметрами правих частин отриманих рівнянь (в (7), приміром, праві частини рівнянь неперервні за μ, але розривні за m). Деякі параметри насправді можуть найдивовижнішим чином визначатись через інші і по-особливому відображатися в розв'язках диференціальних рівнянь. Це, звісно, може бути предметом дослідження, але не підставою для пошуку проблем в класичній теорії диференціальних рівнянь.

Поняття характеристичного визначника/полінома. Розгортаючи думку про існування класу задач, що розташовується між класом коректних і класом некоректних, в [6] оперують рівняннями зі сталими коефіцієнтами. Розв'язки, приміром, однорідного диференціального рівняння порядку n

$$L[x] \equiv p_0\frac{d^n x}{dt^n} + p_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}\frac{dx}{dt} + p_n x = 0 \quad (8)$$

зі сталими коефіцієнтами $p_0 \neq 0$, p_1, …, p_n вибудовують на основі коренів k_1, k_2, …, k_n характеристичного полінома

$$P[k] \equiv p_0 k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1}k + p_n\,. \qquad (9)$$

Якщо всі ці корені є різними, то загальний розв'язок диференціального рівняння (8) можна виразити як суму експонент

$$x = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + \ldots + c_2 e^{k_n t}\,. \qquad (10)$$

Якщо якийсь корінь k_l має кратність m_l, то m_l членів суми (10), відповідних послідовно розташованим кратним кореням, необхідно буде замінити на вираз

$$(c_l + c_{l+1}t + c_{l+2}t^2 + \ldots + c_{l+(m_l-1)}t^{m_l-1})e^{k_l t}\,. \qquad (11)$$

Якщо у разі дійсних коефіцієнтів $p_0 \neq 0$, p_1, …, p_n зустрічаються комплексні корені характеристичного полінома, то тільки спряженими парами $k_{j,j+1} = \alpha + i\beta$, $i = \sqrt{-1}$. Тож в загальному розв'язку парі спряжених комплексних коренів відповідатиме член

$$x_{j,j+1} = e^{\alpha t}(c_j \sin\beta t + c_{j+1}\cos\beta t)\,. \qquad (12)$$

Відтак очевидно: у разі $t \to \infty$ загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння прямував би до нуля, якщо б усі k_j і усі α були від'ємними.

Рівняння (8) можна вважати окремим (виродженим) випадком системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь

$$P_{\nu 1}[D]x_1 + P_{\nu 2}[D]x_2 + \ldots + P_{\nu n}[D]x_n = 0\,, \nu = \overline{1,n}\,, \quad (13)$$

у якій $P_{jl}[D]$ — поліном від диференціального оператора $D = d(\cdot)/dt$. Справді, рівняння (8) можна подати у вигляді

$$L_n[D]x \equiv (p_0 D^n + p_1 D^{n-1} + ... + p_{n-1}D + p_n E)x = 0,$$

тут $E = D^0$ — оператор тотожності, який закликають не плутати зі сталою [19]. Кожна з n функцій $x_j = x_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, що разом складають розв'язок системи (13), має вигляд (10) (з можливими уточненнями (11) чи/та (12)), коли показники степеня k_j є коренями характеристичного визначника системи — визначника k-матриці

$$M[k] \equiv \begin{Vmatrix} P_{11}[k] & \dots & P_{1n}[k] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}[k] & \cdots & P_{nn}[k] \end{Vmatrix}. \qquad (14)$$

Підставляючи отримані вирази $x_j = x_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, штибу (10) (з можливими уточненнями (11) чи/та (12)) в систему (13), можна дійти низки потрібних співвідношень між сталими коефіцієнтами.

Водночас в загальному випадку кожне окреме диференціальне рівняння штибу (8) і загалом кожну систему диференціальних рівнянь різних порядків штибу (13) можна звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку (подати у нормальній формі)

$$\dot{x}_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \dots p_{1n}x_n,$$

$$\dot{x}_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \dots p_{2n}x_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{x}_n = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots p_{nn}x_n, \qquad (15)$$

яку зручно записувати також у матричному вигляді

$$\dot{x} = Ax,$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n-вимірний координатний вектор, а A — $n \times n$-матриця коефіцієнтів взаємозв'язку. Системі відповідає характеристичний поліном, що дорівнює визначнику матриці

$$kE - A,$$

де E — одинична матриця. Цей визначник підвладний стандартним комп'ютерним програмам, через що нормальна форма подання динамічної задача широко використовується. Зауважмо, систему (15) n диференціальних рівнянь першого порядку беззастережно називають системою n-го порядку, оскільки її потенційно можна замінити на одне рівняння n-го порядку штибу (8).

В описах

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (16)$$

керованих динамічних систем часто оперують скаляром (який власне й називають керуванням) u, формуючи зворотний зв'язок відповідно до закону (порівняймо з (13))

$$P_u[D]u = P_1[D]x_1 + P_2[D]x_2 + ... + P_n[D]x_n, \qquad (17)$$

де B — матриця-стовпець коефіцієнтів підсилення, $P_u[D]$ і $P_i[D]$, $i = \overline{1,n}$, — поліноми від диференціального оператора (часто зі сталими коефіцієнтами), формовані так, аби забезпечити бажані властивості системи. Окремі чи навіть всі ці поліноми, зрештою, можуть мати нульовий порядок/степінь. Рівняння закону керування можна називати просто регулятором, тож (17) — це регулятор. Разом (16) і (17) — це різновид системи (13). Коли координати x_1 x_2, …, x_n системи не підвладні вимірюванню, часто вводять похідний вектор спостережуваних/вимірюваних координат y_1, y_2, …, y_m, $m \le n$, такий що

$$y = Hx, \qquad (18)$$

де H — матриця коефіцієнтів розміром $m \times n$. Перетворення (18) динамічної системи не позбавляють її ознак лінійності. Принагідно зазначмо, що від матриці H залежить така властивість системи, як спостережуваність (вистежуваність, відстежуваність). А от властивість збереження стійкості розв'язків від матриці H не повинна б залежати, оскільки самі розв'язки від матриці H насправді не залежать. Натомість в [6] вважають, що насправді ситуація є «складнішою».

Системі-рівнянню (8), системі (13) (як і системі ((16), (17))) та системі (15) властива одна спільна риса: їхні розв'язки визначаються коренями так званих характеристичних поліномів. Дійсно, система-рівняння (8) обслуговується звичним характеристичним поліномом (9), система (13) — характеристичним визначником (див. (14))

$$P_S[k] \equiv \det M[k] = \begin{vmatrix} P_{11}[k] & \dots & P_{1n}[k] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}[k] & \cdots & P_{nn}[k] \end{vmatrix}, \qquad (19)$$

який, проте, зводиться до полінома (тут n — порядок системи диференціальних рівнянь, що не обов'язково збігається з кількістю змінних в системі (13) (чи в системі ((16), (17))), а система (8) — характеристичним визначником

$$P_S[k] \equiv \begin{vmatrix} p_{11} - k & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - k & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} - k \end{vmatrix}, \qquad (20)$$

який знову-таки зводиться до полінома (степеня n). Легко збагнути, що визначник (19) — це окремий випадок визначника (20), а поліном (9) — це визначник

$$P[k] \equiv \begin{vmatrix} -k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k & 1 \\ -\frac{p_n}{p_0} & -\frac{p_{n-1}}{p_0} & -\frac{p_{n-2}}{p_0} & \cdots & -\frac{p_3}{p_0} & -\frac{p_2}{p_0} & -\frac{p_1}{p_0}-k \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Визначник (21) є окремим випадком визначника (20), а відтак і визначника (19).

Отож одному й тому самому поліному можуть відповідати різні визначники, що ідентифікують різні динамічні системи. Визначник можна свідомо еквівалентно перетворювати, і новий визначник ідентифікуватиме нову систему. Будь-яке перетворення — це, без перебільшення, творення нового, чогось уже не цілком такого як було.

Відомо, приміром: якщо всі числа p_0, p_1, p_2, …, p_n відмінні від нуля, то за будь-якого k справджується тотожність

$$p_0 \begin{vmatrix} k+\frac{p_1}{p_0} & \frac{p_2}{p_1} & \frac{p_3}{p_2} & \cdots & \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} & \frac{p_n}{p_{n-1}} \\ -\frac{p_1}{p_0} & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p_2}{p_1} & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} & k \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv p_0k^n + p_1k^{n-1} + \ldots + p_{n-1}k + p_n .$$

Для доведення цього можна (керуючись міркуваннями неперервності) обмежитися випадком, коли поліном $p_0k^n + p_1k^{n-1} + \ldots + p_{n-1}k + p_n$ має n різних нулів. Тож беручи до уваги один з цих нулів, позначмо:

$$p_0k^{n-1} = z_0,\ p_1k^{n-2} = z_1,\ p_2k^{n-3} = z_2, \ldots,$$

$$p_{n-2}k = z_{n-2},\ p_{n-1}k^0 = z_{n-1} .$$

Числа z_0, z_1, z_2, …, z_{n-1} задовольняють однорідну систему

$$\left(k+\frac{p_1}{p_0}\right)z_0 + \frac{p_2}{p_1}z_1 + \frac{p_3}{p_2}z_2 + \ldots + \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}z_{n-2} + \frac{p_n}{p_{n-1}}z_{n-1} = 0,$$

$$-\frac{p_1}{p_0}z_0 + kz_1 = 0,\ -\frac{p_2}{p_1}z_1 + kz_2 = 0,$$

$$-\frac{p_3}{p_2}z_2 + kz_3 = 0, \ldots, -\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}z_{n-2} + kz_{n-1} = 0,$$

визначник якого, аби дотриматись умови $k \neq 0$, повинен дорівнювати нулю. І цей визначник є поліномом степеня n відносно k — таким, що має ті самі нулі, що й поліном $p_0k^n + p_1k^{n-1} + \ldots + p_{n-1}k + p_n$, а коефіцієнт при старшому степені дорівнює 1. Це ще один приклад еквівалентності.

Отож є підстава вважати, що перелічені системи в значній мірі (в звичному сенсі) є еквівалентними. Виглядає так, що відповідно до схеми Рене Декарта все зводиться до розв’язування алгебричного рівняння — пошуку коренів характеристичних полінома (9) чи одного з визначників (19)—(21). Було б добре, щоби й властивості цих систем (їх розв’язків), зокрема властивості стійкості/нестійкості, були однаково трактовані.

Ознаки стійкості і алгебричність задачі про стійкість. Проблема стійкості часто опосередковано присутня в багатьох задачах синтезу/аналізу систем. Вона у різних сенсах вбудована навіть в теорію аналітичного конструювання матеріальних систем, покликаних здійснювати рух з наперед заданими властивостями [20].

Хорошим інструментарієм оцінювання стійкості систем є апарат характеристичних чисел розв’язків цих систем. Характеристичним числом функції $f(t)$ називають величину

$$\chi\{f(t)\} = -\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(t)|}{t}.$$

Безпосереднє обчислення характеристичних чисел можливе лише у разі знаходження фундаментальної системи розв’язків. Але часом достатньо окреслити тільки межі значень цих чисел або визначити тільки їх знаки. Зокрема, у разі синтезу стійких систем потрібно лише керуватись умовою додатності характеристичних чисел.

Якщо в системі (15) коефіцієнти є змінними —

$$\dot{x}_i = p_{i1}(t)x_1 + p_{i2}(t)x_2 + \ldots + p_{in}(t)x_n,\ i = \overline{1,n} \quad (22)$$

($p_{ij}(t)$ — обмежені неперервні), то характеристичні числа її розв’язків задовольняють умову

$$\chi\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds\right\} \geq \chi\{x\} \geq \chi\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right\},$$

де $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ — найменший і найбільший за всіх $t \geq t_0$ корені рівняння

$$\det\left\|\frac{p_{ij}+p_{ji}}{2} - \delta_{ij}k\right\|_n^n = 0.$$

Тож очевидно, що для додатності характеристичних чисел розв'язків системи (15) зі змінними коефіцієнтами достатньо, щоби була чинною нерівність

$$\chi\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right\}>0\,.$$

При цьому сума характеристичних чисел розв'язків системи рівнянь (22) залежить від того, як сформована матриця фундаментальних розв'язків, але обов'язково задовольняє нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}\chi_i\le\mu=\chi\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}p_{ii}(s)ds\right\}. \qquad (23)$$

Систему (22) називають правильною, якщо для неї $\sum_{i=1}^{n}\chi_i=\mu$ (див. (23)). Саме правильною є, зокрема, система (15).

Загалом само по собі означення не вказує способу визначення характеристичних чисел розв'язків системи диференціальних рівнянь. Але в окремих випадках, коли коефіцієнти підпадають під деякі додаткові умови, можна отримати конкретніші оцінки або навіть точні значення характеристичних чисел. Приміром, якщо в системі (22) коефіцієнти $p_{ij}(t)$ у разі $t\to\infty$ прямують до відповідних граничних значень p_{ij}, то характеристичні числа цієї системи збігаються з характеристичними числами розв'язків такої граничної системи (системи зі сталими коефіцієнтами — граничними значеннями реальних змінних коефіцієнтів). А от характеристичні числа розв'язків системи (15) рівнянь зі сталими коефіцієнтами дорівнюють, виявляється, взятим з протилежним знаком дійсним частинам коренів відповідного характеристичного рівняння

$$P[k]\equiv(-1)^n\det\left\|p_{ij}-\delta_{ij}k\right\|_n^n=0$$

(δ_{sj} — символ Кронекера). Інтерес до такого штибу характеристичних параметрів виникає, коли є прогноз щодо імовірного дрейфу параметрів навіть систем з номінально сталими параметрами.

Щодо стійкості, приміром, лінійної автономної системи (15) керуються такими загальними твердженнями.

1. Якщо дійсні частини усіх коренів характеристичного рівняння (полінома, визначника) є від'ємними, то незбурений усталений рух $x=0$ системи є асимптотично стійким.

2. Якщо ж бодай один корінь характеристичного рівняння має від'ємну дійсну частину, то незбурений рух системи нестійкий.

3. Якщо деякі корені характеристичного рівняння мають нульові дійсні частини, а дійсні частини інших коренів — від'ємні, то незбурений рух системи буде а) стійким (неасиптотично, звісно), якщо кореням з нульовою дійсною частиною відповідають прості (без ознак кратності) так звані елементарні дільники характеристичного визначника, і б) нестійким, якщо хоча б один корінь з нульовою дійсною частиною є кратним коренем відповідного елементарного дільника.

Тож для визнання стійкості достатньо пересвідчитися, що корені характеристичного рівняння розташовувались ліворуч від уявної осі на площині коренів $\{\mathrm{Re}\,k\,,\ \mathrm{Im}\,k\}$.

Ці твердження безпосередньо оперують коренями характеристичного визначника (полінома). Знову відповідно до схеми Рене Декарта йдеться про розв'язування алгебричного рівняння і, відтак, оцінювання отримуваних розв'язків. Але було б доречно розпізнавати стійкість/нестійкість, безпосередньо оцінюючи самі коефіцієнти визначника (полінома) — основного елемента знову ж таки алгебричної задачі.

Поліном (9), якщо він гарантує стійкість системи, називають поліномом Гурвіця. Чинною є, приміром, така дуже проста необхідна (але не достатня) умова/ознака: поліном (9) будь-якого степеня n може виявитися гурвіцевим тільки тоді, коли його коефіцієнти $p_i\,/\,p_0$ $(i=\overline{1,n})$ всі додатні (немає жодного від'ємного чи нульового; вважатимемо, що в (8) і (9) $p_0>0$). Ця умова випливає, як можна переконатись, навіть безпосередньо з теореми В'єта, що співвідносить коефіцієнти й корені характеристичного полінома. Інколи корисними стають достатні (але не необхідні) умови/ознаки. Приміром, можна з'ясувати, що у разі всіх дійсних (!) коренів справджуватимуться умови [21]

$$\frac{1}{p_0^2}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ 2p_2 & p_1 \end{vmatrix}\ge n\sqrt[n]{\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^2}\,,$$

$$\frac{1}{p_0^4}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 3p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ 4p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix}\ge n\sqrt[n]{\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^4}\,,$$

$$\frac{1}{p_0^{2\nu}}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 & & & & & \\ 2p_2 & p_1 & p_0 & & & 0 & \\ 3p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ (2\nu-1)p_{2\nu-1} & p_{2\nu-2} & p_{2\nu-3} & p_{2\nu-4} & \cdots & p_1 & p_0 \\ 2\nu p_{2\nu} & p_{2\nu-1} & p_{2\nu-2} & p_{2\nu-3} & \cdots & p_2 & p_1 \end{vmatrix}\ge n\sqrt[n]{\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^{2\nu}}$$

$(\nu=3,4,\ldots;\ 2\nu\le n)$,

$$\frac{1}{p_0^{2\nu}}\begin{vmatrix} p_1 & p_0 & & & & & & \\ 2p_2 & p_1 & p_0 & & & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ np_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 & & & \\ & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 \\ & & & & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}_{2\nu} \ge n\sqrt[n]{\left(\frac{p_n}{p_0}\right)^{2\nu}}$$

$$(2\nu > n), \qquad (24)$$

а отже якщо втратить чинність хоча б одна з них, то це достатньо (але не необхідно) означатиме наявність недійсних коренів — у цьому випадку не доведеться говорити про аперіодичну стійкість.

Достатні умови стійкості (зокрема, (24)) привабливі тим, що формально ніби окреслюють якийсь гарантований (але безпосереднього не обліковуваний) запас стійкості. Бажано, аби цей запас не був надто великим і не ставав на заваді у справі оптимізації інших властивостей системи. Поліномові (9) доречно ставити у відповідність систему визначників

$$\Delta_1 = p_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \cdots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ p_{2n-2} & p_{2n-3} & p_{2n-4} & p_{2n-5} & \cdots & 0 \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & p_{2n-4} & \cdots & p_n \end{vmatrix} \equiv p_n\Delta_{n-1}. \quad (25)$$

Кожен визначник Δ_i отримано з визначника $\Delta_{i+1<n}$ викреслюванням з нього останніх рядка й стовпця. А визначник Δ_n вибудовують так: вздовж головної діагоналі розташовують послідовно коефіцієнти p_1, p_2, p_3,…, p_n; вправоруч від них записують коефіцієнти p_j з послідовно меншими на одиницю індексами j ($p_{j<0} = 0$), а вліворуч — коефіцієнти p_j з послідовно більшими на одиницю індексами. Відтак з'являється можливість записати необхідні й достатні умови від'ємності дійсних частин коренів полінома (9) у разі $p_0 > 0$ в алгебричній формі Гурвіця (теорема Гурвіця):

$$p_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_{n-1} > 0,\ p_n > 0. \ (26)$$

Лінійну динамічну систему вважають/називають аперіодично стійкою, якщо її характеристичний поліном (9) з дійсними коефіцієнтами $p_0 \neq 0$, p_1, …, p_n має тільки дійсні від'ємні корені. При цьому, звісно, коефіцієнти $p_0 \neq 0$, p_1, …, p_n мають однаковий знак (зазвичай вважають їх додатними).

Відомо також, що всі корені дійсного полінома (9) мають від'ємні дійсні частини тоді й тільки тоді, коли те саме справджується для полінома нижчого на один степеня

$$P'[k] \equiv p_0'k^{n-1} + p_1'k^{n-2} + p_2'k^{n-3} + p_3'k^{n-4} + \ldots \equiv$$

$$\equiv p_1k^{n-1} + \left(p_2 - \frac{p_0}{p_1}p_3\right)k^{n-2} + $$
$$+ p_3k^{n-3} + \left(p_4 - \frac{p_0}{p_1}p_5\right)k^{n-4} + \ldots \qquad (27)$$

Ознаку (27) можна використати повторно/рекурентно. Але якщо один з коефіцієнтів штибу p_1' на якомусь кроці виявиться нулем, доведеться долати труднощі.

З теореми Гурвіця і так званої теореми про стійкість за першим наближенням можна виснувати: якщо у разі $p_0 > 0$ всі визначники (головні мінори матриці) Гурвіця (25) додатні (див. (26)), то незбурений рух динамічної системи асимптотично стійкий, незалежно від наявності членів вищої за перший порядок мализни. Якщо б хоча б одна нерівність (26) змінила смисл на цілком протилежний, то це означало б, що з'явилися такі корені характеристичного рівняння (9), дійсні частини яких додатні — ознака нестійкості системи. На нелінійні члени диференціальних рівнянь слід зважати в критичних випадках, коли дійсні частини деяких коренів (чи взагалі деякі корені) дорівнюють нулю, хоча дійсні частини всіх інших коренів є від'ємними.

Часом намагаються оцінити наслідки впливу на стійкість динамічної системи не тільки дуже (зникаюче) малих, але й помітних (скінченних) варіацій її параметрів, слушно вважаючи, що коефіцієнти характеристичного полінома (9) відомі, задані, визначувані не абсолютно точно, а лише з певною скінченною похибкою:

$$p_{i\mathrm{N}} - \varepsilon_i^- \le p_i \le p_{i\mathrm{N}} + \varepsilon_i^+, \qquad (28)$$

де $p_{i\mathrm{N}}$ — значення коефіцієнта p_i, яке можна вважати номінальним; ε_i^- і ε_i^+ — нижня і верхня межі відхилення (можливо, що $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+ = \varepsilon_i$).

Не завжди в однаковій мірі важлива стійкість системи за всіма координатами. За наочний приклад можна взяти рух вісно симетричного снаряда, описуваного шістьма координатами: три лінійні координати визначають переміщення цента мас снаряда, а три кутові описують його повороти.

Якщо одна з координат описує поворот снаряда навколо осі симетрії, то змінюваність саме цієї координати цілком по-особливому позначається на точності попадання снаряда в ціль: нестійкість за цією координатою може виявитися корисною, тоді як за іншими — шкідливою. В такому разі корисною можна було б вважати, так би мовити, стійкість нестійкості за однією з координат (згадаймо також приклад (4)).

Стійкість розв'язків системи диференціальних рівнянь може не залежати від початкових умов, що властиво, скажімо, лінійним системам. А отже в такому разі доречно говорити про стійкість не розв'язків як таких, а про стійкість системи загалом: стійкою є система, розв'язки якої хоч за яких початковим умов є стійкими. Відомо також, що для стійких лінійних систем завжди існує функція Ляпунова у вигляді квадратичної форми. Отож лінійні задачі такого штибу, можна казати, є простими.

Отож відповідно до схеми Рене Декарта йдеться про аналіз алгебричних співвідношень. Відтак навряд чи є сенс заперечувати простоту проблеми оцінювання стійкості динамічної системи.

«Нецілковита еквівалентність» еквівалентних перетворень. До операції диференціювання треба ставитись критично. Очевидно, що диференціюючи (8), отримаємо нове диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dx}L[x] \equiv p_0\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} + p_1\frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + p_{n-1}\frac{d^2x}{dt^2} + p_n\frac{dx}{dt} = 0,$$

якому відповідає характеристичний поліном

$$P'[k] \equiv p_0k^{n+1} + p_1k^n + \ldots + p_{n-1}k^2 + p_nk$$

без вільного члена (!). Оскільки $p_{n+1} = 0$, то критерій (26) (його остання умова) не задовольняється (з'являється корінь $k = 0$, який ніби «заперечує» властивість стійкості). Тож операція диференціювання тотожності привнесла з собою в результат таку особливість, що не дозволяє беззастережно вважати цю операцію абсолютно еквівалентним перетворенням. Кількість операцій диференціювання має бути якось вмотивованою. Звісно, почленне диференціювання використовують усі, до цієї дії вдавався, приміром, Л. Ойлєр (L. Euler, 1707—1783). Але це нікому ніколи не створювало незбагненних ситуацій.

А з іншого боку, відомо, що за допомогою $(n-1)$-кратного диференціювання будь-якого з рівнянь (15) (з одночасним маніпулюванням усіма рівняннями разом) систему (15) порядку n (!) можна звести до одного рівняння штибу (8) порядку не вищого за n (!). Варіаціями ж параметрів порядок рівняння можна буде збільшувати і навіть довести до n. При цьому й інші коефіцієнти нового рівняння можуть зникати/з'являтися унаслідок варіацій/деформацій. Невже це слід вважати несподіваним і наслідком еквівалентних перетворень системи, що сприяє якимсь непорозумінням?

Хай, оперуючи почергово змінними x_i ($i = \overline{1,n}$), побудовано n рівнянь штибу (8) порядків $m_i \le n$ ($i = \overline{1,n}$). Розв'язуючи ці нові рівняння, можна буде отримати вектор-функції $x = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\}$, де

$$x_i = \tilde{x}_i(t) = c_{i1}x_{i1}(t) + c_{i2}x_{i2}(t) + \ldots + c_{im_i}x_{im_i}(t), \quad (29)$$

$x_{i1}(t),, x_{i2}(t), \ldots, x_{im_i}(t)$ — фундаментальна система розв'язків відповідного рівняння штибу (8), $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im_i}$ — довільні сталі. Але щоби з множини отриманих вектор-функцій вирізнити загальний розв'язок $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ власне системи (15), доведеться вектор-функцію $x = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\}$ саме цією системою і випробувати. Тож підставляючи $x = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\}$ в (15) і вимагаючи, аби отримані співвідношення були тотожностями за незалежною змінною t (у разі змінних коефіцієнтів і в наперед заданому інтервалі її зміни), дістанемо систему лінійних алгебричних рівнянь на сталі c_{i1}, c_{i2}, …, c_{im_i} ($i = \overline{1,n}$). Відтак, підставляючи розв'язок системи алгебричних рівнянь в (29), отримаємо нарешті справжній розв'язок системи (15). Випробування розв'язків вивідної системи на первісній — звична практика, якої не уникнути.

Хай ідеться про систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_3, \quad \dot{x}_2 = x_3 + x_1, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_2,$$

якій відповідає характеристичний поліном

$$-\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = k^3 - 2 - 3k$$

Диференціюючи лише один раз перше рівняння і беручи до уваги два інші, можна дійти до співвідношення

$$\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 - 2x_1 = 0,$$

якому відповідає характеристичний поліном нижчого порядку

$$k^2 - k - 2.$$

Такий самий поліном відповідає й змінним x_2, x_3.

Звернімося до системи трьох рівнянь

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_2$$

з характеристичним поліномом

$$-\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = (k+1)(k^2-2k-1) =$$

$$= (k+1)\left((k-1)^2-2\right) = k^3-k^2-3k-1.$$

Вона легко зводиться до рівняння

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - x_1 = 0$$

з характеристичним поліномом

$$k^2 - 2k - 1.$$

Диференціюючи друге рівняння двічі з урахуванням двох інших і долучаючи до нього отримані результати, дійдемо системи

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_3, \quad \ddot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2 + x_3, \quad \dddot{x}_2 = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3.$$

Позбуваючись спочатку змінної x_1, а потім і змінної x_3, матимемо рівняння

$$\dddot{x}_2 - \ddot{x}_2 - 3\dot{x}_2 - x_2 = 0$$

з уже відомим характеристичним поліномом

$$k^3 - k^2 - 3k - 1.$$

Подібно можна отримати рівняння

$$\dddot{x}_3 - \ddot{x}_3 - 3\dot{x}_3 - x_3 = 0,$$

і знову ж з тим самим характеристичним поліномом.

В [6] розігрують таку ситуацію. Розглядають систему

$$\dot{x}_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + \alpha_1 u,$$
$$\dot{x}_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3 + \alpha_2 u,$$
$$\dot{x}_3 = p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 + \alpha_3 u, \qquad (30)$$

закон керування якою (рівняння регулятора) мав би (мало б) мати вигляд

$$u = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3. \qquad (31)$$

Тут p_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 — сталі. Але далі відмовляються безпосередньо контролювати змінні x_2 і x_3, віддаючи перевагу стеженню за змінною x_1 та її похідними. Тим самим зімітовано можливі технічні обмеження щодо можливостей формування регулювальних впливів, керувальних дій.

Тож, позбуваючись змінних x_2 і x_3, систему ((30), (31)) зводять до вигляду

$$(m_1 D^3 + m_2 D^2 + m_3 D + m_4)x_1 = (m_5 D^2 + m_6 D + m_7)u, \qquad (32)$$

$$(m_8 D + m_9)u = (m_{10} D^2 + m_{11} D + m_{12})x_1. \qquad (33)$$

Характеристичний поліном цієї системи в загальному випадку мав би бути четвертого степеня:

$$P[k] = n_4 k^4 + n_3 k^3 + n_2 k^2 + n_1 k + n_0. \qquad (34)$$

Але це суперечило б тому фактові, що ((30), (31)) є системою третього (а не четвертого) порядку. Тому не дивно, що насправді

$$n_4 = m_1 m_8 - m_5 m_{10} = 0. \qquad (35)$$

Та в системі ((32), (33)) загалом існує можливість порушити умову (35) (довільно варіюючи, приміром, коефіцієнт m_5) і відродити тим самим четвертий її степінь, надавши чинності поліному (34).

Відтак автори дослідження [6] роблять висновок: перетворення системи ((30), (31)) на систему ((32), (33)) були еквівалентними суто в класичному сенсі, а існує ще й розширений сенс; нова система ((32), (33)) в «розширеному» сенсі загалом не еквівалентна системі ((30), (31)), з якої виникла унаслідок класично еквівалентних перетворень; розв'язки (траєкторії) цих систем збігаються, а от їхні околи можуть бути різними.

Та насправді якщо вже занурювати ((32), (33)) у множину систем четвертого порядку, то й ((30), (31)) було б справедливо занурити, приміром, у множину подібних їй систем, але вищого на один порядку

$$\dot{x}_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + \varepsilon_{14}x_4 + \alpha_1 u,$$
$$\dot{x}_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3 + \varepsilon_{24}x_4 + \alpha_2 u,$$
$$\dot{x}_3 = p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 + \varepsilon_{34}x_4 + \alpha_3 u,$$
$$\varepsilon_4 \dot{x}_4 = p_{41}x_1 + p_{42}x_2 + p_{43}x_3 + p_{44}x_4 + \alpha_4 u, \qquad (36)$$
$$u = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon_u x_4, \qquad (37)$$

де p_{41}, p_{42}, p_{43}, p_{44} — нові (можливо, зневажені раніше) параметри системи; ε_{14}, ε_{24}, ε_{34}, ε_4, ε_{42}, ε_u — можливі параметричні варіації системи ((30), (31)), що по-всякому зводять її до системи ((32), (33)). Тож системі ((32), (33)) в загальному випадку є сенс ставити у відповідність систему ((36), (37)), а не ((30), (31)). Інакше кажучи, нема сенсу завдавати системі ((32), (33)) деформацій, які неможливі стосовно первісної ((30), (31)), якщо не зникла потреба зберігати особливий родовід. А якщо ж ігнорувати родовід, то можна визнати існування нових можливостей у побудові системи.

Вираз (37) — це ніби натяк на порядок, вищий на один. Цей натяк зникає, якщо в системі ((36), (37)) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (тож (37) втрачає сенс). І при цьому все-дно можна буде говорити, що саме між ((32), (33)) і (36) у разі $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ є сенс шукати еквівалентність в ширшому прояві. Взагалі кажучи, як (31) в системі ((30), (31)), так (37) в системі ((36), (37)) — це окремі (часткові серед перших) інтеграли в системах відповідно четвертого і п'ятого порядків.

Такого штибу особливі приклади систем, отриманих через еквівалентні перетворення, доречно було б вивчати в рамках теорії сингулярно-збурених диференціальних рівнянь (сингулярними вважають зміни в коефіцієнтах рівняння (чи системи рівнянь), що призводять до зміни його (чи її) порядку). До сингулярно-збурених слід відносити, приміром, рівняння з малими параметрами при старших похідних. Однією з таких є, скажімо, система

$$\frac{dy}{dt} = F_y(y,z)\,,\ \varepsilon_z \frac{dz}{dt} = F_z(y,z)\,,$$

у якій фігурують вектори змінних y і z разом з вектором ε_z малих параметрів. В теорії сингулярно-збурених диференціальних рівнянь порівнюють розв'язки у разі, коли всі чи окремі $\varepsilon_z \neq 0$ і у разі, коли всі чи окремі $\varepsilon_z = 0$ та система втрачає порядок.

Простий приклад «нецілковитої еквівалентності» еквівалентних перетворень. Ось один з ключових прикладів, навколо якого розгортається в [6] виклад міркувань, трактованих як відкриття (!).

Хай система диференціальних рівнянь ((32), (33)) має вигляд

$$(D^3+4D^2+5D+2)x_1 = (D^2+2D+1)x_2\,, \quad (38)$$

$$(D+1)x_2 = (D^2+4D+5)x_1\,. \quad (39)$$

Оперувати нею можна по-різному. Зокрема, роблячи акцент на диференціальному аспекті, записати цю систему можна у традиційному вигляді

$$\dddot{x}_1 + 4\ddot{x}_1 + 5\dot{x}_1 + 2x_1 = \ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 + x_2\,,$$

$$\dot{x}_2 + x_2 = \ddot{x}_1 + 4\dot{x}_1 + 5x_1\,,$$

а далі звести (за допомогою, зокрема, результату операції диференціювання другого рівняння) її до вигляду

$$\ddot{x}_1 + 4\dot{x}_1 + 3x_1 = 0\,, \quad (40)$$

$$\dot{x}_2 + x_2 = 2x_1\,. \quad (41)$$

Першому однорідному рівнянню відповідають характеристичний тричлен

$$P[k] \equiv k^2 + 4k + 3 = (k+3)(k+1)$$

з коренями $k_1 = -3$, $k_2 = -1$ та загальний розв'язок

$$x_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} \quad (42)$$

(c_1, c_2 — довільні сталі). Друге рівняння у разі відомого x_1 (див. (42)) слід трактувати як неоднорідне диференціальне рівняння відносно x_2:

$$\dot{x}_2 + x_2 = 2c_1 e^{-3t} + 2c_2 e^{-t}\,.$$

Його розв'язком є функція

$$x_2 = -c_1 e^{-3t} + (2c_2 t + c_3)e^{-t}\,. \quad (43)$$

Якщо ж акцентувати увагу, так би мовити, на алгебричному аспекті опису, то рівняння (38), (39) доречно записати як систему (13):

$$(D^3+4D^2+5D+2)x_1 = (D+1)^2 x_2\,, \quad (44)$$

$$(D+1)x_2 = (D^2+4D+5)x_1\,. \quad (45)$$

Відтак (44) за допомогою (45) можна записати у вигляді

$$(D^3+4D^2+5D+2)x_1 =$$
$$= (D+1)(D^2+4D+5)x_1 =\,,$$
$$= (D^3+5D^2+9D+5)x_1$$

звідки матимемо

$$(D^2+4D+3)x_1 = 0 \quad (46)$$

і розв'язок (42).

Звісно, систему ((38), (39)) можна розглядати й у формі (13):

$$P_{11}[D]x_1 = P_{12}[D]x_2\,,\quad P_{21}[D]x_1 = P_{22}[D]x_2\,, \quad (47)$$

де $P_{11}[D]$ $P_{12}[D]$, $P_{21}[D]$, $P_{22}[D]$ — відповідні поліноми від диференціального оператора $D = d(\cdot)/dt$. Характеристичний визначник (19) має вигляд

$$P[k] = \pm \begin{vmatrix} P_{11}[k] & P_{12}[k] \\ P_{21}[k] & P_{22}[k] \end{vmatrix}$$

(знак визначника не позначається на його коренях). Отож системі ((38), (39)) відповідає характеристичний поліном

$$P[k] \equiv -((k^3+4k^2+5k+2)(k+1) - \\ -(k^2+2k+1)(k^2+4k+5)) = (k+3)(k+1)^2\,, \quad (48)$$

коренями якого є числа $k_1 = -3$, $k_2 = k_3 = -1$. Тож загальний розв'язок відповідного рівняння (визнаного чинним в [6])

$$(D^3+5D^2+7D+3)x_1 = 0\,, \quad (49)$$

мала б відображати функція (порівняймо з (43))

$$x_1 = c_1 e^{-3t} + (c_2 + c_3 t)e^{-t}\,. \quad (50)$$

Хай рівняння (38) набуває (зазнає) малого дефекту ε:

$$(D^3+4D^2+5D+2)x_1 = ((1+\varepsilon)D^2+2D+1)x_2\,. \quad (51)$$

Із (51) за допомогою (39) можна виснувати співвідношення

$$\varepsilon\dddot{x}_1 + (1+3\varepsilon)\ddot{x}_1 + (4+\varepsilon)\dot{x}_1 + (3-5\varepsilon)x_1 + \varepsilon x_2 = 0\,. \quad (52)$$

Очевидно, що уразі $\varepsilon \to 0$ визріває знана вже рівність (40). Але ж якщо $\varepsilon \neq 0$, то на підставі (52) і (39) можна дійти співвідношення

$$\ddddot{x}_1 + \frac{1+4\varepsilon}{\varepsilon}\dddot{x}_1 + \frac{5+5\varepsilon}{\varepsilon}\ddot{x}_1 + \frac{7}{\varepsilon}\dot{x}_1 + \frac{3}{\varepsilon}x_1 = 0. \quad (53)$$

І якщо тепер спрямувати ε до нуля, то результатом буде вже не (40) (чи (46)), а співвідношення (49) вищого на один порядку.

Рівнянню (53) відповідає характеристичний поліном

$$P[k] \equiv k^4 + \frac{1+4\varepsilon}{\varepsilon}k^3 + \frac{5+5\varepsilon}{\varepsilon}k^2 + \frac{7}{\varepsilon}k + \frac{3}{\varepsilon}. \quad (54)$$

Усі його корені у разі малого $\varepsilon > 0$ мають від'ємні дійсні частини (про це стверджує критерій Гурвіця), а отже стійкість розв'язку диференціального рівняння є гарантованою. У разі ж $\varepsilon < 0$ не всі коефіцієнти в характеристичному поліномі матимуть однакові знаки — тож, зрозуміло, розв'язок буде нестійким.

Цікаво, що систему ((40), (41)), по суті, складають дві різні: перша (40) — цілком самовизначена, а друга (41) — неоднорідна через активний вплив першої. Тож, жодних сумнівів, система ((40), (41)) — це цілком новий витвір, що виник унаслідок еквівалентного зведення.

Розглядаючи (39) з урахуванням (50) як неоднорідне диференціальне рівняння, можна знайти співвідношення

$$x_2 = -c_1 e^{-3t} + (c_4 + 2(c_2 + c_3)t + c_3 t^2)e^{-t} \quad (55)$$

(c_4 — ще одна довільна стала). Та якщо підставити (55) разом з (50) в (38), то виявиться що має справджуватись умова $c_3 = 0$, а в такому разі розв'язок ((50), (55)) з точністю до позначень сталих зводиться до вигляду ((42), (43)). Отож система ((38), (39)) не є «спадкоємицею» системи ((51), (39)) унаслідок «мутації», зумовленої усуванням дефекту ε.

Варіанти зведення конкретної системи до вигляду нормальної. Позначаючи $\dot{x}_1 + 4x_1 = x_3$, систему ((40), (41)) можна записати у формі нормальної

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + x_3,\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2,\ \dot{x}_3 = -3x_1 \quad (56)$$

з характеристичним визначником

$$P[k] \equiv \begin{vmatrix} -4-k & 0 & 1 \\ 2 & -1-k & 0 \\ -3 & 0 & -k \end{vmatrix} = -(k+3)(k+1)^2.$$

Вдамося ще до нових змінних

$$x_3 = \dot{x}_1 + 2x_1 - x_2,\ x_4 = \dot{x}_3,$$

і перетворімо рівняння (38) у систему

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_3,\quad \dot{x}_3 = x_4,\quad \dot{x}_4 = -x_3 - 2x_4.$$

При цьому рівняння (39) набуде вигляду

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0.$$

Отже в підсумку матимемо систему

$$\dot{x}_1 = -3x_1 - x_3 - x_4,\quad \dot{x}_3 = x_4,\quad \dot{x}_4 = -x_3 - 2x_4 \quad (57)$$

з характеристичним визначником/поліномом

$$P[k] \equiv \begin{vmatrix} -3-k & -1 & -1 \\ 0 & -k & 1 \\ 0 & -1 & -2-k \end{vmatrix} = -(k+3)(k+1)^2.$$

Можна казати, що системи (56) і (57) є спорідненими.

А от співвідношення (51) у формі

$$\dddot{x}_1 + 4\ddot{x}_1 + 5\dot{x}_1 + 2x_1 = (1+\varepsilon)\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 + x_2 \quad (58)$$

прочитаймо як рівність

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\dot{x}_1 + 4x_1 - (1+\varepsilon)x_2) + 5x_1 - 2x_2\right) + 2x_1 = x_2.$$

Далі позначмо

$$\dot{x}_1 + 4x_1 - (1+\varepsilon)x_2 = x_3,\ \dot{x}_3 + 5x_1 - 2x_2 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 + 2x_1 = x_2. \quad (59)$$

За умов (59) співвідношення (39) набуває вигляду

$$\varepsilon\dot{x}_2 = -x_2 - x_4. \quad (60)$$

Але разом (59) і (60) — це нормальна система диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + (1+\varepsilon)x_2 + x_3,\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{\varepsilon}(x_2 + x_4),$$

$$\dot{x}_3 = -5x_1 + 2x_2 + x_4,\ \dot{x}_4 = -2x_1 + x_2, \quad (61)$$

характеристичний поліном якої

$$P[k] \equiv \begin{vmatrix} -4-k & 1+\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon}-k & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \\ -5 & 2 & -k & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -k \end{vmatrix}$$

збігається з (54), як і слід було сподіватись.

У разі $\varepsilon \to 0$ із (61) (якщо усунути водночас x_4) випливає система

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 + x_3,\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2,\ \dot{x}_3 = -5x_1 + x_2 \quad (62)$$

з характеристичним визначником

$$P[k] \equiv \begin{vmatrix} -4-k & 1 & 1 \\ 2 & -1-k & 0 \\ -5 & 1 & -k \end{vmatrix} = -(k+1)^2(k+3).$$

Але за однакових коренів характеристичного визначника система (62) не збігається із системою (56).

Звісно, будувати нормальну систему можна ще інакше. Приміром, читаючи (58) як

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\dot{x}_1+2x_1-x_2)+2\dot{x}_1-\varepsilon\dot{x}_2+5x_1\right)+2x_1=2\dot{x}_2+x_2$$

і позначаючи вміст дужок через

$$\dot{x}_1+2x_1-x_2=x_3,\quad \dot{x}_3+2\dot{x}_1-\varepsilon\dot{x}_2+5x_1=x_4,$$

систему ((58), (39)) можна подати у нормальній формі

$$\dot{x}_1=-2x_1+x_2+x_3,\quad \dot{x}_2=\frac{x_2-x_4}{\varepsilon},$$
$$\dot{x}_3=-x_1-x_2-2x_3,$$
$$\dot{x}_4=-2x_1+\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}x_2-\frac{2}{\varepsilon}x_4$$

з характеристичним поліномом

$$P[k]\equiv\begin{vmatrix}-2-k & 1 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}-k & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}\\ -1 & -1 & -2-k & 0\\ -2 & \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} & 0 & -\frac{2}{\varepsilon}-k\end{vmatrix},$$

що, звісно, збігається з (54).

У разі ж $\varepsilon\to 0$ випливає в певному сенсі розладнана система

$$\dot{x}_1=-2x_1+x_2+x_3,\; x_2-x_4=0,$$
$$\dot{x}_3=-x_1-x_2-2x_3,$$

у якій $x_4(t)$ (чи $x_2(t)$) — ніяк не обумовлена, функція.

У разі призначення в (51) і (39)

$$\dot{x}_1+2x_1-x_2=x_3,\quad -x_1-x_2-\varepsilon\dot{x}_2-2x_3=x_4,$$

можна дійти нормальної системи

$$\dot{x}_1=-2x_1+x_2+x_3,\; \varepsilon\dot{x}_2=-x_1-x_2-2x_3-x_4,$$
$$\dot{x}_3=-x_1-x_2-2x_3=\varepsilon\dot{x}_2+x_4,$$
$$\dot{x}_4=2x_1+2x_2+3x_3$$

з характеристичним визначником, що зводиться до відомого вже полінома:

$$P[k]\equiv\begin{vmatrix}-2-k & 1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon}-k & -\frac{2}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon}\\ -1 & -1 & -2-k & 0\\ 2 & 2 & 3 & -k\end{vmatrix}=$$
$$=k^4+\frac{1+4\varepsilon}{\varepsilon}k^3+\frac{5+5\varepsilon}{\varepsilon}k^2+\frac{7}{\varepsilon}k+\frac{3}{\varepsilon}.$$

У разі $\varepsilon=0$ отримуємо систему

$$\dot{x}_1=-2x_1+x_2+x_3,\; x_1+x_2+2x_3+x_4=0,$$
$$\dot{x}_3=x_4,\; \dot{x}_4=2x_1+2x_2+3x_3,$$

на підставі якої власне й виникла система ((38), (39)).

Аби звести систему чотирьох рівнянь

$$\dot{x}_1=p_{11}x_1+p_{12}x_2+p_{13}x_3+p_{14}x_4, \tag{63}$$
$$\dot{x}_2=p_{21}x_1+p_{22}x_2+p_{23}x_3+p_{24}x_4, \tag{64}$$
$$\dot{x}_3=p_{31}x_1+p_{32}x_2+p_{33}x_3+p_{34}x_4, \tag{65}$$
$$\dot{x}_4=p_{41}x_1+p_{42}x_2+p_{43}x_3+p_{44}x_4 \tag{66}$$

до системи двох рівнянь штибу (47), потрібно перш за все двічі вдатися до операції диференціювання (зайвих таких операцій слід уникати). Можна, приміром, двічі продиференціювати рівняння (63) і за допомогою рівнянь (65), (66) записати результати у вигляді:

$$\ddot{x}_1=p_{11}\dot{x}_1+p_{12}\dot{x}_2+(p_{13}p_{31}+p_{14}p_{41})x_1+$$
$$+(p_{13}p_{32}+p_{14}p_{42})x_2+(p_{13}p_{33}+p_{14}p_{43})x_3+$$
$$+(p_{13}p_{34}+p_{14}p_{44})x_4$$

чи

$$\ddot{x}_1=p_{11}\dot{x}_1+p_{12}\dot{x}_2+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\alpha_{14}x_4; \tag{67}$$

$$\dddot{x}_1=p_{11}\ddot{x}_1+p_{12}\ddot{x}_2+\alpha_{11}\dot{x}_1+\alpha_{12}\dot{x}_2+$$
$$+\big((p_{13}p_{33}+p_{14}p_{43})p_{31}+(p_{13}p_{34}+p_{14}p_{44})p_{41}\big)x_1+$$
$$+\big((p_{13}p_{33}+p_{14}p_{43})p_{32}+(p_{13}p_{34}+p_{14}p_{44})p_{42}\big)x_2+$$
$$+\big((p_{13}p_{33}+p_{14}p_{43})p_{33}+(p_{13}p_{34}+p_{14}p_{44})p_{43}\big)x_3+$$
$$+\big((p_{13}p_{33}+p_{14}p_{43})p_{34}+(p_{13}p_{34}+p_{14}p_{44})p_{44}\big)x_4$$

чи

$$\begin{gathered}\dddot{x}_1=p_{11}\ddot{x}_1+p_{12}\ddot{x}_2+\alpha_{11}\dot{x}_1+\alpha_{12}\dot{x}_2+\\+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\beta_4x_4\end{gathered}. \tag{68}$$

Підставляючи отримані на підставі (63) і (67) величини

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x}_1-p_{11}x_1-p_{12}x_2 & p_{14}\\ \ddot{x}_1-p_{11}\dot{x}_1-p_{12}\dot{x}_2-\alpha_{11}x_1-\alpha_{12}x_2 & \alpha_{14}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p_{13} & p_{14}\\ \alpha_{13} & \alpha_{14}\end{vmatrix}},$$

$$x_4=\frac{\begin{vmatrix}p_{13} & \dot{x}_1-p_{11}x_1-p_{12}x_2\\ \alpha_{13} & \ddot{x}_1-p_{11}\dot{x}_1-p_{12}\dot{x}_2-\alpha_{11}x_1-\alpha_{12}x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p_{13} & p_{14}\\ \alpha_{13} & \alpha_{14}\end{vmatrix}}$$

у вирази (68) (64), отримуємо шукану систему двох рівнянь:

$$\dddot{x}_1-\left(p_{11}+\frac{p_{13}\beta_4-p_{14}\beta_3}{p_{13}\alpha_{14}-p_{14}\alpha_{13}}\right)\ddot{x}_1-$$
$$-\left(\alpha_{11}+\frac{p_{11}p_{14}\beta_3-p_{11}p_{13}\beta_4+\alpha_{14}\beta_3-\alpha_{13}\beta_4}{p_{13}\alpha_{14}-p_{14}\alpha_{13}}\right)\dot{x}_1-$$
$$-\left(\beta_1+\frac{p_{11}\alpha_{13}\beta_4-p_{11}\alpha_{14}\beta_3+p_{14}\alpha_{11}\beta_3-p_{13}\alpha_{11}\beta_4}{p_{13}\alpha_{14}-p_{14}\alpha_{13}}\right)x_1=$$

$$= p_{12}\ddot{x}_2 + \left(\alpha_{12} + \frac{p_{12}p_{14}\beta_3 - p_{12}p_{13}\beta_4}{p_{13}\alpha_{14} - p_{14}\alpha_{13}}\right)\dot{x}_2 +$$
$$+\left(\beta_2 + \frac{p_{12}\alpha_{13}\beta_4 - p_{12}\alpha_{14}\beta_3 - p_{13}\alpha_{12}\beta_4 + p_{14}\alpha_{12}\beta_3}{p_{13}\alpha_{14} - p_{14}\alpha_{13}}\right)x_2,$$
$$\left(1 - \frac{p_{12}p_{14}p_{23} - p_{12}p_{13}p_{24}}{p_{13}\alpha_{14} - p_{14}\alpha_{13}}\right)\dot{x}_2 -$$
$$-\left(p_{22} + \frac{-p_{12}p_{23}\alpha_{14} + p_{14}p_{23}\alpha_{12} - p_{13}p_{24}\alpha_{12} + p_{12}p_{24}\alpha_{13}}{p_{13}\alpha_{14} - p_{14}\alpha_{13}}\right)x_2 =$$
$$= \left(\frac{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}}{p_{13}\alpha_{14} - p_{14}\alpha_{13}}\right)\ddot{x}_1 +$$
$$+\left(\frac{p_{23}\alpha_{14} + p_{11}p_{14}p_{23} - p_{11}p_{13}p_{24} - p_{24}\alpha_{13}}{p_{13}\alpha_{14} - p_{14}\alpha_{13}}\right)\dot{x}_1 +$$
$$+\left(p_{21} + \frac{-p_{11}p_{23}\alpha_{14} + p_{14}p_{23}\alpha_{11} - p_{13}p_{24}\alpha_{11} + p_{11}p_{24}\alpha_{13}}{p_{13}\alpha_{14} - p_{14}\alpha_{13}}\right)x_1 . \quad (69)$$

Другий (так би мовити, «симетричний») підхід до зведення вказаних динамічних систем передбачає диференціювання і (63), і (64) з урахуванням (65) і (66). Тож поряд з (67) виникне співвідношення

$$\ddot{x}_2 = p_{21}\dot{x}_1 + p_{22}\dot{x}_2 + (p_{23}p_{31} + p_{24}p_{41})x_1 +$$
$$+(p_{23}p_{32} + p_{24}p_{42})x_2 +$$
$$+(p_{23}p_{33} + p_{24}p_{43})x_3 + (p_{23}p_{34} + p_{24}p_{44})x_4 \quad (70)$$

чи

$$\ddot{x}_2 = p_{21}\dot{x}_1 + p_{22}\dot{x}_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 .$$

Вирази (63) і (64) дають змогу визначити величини

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}_1 - p_{11}x_1 - p_{12}x_2 & p_{14} \\ \dot{x}_2 - p_{21}x_1 - p_{22}x_2 & p_{24} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_{13} & p_{14} \\ p_{23} & p_{24} \end{vmatrix}} =$$
$$= \frac{p_{24}\dot{x}_1 - p_{14}\dot{x}_2 - (p_{11}p_{24} - p_{14}p_{21})x_1 - (p_{12}p_{24} - p_{14}p_{22})x_2}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}},$$
$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} p_{13} & \dot{x}_1 - p_{11}x_1 - p_{12}x_2 \\ p_{23} & \dot{x}_2 - p_{21}x_1 - p_{22}x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_{13} & p_{14} \\ p_{23} & p_{24} \end{vmatrix}} =$$
$$= \frac{p_{13}\dot{x}_2 - p_{23}\dot{x}_1 + (p_{11}p_{23} - p_{13}p_{21})x_1 + (p_{12}p_{23} - p_{13}p_{22})x_2}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}},$$

що дає підстави записати (67), (70) остаточно у бажаному вигляді (на противагу (69))

$$\ddot{x}_1 + \zeta_{11}\dot{x}_1 + \zeta_{12}x_1 = \xi_{11}\dot{x}_2 + \xi_{12}x_2 ,$$
$$\ddot{x}_2 + \zeta_{21}\dot{x}_2 + \zeta_{22}x_2 = \xi_{21}\dot{x}_1 + \xi_{22}x_1 , \quad (71)$$

де

$$\zeta_{11} = -\frac{p_{11}(p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}) + \alpha_{13}p_{24} - \alpha_{14}p_{23}}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}} ,$$
$$\zeta_{12} = -\frac{\alpha_{11}(p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}) - \alpha_{13}(p_{11}p_{24} - p_{14}p_{21}) + \alpha_{14}(p_{11}p_{23} - p_{13}p_{21})}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}} ,$$
$$\xi_{11} = \frac{p_{12}(p_{12}p_{24} - p_{14}p_{22}) - \alpha_{13}p_{14} + \alpha_{14}p_{13}}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}} ,$$
$$\xi_{12} = \frac{\alpha_{12}(p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}) - \alpha_{13}(p_{12}p_{24} - p_{14}p_{22}) + \alpha_{14}(p_{12}p_{23} - p_{13}p_{22})}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}} ,$$
$$\zeta_{21} = -\frac{p_{22}(p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}) + p_{13}\alpha_{24} - p_{14}\alpha_{23}}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}} ,$$
$$\zeta_{21} = -\frac{\alpha_{22}(p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}) - (p_{12}p_{24} - p_{14}p_{22})\alpha_{23} + (p_{12}p_{23} - p_{13}p_{22})\alpha_{24}}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}} ,$$
$$\xi_{21} = \frac{p_{21}(p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}) + \alpha_{23}p_{24} - p_{23}\alpha_{24}}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}} ,$$
$$\xi_{22} = \frac{(p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23})\alpha_{21} - (p_{11}p_{24} - p_{14}p_{21})\alpha_{23} + (p_{11}p_{23} - p_{13}p_{21})\alpha_{24}}{p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}} .$$

,

Характеристичне рівняння для системи (71) має вигляд

$$P[k] \equiv \begin{vmatrix} k^2 + \zeta_{11}k + \zeta_{12} & -\xi_{11}k - \xi_{12} \\ k^2 + \zeta_{21}k + \zeta_{22} & -\xi_{21}k - \xi_{22} \end{vmatrix} = 0 .$$

Легко бачити, що унаслідок зведення (перетворення) система четвертого порядку загубить один порядок, якщо $\xi_{21} = \xi_{11}$. Ще один порядок зникне, якщо справдиться додатково й умова $\zeta_{11}\xi_{21} - \zeta_{21}\xi_{11} + \xi_{22} - \xi_{12} = 0$. Навпаки, якщо чинна спочатку умова $\xi_{21} = \xi_{11}$ несподівано хоч трохи порушиться ($\xi_{21} - \xi_{11} = \varepsilon$), то обов'язково відновиться четвертий порядок системи.

Хай в (36) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$:

$$\dot{x}_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + \varepsilon_1 x_4 ,$$
$$\dot{x}_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3 + \varepsilon_2 x_4 ,$$
$$\dot{x}_3 = p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 + \varepsilon_3 x_4 ,$$
$$\varepsilon\dot{x}_4 = p_{41}x_1 + p_{42}x_2 + p_{43}x_3 + p_{44}x_4 , \quad (72)$$

де всі коефіцієнти в загальному випадку можуть залежати від ε. Характеристичний визначник системи (72) відповідає співвідношенню

$$\varepsilon P[k] \equiv \begin{vmatrix} p_{11} - k & p_{12} & p_{13} & \varepsilon_1 \\ p_{21} & p_{22} - k & p_{23} & \varepsilon_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - k & \varepsilon_3 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} - k\varepsilon \end{vmatrix} =$$
$$= \varepsilon k^4 + (-E\varepsilon + p_{44})k^3 +$$
$$+(-p_{41}\varepsilon_1 - p_{42}\varepsilon_2 - p_{43}\varepsilon_3 + Ep_{44} + A\varepsilon)k^2 +$$
$$+(B_1\varepsilon_1 + B_2\varepsilon_2 + B_3\varepsilon_3 - B_4 p_{44} - B\varepsilon)k +$$
$$+(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + C_3\varepsilon_3 - C_4 p_{44}), \quad (73)$$

де позначено:

$$p_{11}+p_{22}+p_{33}=E,$$
$$p_{11}p_{33}+p_{11}p_{22}+p_{22}p_{33}-p_{12}p_{21}-p_{13}p_{31}-p_{23}p_{32}=A,$$
$$p_{33}p_{41}+p_{22}p_{41}-p_{21}p_{42}-p_{31}p_{43}=B_1,$$
$$p_{33}p_{42}-p_{32}p_{43}+p_{11}p_{42}-p_{12}p_{41}=B_2,$$
$$p_{22}p_{43}-p_{23}p_{42}-p_{13}p_{41}+p_{11}p_{43}=B_3,$$
$$-p_{11}p_{33}-p_{11}p_{22}+p_{12}p_{21}+p_{13}p_{31}+p_{23}p_{32}-p_{22}p_{33}=-B_4,$$
$$-p_{11}p_{22}p_{33}-p_{13}p_{21}p_{32}+p_{12}p_{21}p_{33}-p_{12}p_{23}p_{31}+$$
$$+p_{13}p_{22}p_{31}+p_{11}p_{23}p_{32}=-B,$$
$$-p_{21}p_{32}p_{43}+p_{21}p_{33}p_{42}+p_{22}p_{31}p_{43}-$$
$$-p_{22}p_{33}p_{41}-p_{23}p_{31}p_{42}+p_{23}p_{32}p_{41}=C_1,$$
$$p_{11}p_{32}p_{43}-p_{11}p_{33}p_{42}-p_{12}p_{31}p_{43}+$$
$$+p_{12}p_{33}p_{41}+p_{13}p_{31}p_{42}-p_{13}p_{32}p_{41}=C_2,$$
$$-p_{11}p_{22}p_{43}+p_{11}p_{23}p_{42}+p_{12}p_{21}p_{43}-$$
$$-p_{12}p_{23}p_{41}-p_{13}p_{21}p_{42}+p_{13}p_{22}p_{41}=C_3,$$
$$p_{11}p_{22}p_{33}-p_{11}p_{23}p_{32}-p_{12}p_{21}p_{33}+p_{12}p_{23}p_{31}+$$
$$+p_{13}p_{21}p_{32}-p_{13}p_{22}p_{31}=-C_4.$$

Щоби системі (72) поставити у відповідність якусь іншу систему з визначником

$$\varepsilon P[k]=\varepsilon k^4+\alpha_\varepsilon k^3+\beta_\varepsilon k^2+\chi_\varepsilon k+\delta_\varepsilon, \qquad (74)$$

(α_ε, α_ε, α_ε, α_ε — параметри, що можуть залежати від ε) потрібно попарно прирівняти коефіцієнти при однакових степенях k у виразах (73) і (74):

$$-E\varepsilon+p_{44}=\alpha_\varepsilon,$$
$$-p_{41}\varepsilon_1-p_{42}\varepsilon_2-p_{43}\varepsilon_3+Ep_{44}+A\varepsilon=\beta_\varepsilon,$$
$$B_1\varepsilon_1+B_2\varepsilon_2+B_3\varepsilon_3-B_4p_{44}-B\varepsilon=\chi_\varepsilon,$$
$$C_1\varepsilon_1+C_2\varepsilon_2+C_3\varepsilon_3-C_4p_{44}=\delta_\varepsilon.$$

Якщо б, приміром, довелося орієнтуватися на систему ((51), (39)), а тому брати до уваги співвідношення (див. (54))

$$\varepsilon P[k]=\varepsilon k^4+(1+4\varepsilon)k^3+5(1+\varepsilon)k^2+7k+3,$$

то потрібно було б оперувати системою рівнянь

$$p_{44}=1+4\varepsilon+E\varepsilon,$$
$$p_{41}\varepsilon_1+p_{42}\varepsilon_2+p_{43}\varepsilon_3=A\varepsilon+Ep_{44}-5(1+\varepsilon),$$
$$B_1\varepsilon_1+B_2\varepsilon_2+B_3\varepsilon_3=7+B\varepsilon+B_4p_{44},$$
$$C_1\varepsilon_1+C_2\varepsilon_2+C_3\varepsilon_3=3+C_4p_{44}.$$

Очевидно, що збурити додатковий порядок в кожній системі диференціальних рівнянь першого порядку (зокрема й у тій, що відповідатиме системі ((38), (39)) можна доволі багатьма способами.

Фундаментальна функція. За допомогою так званої фундаментальної функції-експоненти (яку називають функцією Коші [2, 4, 23—25] — на противагу, мабуть, функції Ґріна)

$$\Phi(t-\gamma)=\frac{\overset{n}{\Delta}_e(t-\gamma)}{\overset{n}{\Delta}} \qquad (75)$$

розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння

$$L[x]\equiv p_0\frac{d^n x}{dt^n}+p_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}\frac{dx}{dt}+p_n x=q(t) \qquad (76)$$

зі сталими коефіцієнтами можна записати у вигляді [2]

$$x=\sum_{i=0}^{n-1}c_{i+1}\frac{\partial^i\Phi(t-\gamma)}{\partial\gamma^i}+\frac{1}{p_0}\int_\gamma^t\Phi(t-s)q(s)ds,$$

де $q(t)$ — функція-збурення,

$$\overset{n}{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

$$\overset{n}{\Delta}_e(t-\gamma)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n\\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots & k_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1}\\ e^{k_1(t-\gamma)} & e^{k_2(t-\gamma)} & \ldots & e^{k_n(t-\gamma)}\end{vmatrix},$$

$$(-1)^i\frac{\partial^{i+j}\Phi(t-\gamma)}{\partial\gamma^i\partial t^j}=(-1)^{i+j}\frac{\partial^{i+j}\Phi(t-\gamma)}{\partial\gamma^{i+j}}=\frac{\partial^{i+j}\Phi(t-\gamma)}{\partial t^{i+j}}.$$

Але ж ту саму функцію можна ставити у відповідність не диференціальним рівнянням (8) чи (76), а відповідному їм характеристичному визначнику (9).

У випадку, приміром, характеристичного полінома (48)

$$\overset{3}{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ k_1 & k_2 & k_3\\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2\end{vmatrix},\quad \overset{3}{\Delta}_e(t-\gamma)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ k_1 & k_2 & k_3\\ e^{k_1(t-\gamma)} & e^{k_2(t-\gamma)} & e^{k_3(t-\gamma)}\end{vmatrix},$$

$$\Phi(t-\gamma)=\frac{\overset{3}{\Delta}_e(t-\gamma)}{\overset{3}{\Delta}}=$$
$$=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ k_1 & k_2 & k_3\\ e^{k_1(t-\gamma)} & e^{k_2(t-\gamma)} & e^{k_3(t-\gamma)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ k_1 & k_2 & k_3\\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2\end{vmatrix}}=$$
$$=\lim_{k_3\to k_2}\frac{\dfrac{\partial}{\partial k_3}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ k_1 & k_2 & k_3\\ e^{k_1(t-\gamma)} & e^{k_2(t-\gamma)} & e^{k_3(t-\gamma)}\end{vmatrix}}{\dfrac{\partial}{\partial k_3}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ k_1 & k_2 & k_3\\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2\end{vmatrix}}=$$
$$=\frac{e^{k_1(t-\gamma)}-e^{k_2(t-\gamma)}}{(k_1-k_2)^2}-\frac{(t-\gamma)e^{k_2(t-\gamma)}}{k_1-k_2},$$

$$x_j = c_{1j}\Phi(t-\gamma) + c_{2j}\,\frac{\partial\Phi(t-\gamma)}{\partial\gamma} + c_{3j}\,\frac{\partial^2\Phi(t-\gamma)}{\partial\gamma^2},$$

$$j = 1; 2, \qquad (77)$$

де c_{ij} — сталі. Підставляючи (77) з урахуванням конкретного вигляду фундаментальної функції

$$\Phi(t-\gamma) = \frac{e^{-3(t-\gamma)} - e^{-(t-\gamma)} + 2(t-\gamma)e^{-(t-\gamma)}}{4} \qquad (78)$$

у систему рівнянь ((38), (39)) доходимо висновку, аби ця система тотожно справджувалась, сталі при експонентах повинні дорівнювати нулю:

$$c_{11} + c_{12} + 3c_{21} + 3c_{22} + 9c_{31} + 9c_{32} = 0,$$

$$c_{11} - c_{12} - c_{21} - c_{22} - 3c_{31} - 2c_{32} = 0, \quad c_{11} + c_{21} + c_{31} = 0.$$

Зокрема, беручи до уваги останню рівність, можна (77) з урахуванням (78) записати у вигляді

$$x_1 = \frac{c_{21} + 4c_{31}}{2} e^{-3(t-\gamma)} - \frac{c_{21} + 2c_{31}}{2} e^{-(t-\gamma)},$$

$$x_2 = \frac{c_{12} + 3c_{22} + 9c_{32}}{4} e^{-3(t-\gamma)} -$$

$$- \frac{c_{12} + 3c_{22} + 5c_{32}}{4} e^{-(t-\gamma)} +$$

$$+ \frac{c_{12} + c_{22} + c_{32}}{2} (t-\gamma) e^{-(t-\gamma)}.$$

і переконатись, що отриманий результат загалом збігається з ((42), (43)).

Очевидно, що функція (75) вибудовується на основі коренів (нулів) характеристичного визначника, тобто є в певному сенсі продуктом розв'язування алгебричної задачі.

Обмірковування/обговорення ситуації. Характеристичними поліномами оперують й у разі дослідження системи n однорідних лінійних рівнянь з n невідомими

$$Ax = kx,$$

яку можна записати також у вигляді

$$(A - kE)x = 0. \qquad (79)$$

Тут x — n-вимірний вектор, A та E — розміром $n \times n$ матриця коефіцієнтів та розміром $n \times n$ одинична матриця, k — параметр. Справді, наведені рівняння мають ненульові розв'язки x тільки у разі перетворення на нуль визначника $\det(A - kE)$ матриці $(A - kE)$, тобто за таких значень k, що є коренями відповідного полінома степеня n

$$P_n[k] \equiv a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0,$$

де a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n — коефіцієнти розгортання визначника $\det(A - kE)$ у степеневий поліном $P_n[k]$. Наведений поліном називають характеристичним поліномом матриці A, а його корені — власними значеннями (чи власними числами) цієї матриці.

У рівнянні (79) замість E може фігурувати квазіодинична матриця $\overline{E}$ — ніби та сама одинична матриця E, але спотворена тим, що r її діагональних одиниць замінено на нулі:

$$(A - k\overline{E})x = 0. \qquad (80)$$

Звісно, детермінанту $\det(A - k\overline{E})$ відповідає характеристичний поліном степеня, меншого за $n - r$ чи рівного цьому числу. Але у разі хоч яких перетворень системи (80) малі варіації параметрів проміжних нових описів можуть спричинитися до зростання степеня характеристичного полінома. Але що ж тут є таким вже й несподіваним чи дивним? І як можна це не відстежити в рамках належно ретельного дослідження? Кожне перетворення породжує нову структуру, яка тому й нова, що має якісь особливості, на які слід або вигідно зважати. І якщо здеформувати нову структуру, варіюючи її параметри, то повернутись до старої структури, що не містить спотворень, уже не вдасться.

Якщо в системі рівнянь

$$p_{i1}x_1 + p_{12}x_2 + \ldots + p_{in}x_n = 0, \; i = \overline{1,n}$$

коефіцієнти й невідомі є комплексними числами ($p_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk}$, $x_j = u_j + iv_j$,; α_{jk}, β_{jk}, u_j, v_j — дійсні числа; $j, k = \overline{1,n}$), то вона має не тільки тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 \ldots = x_n = 0$ ($u_1 = u_2 \ldots = u_n = 0$, $v_1 = v_2 \ldots = v_n = 0$) тоді й тільки тоді, коли визначник $|\, p_{jk}\,|_1^n$ дорівнює нулю. З цієї умови випливають два (не одне!) співвідношення між $2n^2$ дійсними величинами α_{jk}, β_{jk}.

Пробуючи знайти нетривіальні розв'язки системи чотирьох лінійних однорідних алгебричних рівнянь з параметром k (параметр k — це загалом друга змінна поряд з x, приклад взято з [6])

$$\begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} (2+k)x_1 - x_2 - x_4 \\ kx_2 - x_3 \\ x_2 + (2+k)x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{Vmatrix} = 0,$$

відразу помічаємо, що степінь визначника (полінома)

$$\begin{vmatrix} 2+k & -1 & 0 & -1 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2+k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k+3)(k+1)^2$$

дорівнює трьом. Звернімо увагу також на друге й третє рівняння системи як на окрему саму по собі систему: щоби змінні x_2 і x_3 не були обидві одночасно нулями, має виконуватись умова $(k+1)^2=0$; умова ж $k=-3$ веде до розв'язку $x_1+x_4=0$, $x_2=x_3=0$.

Якщо, приміром, замість $a_{12}=-1$ прийняти $a_{12}=-(1+\varepsilon)$ (ε — мале за модулем число), то виявиться, що слід варіації у відповідному поліномі не відіб'ється:

$$\begin{vmatrix} 2+k & -1-\varepsilon & 0 & -1 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2+k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k+3)(k+1)^2.$$

Тож у разі ε, незалежного від k, матимемо: $k=-3$ — $\{x_2=x_3=0, x_1=x_4\neq 0\}$; $k=-1$ — $\{x_2+x_3=0, x_1+x_2+x_4=0, -(2+\varepsilon)x_2-2x_4=0\}$.

Якщо ж замість $a_{31}=0$ прийняти $a_{31}=\varepsilon$ (ε — мале за модулем і незалежне від k число), то ситуація суттєво зміниться:

$$\begin{vmatrix} 2+k & -1 & 0 & -1 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 2+k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k+1)\left((k+3)(k+1)-\varepsilon\right)\cdot$$

У разі $k=-1$ — $\{x_1=0, x_2+x_4=0, x_2+x_3=0\}$. А от у разі $(k+3)(k+1)-\varepsilon=0$ — параметр і варіація системи взаємозалежні ($k=-2\pm\sqrt{1+\varepsilon}$, $(k+3)x_1+(k+1)x_2=0$, $kx_2-x_3=0$, $x_1+(k+2)x_2+x_4=0$).

Хай тепер a_{44} дорівнює $1+\varepsilon$, а не 1. В такому разі

$$\begin{vmatrix} 2+k & -1 & 0 & -1 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2+k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = \left((k+2)(1+\varepsilon)+1\right)(k+1)^2,$$

а система має вигляд

$$(2+k)x_1-x_2-x_4=0, \quad kx_2-x_3=0,$$
$$x_2+(2+k)x_3=0, \quad x_1+2x_2+x_3+(1+\varepsilon)x_4=0.$$

Її розв'язок є таким: $\{k=-1, x_1-x_2-x_4=0, x_2+x_3=0, 2x_1+\varepsilon x_4=0\}$. Між k і ε може існувати також зв'язок $(k+2)(1+\varepsilon)+1=0$. В такому разі $x_2=x_3=0$, $(2+k)x_1-x_4=0$ ($k=-1/(1+\varepsilon)-2$). Якщо б тут взяти $1+\varepsilon=k$ (загалом — це немала варіація), то визначник набув би значення $(k+1)^2$. Зрештою, малі варіації можуть визначатися загальною формулою $\varepsilon=f(k)$.

Усуваючи із системи чотирьох рівнянь (за допомогою операцій множення й додавання) змінні x_1 і x_2, можна побудувати зокрема систему двох рівнянь

$$(k^2+4k+5)x_3=-k(k+3)x_4,$$
$$2(k+2)^2x_3=(k+3)x_4,$$

а усуваючи вже з неї ще й змінну x_3, легко дійти одного рівняння

$$(k+3)(k+1)^2(2k+5)x_4=0.$$

В обидвох цих випадках, щоби не всі $x_i, i=\overline{1;4}$ одночасно дорівнювали нулю, параметр k має задовольняти одну і ту саму умову

$$(k+3)(k+1)^2(2k+5)=0.$$

Тобто з'являється четвертий степінь полінома і додаткове прийнятне значення параметра $k=-5/2$, яке, однак, не задовольняє первісну систему чотирьох рівнянь.

Відтак отримані новотвори — нічого дивного — несуть в собі нову якість. Четвертий корінь супровідного полінома не властивий первісній системі, але відмовитися від нього в похідній системі чи похідному рівнянні ніяк не можна, нема для цього жодного об'єктивного сенсу. Та й цікаво, яким робом можна було б в новотворах навести, так би мовити, лад цілковитої еквівалентності первісному (що для цього треба зробити)?

У роботі [26] було наведено приклад алгоритму розрахунку власних значень лінійної системи, що призводить до помилки навіть за одиничної похибки заокруглення. Та це, звісно, не можна вважати несподіванкою.

Звернімося тепер до дещо іншої системи рівнянь

$$(2+k)x_1-x_2-(\alpha_1k+\beta_1)x_4=0,$$
$$(\alpha_2k+\beta_2)x_1+kx_2-x_3=0,$$
$$\alpha_3kx_2+(2+k)x_3=0,$$
$$x_1+2x_2+kx_3+(\alpha_4k+\beta_4)x_4=0, \quad (81)$$

вважаючи, що α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, α_4, β_4, $\alpha_4-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\approx 0$, — задані параметри системи, а k — невідомий параметр, що має забезпечити існування нетривіального розв'язку системи. Ненульовий (нетривіальний) розв'язок існуватиме тільки в тому разі, коли справджуватиметься характеристична рівність (доданки не упорядковувались)

$$\alpha_1\alpha_3k^3(\alpha_2k+\beta_2)+\alpha_4k^2(2+k)^2+$$
$$+\alpha_1k\left[k(2+k)-2(2+k)(\alpha_2k+\beta_2)+\alpha_3k\right]+$$
$$+\alpha_4k\left[\alpha_3k(2+k)+(2+k)(\alpha_2k+\beta_2)\right]+$$
$$+\beta_1\left[\alpha_3k^2(\alpha_2k+\beta_2)+k(2+k)-2(2+k)(\alpha_2k+\beta_2)+\alpha_3k\right]+$$
$$+\beta_4\left[k(2+k)^2+\alpha_3k(2+k)+(2+k)(\alpha_2k+\beta_2)\right]=$$
$$=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_4)k^4+\ldots=0.$$

Отже очевидно, якщо свідомо закладено, що точно $\alpha_4-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0$, то загальна кількість коренів характеристичної рівності не перевищуватиме трьох. Але якщо «поворушити» умову $\alpha_4-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0$, поклавши замість якогось α_i дуже близьке $\alpha_i+\varepsilon$ (ε — зникаюче мале за модулем число), то з'явиться четвертий корінь. А це можна тлумачити як «суттєві наслідки від несуттєвої варіації», прояв некоректності абощо. Визначаючи з першого і четвертого разом рівнянь системи (81) змінні x_1 і x_2 та підставляючи їх в друге й третє, отримаємо замість чотирьох систему двох рівнянь

$$\left(2k^2(k+2)+2\left(2k+5\right)+2k(\alpha_2 k+\beta_2)\right)x_3+$$
$$+\left[2(\alpha_2 k+\beta_2)\left((\alpha_4-2\alpha_1)k+\beta_4-2\beta_1\right)+\right.$$
$$\left.+k\left((2k+5)(\alpha_4 k+\beta_4)-(\alpha_4-2\alpha_1)k-\beta_4+2\beta_1\right)\right]x_4=0,$$
$$2\left[\alpha_3 k^2(k+2)-(2+k)\left(2k+5\right)\right]x_3+$$
$$+\alpha_3 k\left[\left(2k+5\right)(\alpha_4 k+\beta_4)-\left((\alpha_4-2\alpha_1)k+\beta_4-2\beta_1\right)\right]x_4=0.$$

Зведення виконувалось з використанням тільки операцій множення й додавання — на засадах еквівалентних перетворень.

Характеристична рівність цього разу має вигляд (з неупорядкованими членами)

$$8\alpha_1\alpha_2\alpha_3 k^5+8\alpha_4 k^5+$$
$$+8\alpha_1\alpha_3\beta_2 k^4+2\alpha_2\alpha_3\left(2\beta_4+\alpha_4+8\alpha_1\right)k^4-4\alpha_2\alpha_3(\beta_4-$$
$$-2\beta_1)k^4+8\alpha_3\alpha_4 k^4-2\alpha_2\alpha_3\left(\alpha_4-2\alpha_1\right)k^4+$$
$$+8\alpha_2\left(\alpha_4-2\alpha_1\right)k^4+16\alpha_4 k^4+2\alpha_3\beta_2\left(2\beta_4+\alpha_4+8\alpha_1\right)k^3+$$
$$+10\alpha_3\beta_4 k^2(\alpha_2 k+\beta_2)-8\alpha_2\alpha_3(\beta_4-2\beta_1)k^3-$$
$$-4\alpha_3\beta_2(\beta_4-2\beta_1)k^2(k+2)+20\alpha_3\alpha_4 k^3+$$
$$+4\alpha_3\beta_4 k^2\left(2k+5\right)+10\alpha_3 k\left(2k+5\right)(\alpha_4 k+\beta_4)-$$
$$-2\alpha_3 k\left(2k+5\right)\left[\left(\alpha_4-2\alpha_1\right)k+(\beta_4-2\beta_1)\right]-$$
$$-2\alpha_3\beta_2\left(\alpha_4-2\alpha_1\right)k^3-2\alpha_3(\beta_4-2\beta_1)k^2(\alpha_2 k+\beta_2)+$$
$$+16\alpha_2\left(\alpha_4-2\alpha_1\right)k^3+20\alpha_2\left(\alpha_4-2\alpha_1\right)k^2(2+k)+$$
$$+4\beta_2\left(\alpha_4-2\alpha_1\right)k(2+k)\left(2k+5\right)+$$
$$+4(\beta_4-2\beta_1)(2+k)\left(2k+5\right)(\alpha_2 k+\beta_2)+$$
$$+10\alpha_4 k^2(2+k)\left(4k+5\right)+2\beta_4 k(2+k)\left(4k^2+20k+25\right)-$$
$$-2\left(\alpha_4-2\alpha_1\right)k^2(2+k)\left(2k+5\right)-$$
$$-2(\beta_4-2\beta_1)k(2+k)\left(2k+5\right)= \cdot$$
$$=8\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_4\right)k^5+\ldots=0$$

Отож тепер вже йдеться про не більше, ніж чотири, корені k у разі $\alpha_4-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0$ та можливо п'ять коренів у разі $\alpha_4-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\approx 0$. Цей факт, зокрема, ілюструє ймовірність негативних наслідків від заокруглень результатів обчислювальних операцій (про що, зрештою, давно відомо).

Як уважають в [6], наведені щойно прості приклади на зміну коректності задач, ніби є сенс «узяти на замітку вчителю». І вони ніби переконливо доводять [6]: «ми дійсно маємо справу з новим явищем, яке має важливе значення для практичних розрахунків і поки що не до кінця досліджене». Але насправді ці приклади — рутинно звичайні. Їх можна зробити навіть цікавішими, якщо припустити, що лінійність співвідношень відносно параметрів виникла унаслідок поганої (не дуже точної) обумовленості задач і що ці співвідношення «приблизно однорідні». Та навіть у цьому випадку йтиметься все'дно про прості задачі в сенсі Р. Декарта.

Один з наведених в [6] прикладів — система

$$(D+1)x_1+(D+2)x_2=0,$$
$$(D+2)x_1+(D+5)x_2=0$$

з характеристичним поліномом

$$P[k]\equiv\begin{vmatrix}k+1 & k+2\\ k+2 & k+5\end{vmatrix}=(k+1)(k+5)-(k+2)(k+2)=2k+1$$

— за задумом мав би переконати, що звичні підходи до оцінювання запасів стійкості не завжди ведуть до істини: в певному сенсі не близький до уявної осі комплексної площини корінь $k=-1/2$ доводить, що системи гарантовано стійка; але варто ледь-ледь розворушити систему —

$$(D+1)x_1+\left((1+\varepsilon)D+2\right)x_2=0,$$
$$(D+2)x_1+(D+5)x_2=0$$

— як відповідний поліном

$$P'[k]\equiv\begin{vmatrix}k+1 & (1+\varepsilon)k+2\\ k+2 & k+5\end{vmatrix}=-\varepsilon k(k+2)+P'[k]$$

у разі навіть дуже малого $\varepsilon>0$ видаватиме її уже як нестійку. Насправді ж цей простий приклад засвідчив, що система суттєво зреагувала на суттєве ж (!) збурення, бо зміна порядку системи — це наслідок справді потужного впливу на її структуру. І коли укладають математичну модель явища на засадах законів природи, можливість зміни розмірності (вимірності) моделі не повинна стати примітивною несподіванкою, а от відкриттям стати цілком може. В таких випадках, якщо один знак параметра ε варіації гарантує стійкість системи, то протилежний обов'язково засвідчує втрату стійкості.

Нічого особливого не доводить і приклад такого змісту.

Зміна порядку системи виникає й у разі аналітичного опису

$$m\dot{x}_1=-2x_1+x_2+x_3,\ \dot{x}_3=x_4,\ \dot{x}_4=-x_3-2x_4. \quad (82)$$

Якщо керівну дію x_2 формувати у вигляді

$$u=x_2=-x_1-2x_3-x_4, \quad (83)$$

характеристичний поліном набуває вигляду

$$P_3[k]\equiv mk^3+(3+2m)k^2+(6+m)k+3= \quad (84)$$
$$=(mk+3)(k+1)^2.$$

Він залишається Гурвіцевим для всіх $0<m$ (для як завгодно великих m). Зважмо, тут знову йдеться, по суті, про систему ((38), (39)).

Натомість якщо з опису усунути змінні x_3 і x_4, дійдемо системи

$$\left(mD^3+(2+2m)D^2+(4+m)D+2\right)x_1=(D+1)^2x_2,$$
$$(D+1)x_2=(D^2+4D+5)x_1 \qquad (85)$$

з характеристичним поліномом

$$P_4[k]\equiv(1-m)k^4+(4-3m)k^3+(8-3m)k^2+(8-m)k+3\,.(86)$$

У разі $m=1$ (84) і (86) збігаються, але за інших значень m системи ((82)—(84)) і ((85), (86)) не тотожні. Зважмо, щоби (85) була стійкою, має дотримуватись умова $0<m<1$ (принципово, звісно, жорсткіша за умову $0<m$; зникаюче мале перевищення величиною m значення $m=1$ одразу провокує нестійкість).

В дослідженнях, присвячених проблемі «несподіваного в математиці та супровідних аварій/катастроф» робиться висновок (навіть у формі теореми), що можливість збереження стійкості залежить не від властивостей самої системи, а від властивостей ε-околу її існування (околу варіацій системи, див., зокрема, (28)), і вона (стійкість) може чи з'являтися, чи зникати у разі еквівалентних (у класичному сенсі) перетворень системи. Саме через це ніби й випливає необхідність введення нового математичного поняття — еквівалентності перетворень в розширеному сенсі.

Пари перетворень множення/ділення, диференціювання/інтегрування, додавання/віднімання не цілком рівноправні. Множення комплексних чисел, приміром, — прозоріша операція, ніж ділення цих чисел одне на інше; множення на нуль — не катастрофа, а от просто ділити на нуль зась (і як би не узагальнювали операцію множення/ділення, все одно ділити неасимптотично на нуль не можна буде). Диференціювання ніби розхитує, робить менш визначеним первісне аналітичне співвідношення, а от інтегрування, навпаки, наводить, якщо можна так казати, більший лад.

Взагалі ж, як можна помітити, визначальною характеристикою динамічних систем, що розглядаються, є характеристичний поліном штибу (9). Саме він цілковито визначає тотожність/нетотожність систем. Його можна не одним способом подати у вигляді (19). А отже рівнянню штибу (8) можна поставити у відповідність не одну систему штибу (13) (чи штибу ((30), (31))). Зокрема, лінійне звичайне однорідне відносно однієї залежної змінної диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами і відповідний характеристичний поліном структурно взаємозумовлені. Відтак будь-якій іншій системі лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, у разі такого самого поліномного представлення характеристичного визначника, легко і часто є сенс поставити у відповідність згадане одне рівняння.

Тож очевидно, що формально еквівалентними слід вважати лише динамічні системи з одним і тим самим характеристичним поліномом (поліномом, що має однакові корені). Про обмеженість еквівалентності свідчить невідповідність структур визначників штибу (19)—(21). Зрештою, рівнянню (8) можна ставити у відповідність еквівалентне інтегральне рівняння [22] і це не загрожуватиме несподіванками чи енігматичними наслідками.

В ширшому сенсі еквівалентність виникає хіба що тоді, коли збігаються ще й характеристичні визначники. При цьому під визначником одного-єдиного рівняння (8) можна розуміти вираз (21).

Описувані диференціальними рівняннями системи, що не змінюють істотно своєї поведінки за малих варіацій описових рівнянь, називали грубими. При цьому висували вимогу: лиш би ці малі варіації не змінювати порядок диференціального рівняння чи системи рівнянь. Приміром, в [27] йшлося власне про можливість втрати грубості у процесі елементарних (звичних еквівалентних) перетворень системи, що трактувалось як ознаку непридатності системи до практичного використання. Та простіше й об'єктивніше вважати варіації, що призводять до зміни порядку аналітичного опису, немалими, суттєвими, критичними… Нечутливі до малих змін системи краще, як це здебільшого прийнято в світі, називати робастними (англ. Robust — ясний, здоровий, міцний; англ. Robustness — стійкість (до небажаних, але можливих впливів), витривалість, тривкість…). Неробастні системи мають свою перспективу. Мабуть, широке їх застосування — ще попереду.

Важливість проблеми перевірки збережуваності стійкості у разі варіацій параметрів системи добре усвідомлена [20]. Але не менш важливою є проблема свідомого розпізнавання й умов нестійкості: в техніці, приміром, робоча частина якоїнебудь машини сама по собі мала б бути не дуже нестійкою, аби можна було нею малими зусиллями маніпулювати, а от у поєднанні з автоматичною системою керування вона сукупно мала б набути властивості гарантованої стійкості.

Стійкість у дуже широкому контексті дотична до проблем керування й оптимізації, і навіть до проблем надійності обчислень. Відомо, що оптимізація може вести систему у напрямі до межі стійкості чи коректності. В методології «аналітичного конструювання» регуляторів на засадах мінімізації квадратичних критеріїв якості (нелінійні задачі), приміром, не передбачено запобігання втраті коректності. В [28] навіть було задекларовано, що бібліографія робіт, присвячених (лінійно-квадратичній) теорії аналітичного конструювання оптимальних регуляторів, налічує тисячі книг і статей, а тим часом практичні застосування теорії залишаються скромними, а синтезовані її засобами регулятори не наділені властивістю грубості. Але цю думку загалом не було підтримано. Неминучі похибки унаслідок заокруглень результатів обчислень тільки поти залишатимуться просто похибками, поки супроводжуватимуться малими проявами в отримуваних розв'язках тієї чи іншої задачі. В іншому разі йтиметься про некоректність задачі чи погану її обумовленість.

Зроблена в [6] пафосна заява-сентенція — «Буде прикро, якщо першою впровадить у себе вдосконалені методи розрахунку яка-небудь зарубіжна фірма. Спираючись на публікації в російській технічній літературі, це у принципі можна зробити. Додаткова робота щодо програмного забезпечення вдосконалених методів не дуже велика.» — якось не відповідає духові науки. Навіть хочеться у відповідь висловитись нетактовно: завжди було так, що «вперше» майже все було не в Росії і від цього не ставало погано… А взагалі кажучи, цю заяву-сентенцію є сенс сприймати як заклик бути завжди ретельним у дослідженні властивостей динамічних систем, як вмотивований заклик до завжди професійного сприйняття проблеми аналізу/синтезу досконалих динамічних систем.

В аналізованих дослідженнях одне «відкриття» (разом їх п'ять) полягає в з'ясуванні того, що звичні еквівалентні перетворення динамічних систем можуть призводити до втрати коректності задач синтезу й аналізу таких систем, спровокувати похибки у розрахунках, спричинитися до аварій і катастроф. Тому звичні еквівалентні перетворення не такі вже й еквівалентні. Відтак виявлено, що поряд з коректними та некоректними математичними й технічними задачами існують такі, що втрачають свою коректність унаслідок еквівалентних перетворень. Інше відкриття полягає в знаходженні підстав заперечити чи звузити чинність теореми про неперервну залежність розв'язків системи диференціальних рівнянь від параметрів. Та насправді різні наслідки еквівалентних перетворень динамічних систем ретельно вивчались віддавна. Здебільшого вони сприймались цілком належно й стримано, і майже ніколи — як несподівані й дивні.

Приміром, множення на операторний поліном вважати еквівалентним перетворенням слід з пересторогою. Диференціювання ще й конфліктує з вимогами неперервності усього того, що підлягає його дії (це стосується насамперед рівнянь зі змінними коефіцієнтами). Зайвий корінь характеристичного полінома — це зайвий елементарний розв'язок у фундаментальній системі розв'язків, який не можна вважати наслідком малого зрушення системи.

Дуже важить на тому, якою системою реально послуговуватимемось — первісною чи похідною (вивідною). Якщо автоматичну систему керування синтезують на основі результатів еквівалентного перетворення якогось первісного її аналітичного опису, то рівень еквівалентності первісного і вивідного описів може взагалі нічого вже не значити.

Висновки. 1. Зазвичай недостатньо, аби система була номінально стійкою. Необхідно, щоби вона зберігала стійкість у разі неминучих самовільних чи вмотивованих ззовні варіацій параметрів — унаслідок, приміром, зношування й старіння чи навіть сторонніх активних впливів. Тобто необхідно, аби вона була наділена параметричною стійкістю. Непрогнозований загрозливий стійкості малий дрейф параметрів може виявитися суто технічним, а може виникати навіть унаслідок заокруглень обчислювальних операцій. Поняття параметричної стійкості тісно пов'язане з поняттям коректності змісту задачі дослідження властивостей системи.

2. Звісно, є такі зміни параметрів динамічної системи, які позначаються на її структурі. В такому разі слід говорити вже про структурну стійкість, робастність. «Дивні» речі відбуваються, як інколи вважають, коли характеристичний поліном змінює свій степінь — чи в диференціальних задачах, чи в задачах на власні значення. Приміром, зведення системи n рівнянь першого порядку до одного рівняння n-го порядку із зниженням (втратою), проти очікуваного, порядку — звична справа. Відновлення (часткове чи повне) порядку отриманого зведеного рівняння унаслідок варіювання параметрів — також звична справа. Отримавши внаслідок перетворень нову структуру, до неї не можна ставитися так само як до старої, її треба сприймати по-новому. У разі втрати робастності, якщо один знак параметра ε варіації гарантує стійкість системи, то протилежний обов'язково засвідчує втрату стійкості. Часом структурна стійкість, робастність — надмірна вимога до системи, нестійкість може бути корисною, якщо сприятиме, приміром, керованості.

3. У разі зведення опису системи до вигляду нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку можливості втрати стійкості стають непомітними не тому, що перетворення були нееквівалентними, а тому, що ігнорується можливість варіювання порядку системи, а від-

так ставлення до первісної і вивідної систем є принципово різним. Система n рівнянь першого порядку є окремим/частковим (але не еквівалентним) випадком будь-якої відповідної їй (похідної від неї) системи $m<n$ рівнянь загалом того самого порядку n. Маніпуляції із системою $m<n$ рівнянь (різноманітні розхитування її) часто перенести на систему n рівнянь першого порядку безпосередньо неможливо. Аби розбудити (збурити) в системі її (можливо, прихований) вищий порядок необхідно в нормальній формі її відображення передбачити додаткові змінну й відповідне їй додаткове диференціальне рівняння (першого порядку, звісно). І взагалі, якщо степінь характеристичного полінома диференціального новотвору менший за порядок первісної диференціальної задачі, то існує можливість його «розворушити» так, що вищий (найвищий) порядок відновиться. До слова, рівняння регулятора — конкретизований перший інтеграл — є саме проявом ще одного можливого порядку системи, який нема сенсу ігнорувати.

Отож це неправда, що у разі зведення фізично змістовної системи диференціальних рівнянь до канонічної форми представлення губиться можливість розпізнати внутрішньо притаманну нестійкість. Дефект системи після акту зведення доведеться шукати у несвідомому налаштуванні не брати до уваги якесь одне з рівнянь опису, проігнорувати якусь змінну, загубити розмірність чи порядок системи.

4. Досліджувана тут проблема, без сумніву, є сутнісно алгебричною: визначальну роль відіграють аналіз особливостей суто алгебричного об'єкта, яким є характеристичний визначник, та суто алгебрична задача пошуку чи оцінювання його коренів (нулів); «вимірювання» стійкості розв'язків диференціальних рівнянь — це зазвичай аналіз алгебричних визначників, що правлять за критерії стійкості; оперування характеристичними числами фундаментальної системи розв'язків диференціальної задачі — примітивний акт функціонально-алгебричного аналізу; фундаментальну функцію, що є основою для побудови розв'язку диференціальної задачі, також визначають через розв'язки супутньої алгебричної задачі. Тож проблема цілком підпадає під так званий універсальний метод розв'язування задач Р. Декарта. Тобто вона є настільки простою, що ніде «сховатися» якимсь несподіванкам, які, чого приховувати, насправді дуже хотілося б надибати.

5. Увага тут зосереджена на лінійних рівняннях зі сталими коефіцієнтами, а отже ще існує надзвичайно широке поле пізнавальної активності щодо рівнянь іншого штибу — якщо проблема має сенс, звісно. А цього сенсу, як виглядає, не існує. До слова, в нелінійних системах, що зазвичай вичерпніше описують поведінку реального фізичного об'єкта, нестійкість необов'язково має супроводжуватись необмеженим зростанням змінних з часом. Але варіації параметрів і характеристик таки можуть призводити до аварій. Завжди цікаво, як виникає нестійке керування, що то за параметр, варіація якого провокує нестійкість, яка його фізична виражені́сть, як він виник й унаслідок чого, звідки взялася потрібна для прояву нестійкості енергія чи як виник ефект резонансності?

6. Перевірка на коректність будь-якої задачі у будь-якому формулюванні є обов'язковою. Навіть цілковитий збіг результатів розрахунку з результатами експерименту ще нічого не доводить: кількість експериментів завжди обмежена «розумною» кількістю дослідних варіацій параметра/параметрів. Відтак поряд з перевіреними експериментально можуть існувати (ховатись) такі значення параметрів, що збурюють властивості досліджуваного процесу до непізнаваності. А ще — звернімо увагу — можна висунути сумніви щодо того, що однорідна система справді є однорідною, а може вона лише «майже однорідна».

7. Серед науково значущих задач зустрічаються чи не однаково часто, як звичайні, так і не цілком коректні чи погано обумовлені. Саме ці другі, тому й незвичайні, що зустрічаються несподівано всюди на переднім краї наукових пошуків. Надзвичайно цікаво, коли вмотивована і така, що безпосередньо випливає із законів механіки й фізики математична модель досліджуваного об'єкта або явища, раптом виявляється некоректною. Такого штибу некоректність часом є ознакою нетривіальності. А часом вона — ознака модельної неадекватності. Алгоритми розв'язування звичайних і дослідження не цілком коректних задач ще якось осяжні. З погано обумовленими задачами — складніше, але вони часто значно цікавіші з огляду на можливості надибати дуже невловиму закономірність чи надзвичайну глибоку ідею. Але навряд чи поряд зі всім відомими — коректними й некоректними — класами задач математики, фізики, техніки слід передбачати третій клас «задач-перевертнів», що здатні змінювати свою коректність унаслідок еквівалентних перетворень, що супроводжують процес їх розв'язування.

Перелік літератури:

1. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. — Київ: Вища школа, 2004. — 528 с.

2. Гащук П., Зорій Л.-М. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. — Львів: Українські технології, 1999. — 372 с.

3. Тацій Р. М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Препринт № 2-94. — Львів: Академія наук України. Науково-навчальний центр математичного моделювання ІППММ, 1994. — 54 с.

4. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В., Власій О. О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. — Дрогобич: Коло, 2011. — 301 с.

5. Гащук П. Лінійні динамічні системи і звичайні диференціальні рівняння. — Львів: Українські технології, 2002. — 608 с.

6. Петров Ю. П., Петров Л. Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. — Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. — 240 с.

7. Петров Ю. П. Третий класс задач физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 1998. — 30 с.

8. Петров Ю. П., Сизиков В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. — Санкт-Петербург: Политехника, 2003. — 261 с.

9. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. — Москва: Факториал, 1988. — 176 с.

10. Сявавко М. Рибицька О. Математичне моделювання за умов невизначеності. — Львів: Українські технологіх, 2000. — 320 с.

11. Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркін Ю. І., Федін М. Г. Математика в поняттях, означеннях, термінах: В двох частинах. — Київ: Радянська школа, 1986. Ч. 1 — 384 с. Ч. 2 — 360 с.

12. Костарчук В. М., Хацет Б. І. Курс вищої алгебри. — Київ: Вища школа, 1969. — 540 с.

13. Васильєв Д. В., Чуїч В. Г. Системи автоматичного керування (приклади розрахунку). — Київ: Вища школа, 1972. — 364 с.

14. Петров Ю. П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости // Известия ВУЗ, Электромеханика, 1991, №11. — С. 106—108.

15. Петров Ю. П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика, 1994, № 11. С. 186—189.

16. Петров Ю. П. Предотвращение аварийности в системах управления // Известия ВУЗ, Электромеханика, 1994, № 1—2. С. 37—40.

17. Данилевич Я. Б., Петров Ю. П. О необходимости расширения понятия эквивалентности математических моделей // Доклады Академии наук, 2000, Т. 371, № 4. С. 473—475.

18. Петров Ю. П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. — Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004. — 192 с.

19. Кринецький І. І., Фокін О. В. Розрахунок інваріантних нелінійних автоматичних систем. — Київ: Техніка, 1970. — 188 с.

20. Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д. Построение систем программного движения. — Москва: Наука, 1971. — 352 с.

21. Кужель А. В. Математические импровизации. — Кыив: Вища школа, 1983. — 96 с.

22. Гащук П. М., Зорій І. Л. Динамічний аналіз лінійних моделей пружно-жорстких механічних систем. — Львів: Українські технології, 2005. — 320 с.

23. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва: Изд-во ИЛ, 1958. — 474 с.

24 Гащук П. М., Зорій І. Л. Метод часткової дискретизації в динаміці круглих мембран // Фізико-хімічна механіка матеріалів.— 2003.— Т. 39.— № 6.— С. 92 — 96.

25. Hashchuk P., Zorii I. Method of partial discretization in the dynamics of circular membranes // Materials Science. — 2003. — V. 39. — Issue 6. — P 869—876.

26. Чертков К. Г. Исследование чувствительности к погрешностям округления собственных значений линейных систем. Тула: Известия Тульского государственного университета, 2002. — С. 138—140.

27. Надеждин П. В. О потере грубости при элементарных преобразованиях дифференциальных уравнений управляемых систем // Автоматика и телемеханика, 1973, № 1. С. 185—187.

28. Волгин Л. Н. Применение теории полиномиального исчисления к задачам теории автоматического управления // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1987, № 6. С. 133—142.

References:

1. Vasylenko, M. and Aleksejchuk, O. (2004) Vibrations and Motion Stability Theory. Kyiv: Vyshcha Shkola, 528 p. (in Ukr.)

2. Hashchuk, P. and Zorii, K.-M. (1999) Linear models of the discretely-continuous mechanical systems. Lviv: Ukrainian Technologies, 372 p. (in Ukr.)

3. Tatsij, R. (1994) Generalized quasidifferential equations. Preprint No 2-94. Lviv: Ukrainian Academy of Science, 54 p. (in Ukr.)

4. Tatsij, R., Stasiuk, M., Mazurenko, V. and Vlasii, O. (2011) Generalized quasidifferential equations. Drohobych: Colo, 301 p. (in Ukr.)

5. Hashchuk, P. (2002) Linear dynamic systems and ordinary differential equations. Lviv: Ukrainian Technologies, 608 p. (in Ukr.)

6. Petrov, Yu. and Petrov, L. (2005) Unexpected in mathematics and his connection with failures and catastrophes. Saint Petersburg: BKhV-Petersburg, 240 p. (in Russ.)

7. Petrov, Yu. (1998) Third class of physics and techniques tasks — intermediate between correct and incorrect. Saint Petersburg: Saint Petersburg Universities' Publishing house, 30 p. (in Russ.)

8. Petrov, Yu. and Sizikov, V. (2003) Correct, incorrect and intermediate tasks with the applications. Saint Petersburg: Polytekhnyka, 261 p. (in Russ.)

9. Vasyljev, F. and Ivanitskij, A. (1988) Linear programming. Moscow: Factorial, 176 p. (in Russ.)

10. Siavavko, M., Rybytska, O. (2000) Mathematical modeling in the vagueness conditions. Lviv: Ukrainian Technologies, 320 p. (in Ukr.)

11. Manturov, O., Solntsev, Yu., Sorokin, Yu. and Fedin, M. (1986) Mathematics in concepts, determinations, terms: At two parts. Kyiv: Radjanska shkola, P. 1 — 384 p. P. 2 — 360 p. (in Ukr.)

12. Kostarchuk, V. and Khatset, B. (1969) Course of higher algebra. Kyiv: Vyshcha Shcola, 540 p. (in Ukr.)

13. Vasyljev, D. and Chujich, V. (1972) Automatic control systems (examples of calculation). Kyiv: Vyshcha Shcola, 364 p. (in Ukr.)

14. Petrov, Yu. (1991) *About the hidden dangers contained in the traditional methods of verification of stability*. Higher Institute Reports: Electromechanics, No 11. P. 106—108. (in Russ.)

15. Petrov, Yu. (1994) *Stability of the linear systems at variations of parameters*. Automatics and telemechanics, No 11. P. 186—189. (in Russ.)

16. Petrov, Yu. (1994) *Prevention of accident in the control systems*. Higher Institute Reports: Electromechanics, No 1—2. P. 37—40. (in Russ.)

17. Danilevich, Ya. and Petrov, Yu. (2000) *About the necessity of expansion of equivalence concept of mathematical models*. Reports of Science Academy, V. 371, No 4. P. 473—475. (in Russ.)

18. Petrov, Yu. (2004) New theory chapters of control and computers calculations. — Saint Petersburg: BKhV-Petersburg, 192 p. (in Russ.)

19. Krynetskyi, I. and Fokin, O. (1970) Calculation of an invariant nonlinear automatic systems. Kyiv: Technique, 188 p. (in Ukr.)

20. Galiullin, A., Mukhametzianov, I., Mukharliamov, R. and Furasov, V. (1971) Synthesis of the systems of programmatic motion. Moscow: Nauka, 352 p. (in Russ.)

21. Kuzhel, A. (1983) Mathematical improvisations. Kyiv: Vyshcha Shcola, 96 p. (in Russ.)

22. Hashchuk, P. and Zorii, I. (2005) Dynamic analysis of linear models of the resiliently-hard mechanical systems. Lviv: Ukrainian Technologies, 320 p. (in Ukr.)

23. Coddington E. A. and Levinson N. (1958) Theory of Ordinary Differential Equations. Moscow: IL Publishing House, 474 p. (in Russ.)

24. Hashchuk, P. and Zorii, I. (2003) *A partial discretization method in the circular membranes dynamics*. Fiziko-Khimichna Mekhanika Materialiv, V. 39. No 6. P. 92 — 96. (in Ukr.)

25. Hashchuk, P. and Zorii, I. (2003) *Method of partial discretization in the dynamics of circular membranes*. Materials Science. V. 39. Issue 6. P 869—876.

26. Chertkov K. (2002) *Research of sensitiveness at the rounding off errors of linear systems own values*. Tula: Reports of Tula University. P. 138—140. (in Russ.)

27. Nadezhdin P. (1973) *About the loss of rudeness at elementary transformations of differential equations of the controlling systems*. Automatics and telemechanics, No 1. P. 185—187. (in Russ.)

28. Volgin L. (1987) *Application of polynomial calculation theory to the tasks of automatic control theory*. Reports of USSR AN. Technical cybernetics, No 6. P. 133—142. (in Russ.)

L. P. Hashchuk, P. M. Hashchuk

ABOUT THE UNEXPECTED IN MATHIMATICS AND THE CAUSES OF ACCIDENTS/CATASTROPHES RELATED TO IT

Theoretical background. A number of researches claim that the classical theory of dynamic systems ignores special cases of incomplete equivalence of mathematic transformations descriptions. Sometimes it is even argued that (contrary to a prevailing paradigm) the study of purely discriminatory polynomial of control system (the system of differential equations) fails to guarantee the correct judgments about the parametrical stability and system's stability factors as the probably wrong interpretation of stability may result in accidents and even catastrophes caused by a defectively designed object. Such conclusion obviously ensues from the fact that there are examples of the systems that have the same discriminatory polynomial but differ substantially in the parametrical stability and stability factors under the vari-

able parameters. These researches are concerned about the fact that generally used packages of applied programs – for they usually require the equivalent in the classical sense consolidation of differential equations system to a single "standard" form – are not able to secure the veracity of dynamic systems computation and to guarantee the correctness of their characteristics analysis without the application of additional controlling subprograms. For example, there may exist the risks of stability losses in the initial system, however being brought to the differential equations of first order, as a common practice, these risk will become absolutely imperceptible, and, as a result, the source of dangerous casualties may occur – accidents and catastrophes in case of the system material embodiment. Thus it is categorically declared the necessity of substantial researches in correctness of the results of engineers and IT specialists and of relevant amendments of bachelors and masters degrees curriculum.

The purpose of the research. Thus, it is natural that there is a necessity to find out whether the previously imperceptible risks of accidents and catastrophes do exist and whether the classical dynamic systems theory does not take into consideration the unexpected possibilities of its problems correctness losses as a result (in the process) of their equivalent transformations. The aim of this article is to substantiate the essence and content of this kind "discoveries". The paper provides a comprehensive analysis of the system's simple examples that are to prove the possible risks from the equivalent, in classical sense, transformations of mathematical descriptions.

Results and discussion. It has been found out that after the equivalent transformations instability as well as incorrectness in fact do not "hide", they do not become invisible and untraceable. The researchers rather consciously do not pay attention to the possible substantial deformations of the system. For indeed, in case of the reduction of the system description to the form of the normal system of differential equations of first order the possibilities of the stability loss become invisible not because the transformations were nonequivalent but because the variability of the system order is not prognosticated, and, therefore, the treatments of initial (where the change of order is obvious) and final systems differ considerably. Here at, the controller equation — the defined first integral — is the manifestation of one more possible system order which cannot be ignored. Actually, much depends on how we define, see, read, interpret the analytical description of a certain phenomenon or process.

Different characteristic determinants that identify, materially, different dynamic systems may correspond to the same characteristic polynomial. The determinant may be consciously equivalently transformed (deformed), and any transformed (deformed) determinant will identify a new system. Thus, any transformation – is, without exaggeration, the creation of something new, something different.

The process of solving simple linear differential equations with fixed factor and their variation with the aim of solutions stability or analytical descriptions correctness evaluation is reduced to the solution of a relevant algebraic problem and the research of its properties and characteristics. Consequently, there is no point in expecting any enigmatic or dramatic unexpectancies when the research is sophisticated and profound.

Conclusions. The characteristic determinant reflects the properties of any system more deeply than the characteristic polynomial does. Any equivalent transformations of the system are always visible in the structure of the determinant, even if they are not defined in its equation roots (zeroes). In the result of equivalent transformations there certainly emerges a new formation – it looks like the same system but with new properties (otherwise there will be no necessity in any transformations). The loss of robustness is treated as an unexpectancy occurring as a result of motivated deformation of the system which is easy prognosticated. Nonrobust systems could have their own perspective. Their extensive application is advancing.

Key words: dynamic system, equivalent transformations, correctness of analytical description, system stability, system robustness, characteristic determinant, characteristic polynomial

***Науково-методична стаття**