

*А.П. Бочковський**Одеський національний політехнічний університет*

## РОЗРОБЛЕННЯ СТОХАСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКІВ ВИНИКНЕННЯ ПРОФЕСІЙНИХ НЕБЕЗПЕК

**Проблема.** Основним недоліком існуючих методів та моделей оцінювання ризиків в сфері охорони праці є нехтування динамічними характеристиками процесів випадкового гібридного впливу на працівника небезпечних та шкідливих виробничих факторів. Такі характеристики негативного впливу спостерігаються під час функціонування будь-яких реальних систем «людина – машина – середовище», отже повинні обов'язково враховуватись під час оцінки ризиків.

**Мета.** Розробка стохастичних моделей оцінювання ризиків виникнення професійних небезпек в системах «людина – машина – середовище».

**Методи досліджень.** Під час розробки стохастичних моделей оцінювання ризиків виникнення професійних небезпек застосовувались теорія марковських процесів, під час вирішення граничної задачі – метод фіктивних фаз Ерланга.

**Основні результати дослідження.** Для знаходження граничного розподілу ймовірностей випадкового процесу виникнення професійних небезпек в системах «людина – машина – середовище» виведено систему диференціальних рівнянь в частинних похідних і відповідних граничних умовах, що дає змогу визначити такі основні показники для оцінювання ризику виникнення професійних небезпек:

- ймовірність перевищення нормованих значень (гігієнічного нормативу) накопиченим негативним впливом шкідливого виробничого фактора;
- ймовірність того, що у випадковий період часу наслідки негативного впливу шкідливого виробничого фактора в організмі працівника будуть повністю відсутніми;
- ймовірність отримання виробничої травми працівником у випадковий період часу;
- середній рівень накопичування в організмі працівника негативного впливу дії шкідливого виробничого фактора тощо.

Підкреслено, що такі показники можуть бути використані в якості критеріїв, за умови впровадження зазначеного підходу оцінювання ризиків на державному рівні. Запропоновано метод вирішення граничної задачі для системи диференціальних рівнянь, що базується на перетворенні Лапласа для випадку ерлангівського розподілу робочих та неробочих періодів часу.

**Висновки та конкретні пропозиції.** Розроблено стохастичні моделі для оцінювання ризиків в системах «людина – машина – середовище», які дозволяють оцінити рівень ризику виникнення професійних небезпек за основними показниками, що характеризують рівень професійної безпеки. Розроблено метод вирішення граничної задачі для системи диференціальних рівнянь, що базується на перетворенні Лапласа для випадку ерлангівського розподілу робочих та неробочих періодів часу. Отримане рішення дає змогу знайти моменти ймовірнісного розподілу рівня накопичування негативного впливу: шкідливих виробничих факторів в організмі працівника, що дає можливість за допомогою нерівності Чебишева визначити нижню оцінку ймовірності перевищення рівня зазначеного негативного впливу гранично-допустимих (нормованих) значень. Надалі, практичний інтерес викликає розгляд випадкового процесу для випадків важкого травмування, коли працівникові потрібно тривалий час проходити лікування та реабілітацію від наслідків травми, що отримана під час відмови виробничого обладнання другого типу. Таке завдання вирішується в рамках запропонованого та представленого у проведеному дослідженні підходу.

**Ключові слова:** охорона праці, оцінювання ризиків, марковські процеси, система «людина – машина – середовище», професійні небезпеки

**Постановка проблеми.** Управління ризиками виникнення професійних небезпек є одним з основних завдань функціонування системи управління охороною праці, що має на меті досягнення та підтримку здорових і безпечних умов праці. Однак практична реалізація процесу управління ризиками в реальних умовах підприємств завжди є проблемною через недосконале методологічне забезпечен-

ня ключової процедури процесу управління – оцінювання ризиків. В першу чергу це стосується неврахування стохастичних характеристик динамічного впливу небезпечних і шкідливих виробничих факторів (НШВФ) на працівника у часі.

Згідно з рекомендаціями міжнародного стандарту ІЕС/ISO 31010:2009. «Керування ризиком. Методи загального оцінювання ризику», для оцінки ризику необхідно визначити

### Інформація про автора:

*Бочковський Андрій Петрович, канд. техн. наук, доцент  
кафедра управління системами безпеки життєдіяльності Одеського національного політехнічного університету  
e-mail: andrew.bochkovsky@gmail.com, ORCID <http://orcid.org/0000-0002-4166-3148>.*

ймовірність його реалізації у конкретну професійну небезпеку, а також важкість наслідків негативного впливу такої небезпеки на працівника.

В умовах функціонування систем «людина – машина – середовище» це є дуже складним завданням, оскільки характеристики негативного впливу потенційно небезпечних та шкідливих виробничих, а також зовнішніх факторів на стан безпеки працівника є завжди стохастичними у часі [1–4]. В даному випадку необхідно враховувати як випадкову інтенсивність у часі негативного впливу на працівника небезпечних та шкідливих виробничих, а також зовнішніх факторів, так і випадкову інтенсивність відновлення у часі його професійно-го здоров'я, від зазначеного негативного впливу.

Отже стохастичні процеси негативного впливу на працівника небезпечних, шкідливих виробничих та інших факторів потребують залучення до їх формалізованого опису апарату випадкових процесів.

**Аналіз останніх досліджень.** Проблеми управління ризиками розглядались, зокрема у таких дослідженнях [5–13].

Так у роботі [5] розроблено метод та надані результати щодо кількісної оцінки ризиків виникнення небезпек, що пов'язані з падінням предметів на працівника. Метод засновано на побудові п'яти логічних моделей оцінювання, що розглядають виробничі ситуації з урахуванням існуючих заходів з охорони праці. В рамках методу ризик визначається як ймовірність реалізації травм трьох ступенів важкості: незначних, тих що призводять до втрати працездатності та смертельних травм. Недоліками розроблених методу та моделей слід вважати обмеженість розгляду номенклатури можливих небезпечних подій та визначення параметрів побудови моделей на основі експертних оцінок, що є апіорі суб'єктивними, а також неможливість врахування стохастичних характеристик впливу на працівника негативних факторів.

У статті [6] на основі проведеного аналізу статистичних даних щодо структури та кількості випадків виробничого травматизму та професійних захворювань, розроблено модель оцінювання професійних ризиків. Зазначена модель передбачає встановлення оптимальних обсягів ресурсів, що необхідні для зниження рівня ризиків за визначеною номенклатурою ідентифікованих небезпек. Розробка моделі є розвитком таких відомих методів оцінювання ризиків, як IRISK та AVRIM. Недоліками моделі є її неуніверсальність, тобто проведення аналізу лише обмеженої номенклатури небезпечних подій, а також нехтування реальними характеристиками випадкового характеру впливу небезпечних та шкідливих виробничих факторів на людину.

Розробці теоретичних основ оцінювання ризиків в сфері охорони праці присвячено дослідження [7]. На основі проведеного аналізу відомих методів оцінювання ризиків визначені їх основні недоліки, які полягають у неможливості врахування динамічних характеристик впливу

НШВФ (небезпечних та шкідливих виробничих факторів) на працівника, що спостерігається протягом життєвого циклу функціонування систем «людина – машина – середовище». З метою усунення визначених недоліків, розроблено теоретичні основи для моніторингу та моделювання негативного впливу на працівника всіх можливих потенційних небезпек, що загрожують працівникові в рамках певного технологічного процесу. Перевагами цього дослідження є спроба створення теоретичних засад для можливості оцінки ризиків з урахуванням випадкового динамічного характеру їх впливу на працівника у часі. Однак, яким чином такий вплив буде врахований і із застосуванням якого математичного апарату можуть бути визначені кількісні характеристики професійної безпеки працівника з дослідження не відомо.

В дослідженні [8] запропоновано метод оцінки професійного ризику на основі побудови регресійних моделей, параметрами яких є статистичні дані щодо умов праці, віку працівника, його статі тощо. Зазначені моделі можуть використовуватися для оцінки індивідуального та групового ризику. Основним недоліком запропонованих моделей є нехтування стохастичними характеристиками виникнення та впливу небезпечних і шкідливих факторів на людину, а також відсутність можливості визначення одного з двох основних параметрів оцінки, а саме важкості наслідків реалізації певної небезпеки, що ставить під сумнів об'єктивність такого моделювання, оскільки ризик, відповідно до визначення, є комбінацією імовірності виникнення небезпеки та її важкості.

В роботі [9] розроблено метод оцінювання ризиків, на основі ймовірнісної моделі оцінювання групового професійного ризику. Суттю методу є визначення ймовірності виникнення небезпек за всіма потенційно можливими негативними факторами з урахуванням поведінкових особливостей працівника, характеристик його робочого місця, а також важкості наслідків реалізації небезпек за трьома критеріями. Недоліками методу є нехтування, під час оцінки, стохастичним характером впливу НШВФ на працівника та сталість критеріїв важкості наслідків. Тобто невідповідність таких критеріїв часові лікування та реабілітації працівника від наслідків дії небезпечних і шкідливих виробничих факторів. Окрім того, ще одним недоліком методу є його неуніверсальність, тобто можливість розгляду обмеженої номенклатури небезпек, що характерні лише для підприємств певної галузі.

В статті [10] представлено модель кількісної оцінки професійного ризику, за допомогою якої встановлюють залежність між ймовірністю виникнення небезпеки та умовами праці, а також індивідуальними поведінковими особливостями працівника. Тяжкість реалізації небезпеки розглядається як незначна подія, інвалідність та смертельний випадок. Модель також враховує параметри, які описують існуючі організаційно-технічні заходи безпеки на робочому місці, та можливі прояви

«людського фактора», що є її перевагою. Принцип побудови моделі базується на створенні діаграм можливих небезпечних ситуацій та їх впливів на працівника. Це є їх недоліком, оскільки застосований принцип моделювання ґрунтується не на застосуванні об'єктивних ймовірнісних математичних методів дослідження випадкових процесів, а на експертних оцінках, які не в змозі забезпечити об'єктивний результат.

У дослідженні [11] розроблено модель кількісної оцінки індивідуального або групового професійного ризику та відповідне програмне забезпечення, що дає змогу визначити ймовірність виникнення небезпек та їх тяжкість. Модель складається з 63 окремих моделей оцінки певних небезпек, параметрами яких є статистичні дані, що отримані шляхом аналізу причин виникнення нещасних випадків за визначений період часу. Недоліком зазначених моделей є обмеженість номенклатури НШВФ, щодо визначення рівнів професійного ризику, неможливість об'єктивного врахування ступеня важкості небезпечної події, а також розгляд лише статичного сценарію впливу на працівника небезпечних і шкідливих виробничих факторів, що не відповідає реальним умовам функціонування системи «людина – машина – середовище».

В статті [12] дослідниками побудовано моделі оцінювання ризиків, що базуються на визначені залежності між параметрами виробничого (офісного) середовища, проявами «людського фактора» в певних виробничих ситуаціях та існуючими організаційними заходами безпеки. Моделі побудовані за допомогою методів статистичного аналізу та не враховують гібридного характеру випадкового негативного впливу на працівника небезпечних і шкідливих виробничих факторів, отже не можуть надати об'єктивних результатів. Окрім того, обмеженість вибірки вхідних даних не дозволяє їх рекомендувати для оцінки ризику на підприємствах, в установах та організаціях за іншим галузевим спрямуванням.

В статті [13] розглянуто процеси оцінювання ризику виробничого травматизму. Моделі оцінювання побудовані на основі антропометричних параметрів тіла людини, з урахуванням можливих впливів небезпек на кожну частину тіла. Методологічною основою оцінювання є теорія нечітких множин, в рамках якої, однак, неможливо описати динаміку випадкового характеру впливу небезпечних і шкідливих виробничих факторів на людину. Окрім того, наступним основним недоліком методу є його громіздкість та непристосованість до оцінки ризику виникнення професійних захворювань.

Як видно з результатів аналізу, основним недоліком наявних методів та моделей оцінювання ризиків в сфері охорони праці є нехтування динамічними характеристиками процесів випадкового гібридного впливу на працівника НШВФ. Такі характеристики негативного впливу спостерігаються під час функціонування будь-яких реальних систем «людина – машина – середовище», отже

мають обов'язково враховуватись під час оцінки ризиків. Для математичного опису зазначених процесів доцільно використовувати спеціальний підклас марковських процесів – так звані марковські процеси зі знесенням. Зазначений тип марковських процесів є гнучким математичним апаратом для моделювання різноманітних реальних процесів в різних галузях науки [1].

**Метою досліджень** є розробка стохастичних моделей оцінювання ризиків виникнення професійних небезпек в системах «людина – машина – середовище».

Досягнути поставлену мету у роботі ми сподіваємося вирішивши такі завдання:

– визначити передумови побудови стохастичних моделей для оцінювання ризиків виникнення професійних небезпек в системах «людина – машина – середовище»;

– знайти граничний розподіл ймовірностей випадкового процесу впливу на працівника небезпечних та шкідливих виробничих факторів;

– розробити метод вирішення граничної задачі для системи диференціальних рівнянь з використанням розподілу Ерланга.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо реальний виробничий процес в рамках функціонування системи «людина – машина – середовище», коли працівник піддається випадковому негативному впливу НШВФ.

В якості передумови, будемо вважати, що протягом робочої зміни на працівника негативно впливає певний шкідливий виробничий фактор (ШВФ), що виникає під час експлуатації певної одиниці виробничого обладнання. В результаті цього, в організмі працівника накопичується негативний вплив зазначеного ШВФ. Також будемо вважати, що тривалість робочої зміни та неробочого часу є взаємно незалежними випадковими величинами з функціями розподілу  $A_0(t)$  та  $A_1(t)$  відповідно. Тобто зміни робочого та неробочого часу утворюють альтернуючий процес відновлення.

Протягом робочого часу виробниче обладнання виділяє в робочу зону певні шкідливі виробничі фактори з інтенсивністю  $W$ , які в свою чергу накопичуються в організмі працівника. Протягом неробочого часу негативний вплив ШВФ, видаляється з організму працівника – з інтенсивністю  $U < W$  [1]. Виробниче обладнання може відмовляти у випадкові моменти часу та відновлюватись протягом випадкового проміжку часу, причому з різними статистичними характеристиками у робочому та неробочому станах. При цьому будемо розглядати два типи відмов обладнання, а саме: перший тип, коли відмова обладнання не впливає на стан здоров'я працівника, та другий тип, коли будь-які відхилення від нормального режиму функціонування виробничого обладнання призводять до травмування працівника. У цьому випадку слід розглядати одночасно відмови виробничого обладнання двох видів – що не призвели та що призвели до травмування працівника. Протягом часу процесу

відновлення виробничого обладнання, після відмови першого типу, функціональні системи організму працівника відновлюються від наслідків негативного впливу шкідливих виробничих факторів, що виникали під час експлуатації відповідного обладнання. Таке відновлення відбувається з певною інтенсивністю  $U$  [1]. А під час лікування та реабілітації працівника, окрім його відновлення від отриманої травми, також відбувається відновлення функціональних систем його організму від негативного впливу шкідливих виробничих факторів, що виникали під час виконання ним посадових обов'язків. Таке відновлення відбувається з інтенсивністю  $U_l$ . Після завершення процедур лікування та реабілітації працівник знову приступає до виконання своїх посадових обов'язків.

Приймемо час безвідмовної роботи виробничого обладнання, як випадкову величину, що розподілена за експоненціальним законом, причому середнє напруження на відмову  $k$ -го виду в  $i$ -му періоді дорівнює  $\lambda_{ik}^{-1}$ . Час відновлення обладнання після настання відмови  $k$ -го виду в  $i$ -му періоді також вважаємо випадковою величиною, що розподілена за експоненціальним законом з середнім значенням  $\mu_{ik}^{-1}$ ,  $i = 0, 1$ ;  $k = 1, 2$ . З метою спрощення, приймемо, що час відновлення виробничого обладнання після відмови другого типу з великою ймовірністю більший ніж час лікування працівника від отриманої під час відмови травми. Такі випадки, згідно із статистичними даними щодо розслідувань нещасних випадків, є найбільш розповсюдженими, оскільки характеризують не важкі травми [14, 15]. Однак, за необхідності, застосування аналогічного підходу в рамках марковських процесів зі знесенням дозволяє розглядати і інші випадки, коли лікування та реабілітація працівника потребують значного часу, однак вирішення завдання в такому разі буде більш складним. Для формалізованого опису дослідного процесу введемо до розгляду такі позначення:

–  $\alpha(t)$  – змінна, що описує стан зайнятості працівника протягом робочої зміни ( $\alpha(t) = 1$ ) та у неробочий час ( $\alpha(t) = 0$ ) в момент  $t$ ;

–  $\gamma(t)$  – змінна, що описує стан працездатності виробничого обладнання та працівника.  $\gamma(t) = 0$ , якщо виробниче обладнання в момент  $t$  є справним, а працівник не травмований,  $\gamma(t) = 1$  якщо в момент часу  $t$  виробниче обладнання є непрацездатним, а працівник не травмований;  $\gamma(t) = 2$ , у разі відмови обладнання, що призвела до травмування працівника;

–  $\xi(t)$  – рівень накопичення негативного впливу шкідливого виробничого фактора в організмі працівника в момент часу  $t$ .

Завдання складається з того, щоб знайти розподіл випадкового вектора  $(\xi(t), \alpha(t), \gamma(t))$ . Цей процес не є марковським при довільних функціях розподілу  $A_i(t)$ ,  $i = 0, 1$ . Однак, якщо додати додат-

кову безперервну компоненту  $\eta(t)$  – час, що залишився від моменту  $t$ , до зміни стану альтернуючого процесу (процес, що описує зміну робочого та неробочого часу працівника), то процес стає марковським [1]. Отже, в рамках поставленого завдання, необхідно вивчити випадковий процес:

$$\Xi(t) = (\xi(t), \alpha(t), \gamma(t), \eta(t)). \quad (1)$$

Для більшої наочності опишемо детально можливі стани перших двох компонент зазначеного випадкового процесу, тобто  $(\alpha(t), \gamma(t))$ :

– (0,0) – час робочої зміни закінчено, інтенсивність виведення негативного впливу шкідливого виробничого фактора дорівнює  $U$ ;

– (0,1) – неробочий період, виробниче обладнання відмовило (відмова першого типу) та відновлюється, працівник не травмований, інтенсивність виведення негативного впливу шкідливого виробничого фактора дорівнює  $U$ ;

– (1,0) – час робочої зміни, обладнання працездатне, інтенсивність виведення негативного впливу шкідливого виробничого фактора дорівнює  $U$ ;

– (1,1) – час робочої зміни, виробниче обладнання відмовило (відмова першого типу), працівник не травмований, інтенсивність виведення негативного впливу шкідливого виробничого фактора дорівнює  $U$ ;

– (1,2) – час робочої зміни, виробниче обладнання відмовило (відмова другого типу), працівник травмований, інтенсивність виведення негативного впливу дії шкідливого виробничого фактора дорівнює  $U_l < U$ .

Для визначення граничного розподілу випадкового процесу  $\Xi(t) = (\xi(t), \alpha(t), \gamma(t), \eta(t))$  введемо такі щільності ймовірності для зазначеного випадкового процесу:

$$\begin{aligned} P\{\alpha(t) = i, \gamma(t) = k, \tau < \eta(t) < \tau + d\tau, x < \xi(t) < x + dx\} &= \\ = q_{ik}(x, \tau, t)(1 - A_i(\tau))d\tau dx, i = 0, 1; k = 0, 1, 2; x > 0, \tau > 0, \\ P\{\alpha(t) = 0, \gamma(t) = k, \tau < \eta(t) < \tau + d\tau, \xi(t) = 0\} &= \\ = q_{0k}^-(\tau, t)(1 - A_0(\tau))d\tau, \tau > 0, k = 0, 1, 2; \\ P\{\alpha(t) = 1, \gamma(t) = k, \tau < \eta(t) < \tau + d\tau, \xi(t) = 0\} &= \\ = q_{1k}^-(\tau, t)(1 - A_1(\tau))d\tau, k = 1, 2; \tau > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\tau$  – час, що пройшов з моменту початку робочої зміни (з початку не робочого періоду) до моменту  $t$ ;  $x$  – кількість шкідливих речовин в організмі працівника в момент часу  $t$ ;  $q$  – щільність ймовірності сумісного розподілу кількості шкідливих речовин та часу, що залишився до зміни альтернуючого процесу;  $i$  та  $k$  – дискретні змінні, що описують значення змінних  $\alpha$  та  $\gamma$  відповідно, в момент часу  $t$ .

Відповідний граничний розподіл задається наступними функціями:

$$\begin{aligned} q_{ik}(x, \tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} q_{ik}(x, \tau, t), i = 0, 1; k = 0, 1, 2, \\ q_{00}^-(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} q_{00}^-(\tau, t), \\ q_{0k}^-(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} q_{0k}^-(\tau, t), k = 0, 1, 2; \\ q_{1k}^-(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} q_{1k}^-(\tau, t), k = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Для функцій (3) стандартним методом можна вивести наступну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних [1]:

$$\begin{aligned} & \left(-U \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q_{00}(x, \tau) = \\ & = -\lambda_0 q_{00}(x, \tau) + \mu_{01} q_{01}(x, \tau) + \mu_{02} q_{02}(x, \tau), \\ & \left(-U \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q_{01}(x, \tau) = -\mu_{01} q_{01}(x, \tau) + \lambda_{01} q_{00}(x, \tau), \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(-U_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q_{02}(x, \tau) = \\ & = -\mu_{02} q_{02}(x, \tau) + \lambda_{02} q_{02}(x, \tau), \quad x > 0, \tau > 0, \end{aligned}$$

$$\left(V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q_{10}(x, \tau) =$$

$$= -\lambda_1 q_{10}(x, \tau) + \mu_{11} q_{11}(x, \tau) + \mu_{12} q_{12}(x, \tau),$$

$$\left(-U \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q_{11}(x, \tau) = -\mu_{11} q_{11}(x, \tau) + \lambda_{11} q_{10}(x, \tau), \quad (5)$$

$$\left(-U_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q_{12}(x, \tau) = -\mu_{12} q_{12}(x, \tau) + \lambda_{12} q_{10}(x, \tau),$$

$x > 0, \tau > 0$ , де  $U$  та  $U_i$  – інтенсивності виведення наслідків негативного впливу шкідливого виробничого фактора з організму нетравмованого та травмованого працівника відповідно;  $V = W - U$  – інтенсивність накопичування в організмі працівника негативного впливу шкідливих факторів;  $W$  – інтенсивність накопичування негативного впливу шкідливого виробничого фактора в організмі працівника;  $\lambda_{ik}$  – інтенсивність потоку відмов обладнання  $k$ -го виду в  $i$ -му періоді;  $\mu_{ik}$  – інтенсивності потоку відновлення працівника після відмови обладнання  $k$ -го виду в  $i$ -му періоді,  $i = 0, 1; k = 1, 2; \lambda_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2}, i = 0, 1$ .

Граничні умови для системи диференціальних рівнянь (3) та (4) виглядають таким чином. Для неробочого періоду часу:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} q_{00}^-(\tau) - U q_{00}(0, \tau) = -\lambda_0 q_{00}^-(\tau) + \mu_{01} q_{01}^-(\tau), \\ & \frac{d}{d\tau} q_{01}^-(\tau) - U q_{01}(0, \tau) = \lambda_0 q_{00}^-(\tau) - \mu_{01} q_{01}^-(\tau), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\tau} q_{02}^-(\tau) - U_1 q_{02}(0, \tau) = \lambda_{02} q_{00}^-(\tau) - \mu_{02} q_{02}^-(\tau),$$

Для періоду робочої зміни:

$$\frac{d}{d\tau} q_{11}^-(\tau) - U q_{11}(0, \tau) = -\mu_{11} q_{11}^-(\tau), \quad \tau > 0; \quad (7)$$

$$\frac{d}{d\tau} q_{12}^-(\tau) - U_1 q_{12}(0, \tau) = -\mu_{12} q_{12}^-(\tau), \quad \tau > 0;$$

Умови, що описують зміну робочого та неробочого періодів часу:

$$\begin{aligned} q_{00}(x, 0) &= \int_0^\infty q_{10}(x, \tau) dA_1(\tau), \\ q_{01}(x, 0) &= \int_0^\infty q_{11}(x, \tau) dA_1(\tau), \\ q_{02}(x, 0) &= \int_0^\infty q_{12}(x, \tau) dA_1(\tau), \quad (8) \end{aligned}$$

$$q_{10}(x, 0) = \int_0^\infty q_{00}(x, \tau) dA_0(\tau),$$

$$q_{11}(x, 0) = \int_0^\infty q_{01}(x, \tau) dA_0(\tau),$$

$$q_{12}(x, 0) = \int_0^\infty q_{02}(x, \tau) dA_0(\tau);$$

$$q_{01}^-(0) = \int_0^\infty q_{11}^-(\tau) dA_1(\tau),$$

$$q_{11}^-(0) = \int_0^\infty q_{01}^-(\tau) dA_0(\tau),$$

$$q_{12}^-(0) = \int_0^\infty q_{02}^-(\tau) dA_1(\tau), \quad (9)$$

$$q_{02}^-(0) = \int_0^\infty q_{12}^-(\tau) dA_1(\tau),$$

$$q_{00}^-(0) = 0.$$

Умова, що описує перехід зі стану, коли рівень негативного впливу шкідливого виробничого фактора дорівнює нулю, до стану, коли цей рівень починає зростати:

$$\begin{aligned} & V \int_0^\infty q_{10}(0, \tau) (1 - A_1(\tau)) d\tau = \mu_{11} \int_0^\infty q_{11}^-(\tau) (1 - A_1(\tau)) d\tau + \\ & + \mu_{12} \int_0^\infty q_{12}^-(\tau) (1 - A_1(\tau)) d\tau + \int_0^\infty q_{00}^-(\tau) dA_0(\tau); \quad (10) \end{aligned}$$

Умова нормування:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [(q_{00}^-(\tau) + q_{01}^-(\tau))(1 - A_0(\tau)) + (q_{11}^-(\tau) + q_{12}^-(\tau))(1 - A_1(\tau))] d\tau + \\ & + \int_0^\infty [(q_{00}(x, \tau) + q_{01}(x, \tau) + q_{02}(x, \tau))(1 - A_0(\tau)) + \\ & + (q_{10}(x, \tau) + q_{11}(x, \tau) + q_{12}(x, \tau))(1 - A_1(\tau))] dx d\tau = 1. \quad (11) \end{aligned}$$

В результаті вирішення граничної задачі (3) – (10), можна отримати низку основних показників, що характеризують рівень професійних небезпек. А саме:

1. Ймовірність перевищення накопичування негативного впливу дії шкідливого виробничого фактору нормованих значень  $\sigma$  (гігієнічного нормативу):

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\sigma [(q_{00}(x, \tau) + q_{01}(x, \tau) + q_{02}(x, \tau))(1 - A_0(\tau)) + \\ & + (q_{10}(x, \tau) + q_{11}(x, \tau) + q_{12}(x, \tau))(1 - A_1(\tau))] dx d\tau. \quad (12) \end{aligned}$$

2. Ймовірність того, що у випадковий період часу наслідки негативного впливу шкідливого виробничого фактора в організмі працівника будуть повністю відсутніми, тобто вираз:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (q_{00}^-(\tau) + q_{01}^-(\tau))(1 - A_0(\tau)) d\tau + \\ & + \int_0^\infty (q_{11}^-(\tau) + q_{12}^-(\tau))(1 - A_1(\tau)) d\tau. \quad (13) \end{aligned}$$

3. Ймовірність отримання виробничої травми працівником у випадковий період часу:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty q_{12}^-(\tau) (1 - A_1(\tau)) d\tau + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\sigma [q_{02}(x, \tau) (1 - A_0(\tau)) + q_{12}(x, \tau) (1 - A_1(\tau))] dx d\tau. \quad (14) \end{aligned}$$

4. Середній рівень накопичування в організмі працівника негативного впливу шкідливого виробничого фактора:

$$M\xi = \int_0^{\infty} x \int_0^{\infty} [(q_{00}(x, \tau) + q_{01}(x, \tau) + q_{02}(x, \tau))(1 - A_0(\tau)) + (q_{10}(x, \tau) + q_{11}(x, \tau) + q_{12}(x, \tau))(1 - A_1(\tau))] d\tau dx. \quad (15)$$

Зазначені показники можуть бути використані також в якості критеріїв, за умови впровадження зазначеного підходу оцінювання ризиків на державному рівні. В такому разі необхідно запроваджувати критерії ризику за галузевим спрямуванням, спираючись в якості критеріїв на відповідні показники кращих галузевих підприємств.

Вирішення граничної задачі (4) – (11) є складною математичною проблемою, тому при розробці алгоритму її вирішення прийнято такі припущення, які однак є коректними для реальних умов функціонування систем «людина – машина – середовище». А саме, будемо вважати, що:

– випадкові відмови виробничого обладнання, що продукує шкідливі виробничі фактори та його відновлення після відмов відбувається виключно у робочий період часу (під час робочої зміни). Іншими словами, будемо вважати, що параметри  $\mu_0 = 0, \lambda_0 = 0$ ;

– тривалість періодів робочої зміни та неробочого часу, що альтернують, розподілені за законом Ерланга одного і того ж порядку  $r \geq 1$ .

Зазначені припущення дозволять спростити математичну структуру завдання завдяки тому, що замість пошуку вирішення граничної задачі для системи диференційних рівнянь у частинних похідних можна буде знаходити відповідне рішення для системи звичайних диференційних рівнянь. Формально таке спрощення досягається завдяки використанню методу фіктивних фаз Ерланга [16].

Таким чином прийнято, що:

$$A_k(t) = 1 - e^{-a_k t} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(a_k t)^j}{j!}, k = 0, 1. \quad (16)$$

Окрім того, розподіл Ерланга має дуже важливу властивість для дослідної моделі. Оскільки, як відомо при  $r \rightarrow \infty, 1/a_k \rightarrow 0$  воно сходиться до виродженого розподілу, тобто тривалості робочої зміни та неробочого періоду часу прагнуть до постійних значень  $T_k$ , що відповідає реальним умовам функціонування систем «людина – машина – середовище», тобто:

$$r/a_k \rightarrow T_k, k = 0, 1.$$

Також, розподіл Ерланга (16) є розподілом суми  $r$  взаємно незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена за експоненціальним законом з одним і тим самим параметром  $a_k$ . Ця обставина дає можливість шляхом уведення фіктивних фаз звести немарковський процес до марковського.

Як приклад, розробимо метод вирішення граничної задачі для випадку впливу на працівника шкідливого виробничого фактора. Основна

система диференційних рівнянь та граничних умов для зазначеної задачі були виведені у попередньо проведеному дослідженні [1].

Щоб можна було користуватися властивостями розподілу Ерланга, введемо нову випадкову змінну  $v(t)$ , яка позначатиме номер поточної фази розподілу Ерланга. Таким чином вводимо до розгляду новий марковський процес:

$$\Xi_1(t) = (\xi(t), \alpha(t), \gamma(t), v(t)), \quad (17)$$

де всі інші змінні мають початковий сенс.

Відповідно введемо такі ймовірнісні характеристики процесу  $\Xi_1(t)$ :

$$P\{\alpha(t) = i, v(t) = j, \gamma(t) = k, x < \xi(t) < x + dx\} = q_{ijk}(x, t) dx, i = 0, 1; k = 0, 1; j = 0, 1, 2, \dots, r - 1; x > 0,$$

$$P\{\alpha(t) = 0, v(t) = j, \gamma(t) = k, \xi(t) = 0\} = p_{0,jk}^-(t),$$

$$P\{\alpha(t) = 1, v(t) = j, \gamma(t) = 1, \xi(t) = 0\} = p_{j1}^-(t), i = 0, 1; j = 0, 1, \dots, r - 1.$$

Нижче будемо розглядати наступний граничний розподіл введеного випадкового процесу, а саме:

$$q_{ijk}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_{ijk}(x, t),$$

$$i = 0, 1; k = 0, 1; j = 0, 1, 2, \dots, r - 1;$$

$$p_{0,jk}^- = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{0,jk}^-(t),$$

$$p_{ij1}^- = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij1}^-(t), i = 0, 1; j = 0, 1, \dots, r - 1.$$

Необхідно відмітити, що стан  $(\alpha(t) = 0, v(t) = j, \gamma(t) = 1, \xi(t) = 0)$  можливий з додатною ймовірністю  $p_{0,j1}^-$ , оскільки у неробочий період часу, виробниче обладнання, що відмовило в одному з попередніх періодів робочої зміни, може простоювати в очікуванні відновлення у наступних робочих періодах.

Введений марковський процес відноситься до класу марковських процесів зі знесенням. Отже, за допомогою стандартних ймовірнісних міркувань, що базуються на розгляді переходів марковського процесу з одного стану в інший за малий проміжок часу, а також застосування формули повної ймовірності для знаходження введених граничних щільностей ймовірності та ймовірностей (13), можна вивести наступну систему звичайних диференційних рівнянь:

$$-Uq'_{000}(x) = -a_0 q_{000}(x) + a_1 q_{1,r-1,0}(x),$$

$$-Uq'_{0,j0}(x) = -a_0 q_{0,j0}(x) + a_0 q_{0,j-1,0}(x), \quad (19)$$

$$j = 1, 2, \dots, r - 1,$$

$$-Uq'_{001}(x) = -a_0 q_{001}(x) + a_1 q_{1,r-1,1}(x),$$

$$-Uq'_{0,j1}(x) = -a_0 q_{0,j1}(x) + a_0 q_{0,j-1,1}(x), \quad (20)$$

$$j = 1, 2, \dots, r - 1,$$

$$-Uq'_{101}(x) = -(a_1 + \mu) q_{101}(x) + \lambda q_{100}(x) + a_0 q_{0,r-1,1}(x),$$

$$-Uq'_{1,j1}(x) = -(a_1 + \mu) q_{1,j1}(x) + \lambda q_{1,j0}(x) + a_1 q_{1,j-1,1}(x), \quad (21)$$

$$j = 1, 2, \dots, r - 1,$$

$$\begin{aligned}
 Vq'_{100}(x) &= -(a_1 + \lambda)q_{100}(x) + \mu q_{101}(x) + a_0 q_{0,r-1,0}(x), \\
 Vq'_{1j0}(x) &= -(a_1 + \lambda)q_{0j1}(x) + \mu q_{1j1}(x) + a_1 q_{1,j-1,0}(x), \quad (22) \\
 & j = 1, 2, \dots, r-1; x > 0.
 \end{aligned}$$

Відповідні граничні умови для системи диференціальних рівнянь (19–22) описують поведінку  $\Xi_1(t) = (\xi(t), \alpha(t), \gamma(t), v(t))$  поблизу нульового значення процесу накопичування негативного впливу від дії шкідливого виробничого фактора в організмі працівника  $\xi(t)$  та мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 -Uq_{001}(0) &= -a_0 p_{001}^- + a_1 p_{1,r-1,1}^-, \\
 -Uq_{101}(0) &= -(a_1 + \mu) p_{101}^- + a_0 p_{0,r-1,1}^-, \\
 -Uq_{1j1}(0) &= -(a_1 + \mu) p_{1j1}^- + a_1 p_{1,j-1,1}^-, \quad (23) \\
 -Uq_{0j1}(0) &= -a_0 p_{0j1}^- + a_0 p_{0,j-1,1}^-, \\
 -Uq_{0j0}(0) &= -a_0 p_{0j0}^- + a_0 p_{0,j-1,0}^-, \\
 Vq_{100}(0) &= a_0 p_{0,r-1,0}^- + \mu p_{101}^-, \\
 q_{1j0}(0) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, r-1. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Умови (22) описують входження марковського процесу в стан з нульовим рівнем накопичування негативного впливу шкідливого виробничого фактора в організмі працівника, а умови (24) – вихід з такого стану. Нарешті, умова нормування виглядає так:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{r-1} (p_{0j0}^- + p_{0j1}^- + p_{1j1}^-) + \\
 & = \sum_{j=0}^{r-1} \int_0^{\infty} (q_{0j0}(x) + q_{0j1}(x) + q_{1j1}(x) + q_{1j0}(x)) dx = 1. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Стандартний метод вирішення граничної задачі (19–25) базується на використанні перетворення Лапласа. Для її вирішення введемо такі умовні позначення:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} q_{ijk}(x) dx = q_{ijk}^*(s), \quad \text{Re } s \geq 0; \quad (26)$$

$$l, i = 0, 1; k = 0, 1; j = 0, 1, 2, \dots, r-1.$$

Застосувавши перетворення Лапласа до системи диференціальних рівнянь (19–22), використовуючи його відомі властивості, отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, відносно зображення (26):

$$\begin{aligned}
 (a_0 - Us)q_{000}^*(s) - a_1 q_{1,r-1,0}^*(s) &= -Uq_{000}(0) \\
 (a_0 - Us)q_{0j0}^*(s) - a_0 q_{0,j-1,0}^*(s) &= -Uq_{0j0}(0), \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, r-1,$$

$$\begin{aligned}
 (a_0 - Us)q_{001}^*(s) - a_1 q_{1,r-1,1}^*(s) &= -Uq_{001}(0) \\
 (a_0 - Us)q_{0j1}^*(s) - a_0 q_{0,j-1,1}^*(s) &= -Uq_{0j1}(0), \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, r-1,$$

$$(a_1 + \mu - Us)q_{101}^*(s) - a_0 q_{0,r-1,1}^*(s) - \lambda q_{100}^*(s) = -Uq_{101}(0)$$

$$(a_1 + \mu - Us)q_{1j1}^*(s) - a_1 q_{1,j-1,1}^*(s) - \lambda q_{1j0}^*(s) = -Uq_{1j1}(0), \quad (29)$$

$$j = 1, 2, \dots, r-1,$$

$$(a_1 + \lambda + Vs)q_{100}^*(s) - a_0 q_{0,r-1,0}^*(s) - \mu q_{101}^*(s) = Vq_{100}(0),$$

$$(a_1 + \lambda + Vs)q_{1j0}^*(s) - a_1 q_{1,j-1,0}^*(s) - \mu q_{1j1}^*(s) = Vq_{1j0}(0), \quad (30)$$

$$j = 1, 2, \dots, r-1.$$

Умова нормування (25) в нових позначеннях набуде такого вигляду:

$$\sum_{j=0}^{r-1} (p_{0j0}^- + p_{0j1}^- + p_{1j1}^- + q_{0j0}^*(0) + q_{0j1}^*(0) + q_{1j1}^*(0) + q_{1j0}^*(0)) = 1. \quad (31)$$

Отже із рівнянь (26) знаходимо:

$$q_{000}^*(s) = \frac{a_1}{a_0 - Us} q_{1,r-1,0}^*(s) - \frac{U}{a_0 - Us} q_{000}(0), \quad (32)$$

$$q_{0j0}^*(s) = \left(\frac{a_0}{a_0 - Us}\right)^j [q_{000}^*(s) - \frac{U}{a_0} \sum_{l=1}^j \left(\frac{a_0 - Us}{a_0}\right)^{l-1} q_{0l0}(0)], \quad (33)$$

$$j = 1, 2, \dots, r-1,$$

а з рівнянь (28), аналогічно отримуємо:

$$q_{001}^*(s) = \frac{a_1}{a_0 - Us} q_{1,r-1,1}^*(s) - \frac{U}{a_0 - Us} q_{001}(0), \quad (34)$$

$$q_{0j1}^*(s) = \left(\frac{a_0}{a_0 - Us}\right)^j [q_{001}^*(s) - \frac{U}{a_0} \sum_{l=1}^j \left(\frac{a_0 - Us}{a_0}\right)^{l-1} q_{0l1}(0)], \quad (35)$$

$$j = 1, 2, \dots, r-1.$$

Далі, з рівнянь (29) та (30) отримуємо таке рівняння в скінчених різницях 2-го порядку відносно функції  $q_{1j1}^*(s)$ ,  $j = 1, 2, \dots, r-1$ :

$$\begin{aligned}
 & q_{1j1}^*(s)[(a_0 + \lambda + Vs)(a_1 + \mu - Us) - \lambda\mu] - \\
 & - a_1 q_{1,j-1,1}^*(s)[2a_0 + \lambda + \mu + (V - U)s] + a_1^2 q_{1,j-2,1}^*(s) = \\
 & = \lambda V q_{1j0}(0) - U(a_0 + \lambda + Vs)q_{1j1}(0) + a_1 U q_{1,j-1,1}(0), \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$j = 2, \dots, r-1.$$

Виходячи з теорії різницевого рівняння, загальне рішення неоднорідного різницевого рівняння (35) має такий вигляд [17]:

$$q_{1j1}^*(s) = \frac{1}{x_2(s) - x_1(s)} \{ [x_1^j(s)x_2(s) - x_1(s)x_2^j(s)] q_{101}^*(s) + \quad (37)$$

$$+ [x_2^j(s) - x_1^j(s)] q_{111}^*(s) \} + Q_j(s), \quad j = 0, 1, \dots, r-1,$$

де  $x_{1,2}(s)$  – корені характеристичного квадратного рівняння для відповідного однорідного різницевого рівняння,  $Q_j(s)$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (31)

$$\delta(s)x^2 - a_1\beta(s)x + a_1^2 = 0,$$

причому:

$$x_{1,2}(s) = \frac{a_1}{2\delta(s)} \{ \beta(s) \pm \sqrt{(\beta(s))^2 - 4\delta(s)} \},$$

$$\beta(s) = 2a_0 + \lambda + \mu + (V - U)s;$$

$$\delta(s) = (a_0 + \lambda + Vs)(a_1 + \mu - Us) - \lambda\mu;$$

Методом математичної індукції можна показати, що

$$Q_j(s) = \frac{1}{(r-1)!(j-2)!} \frac{\partial^{j-2} \partial^{r-1}}{\partial z^{j-2} \partial y^{r-1}} \frac{\sum_{l=2}^{r+1} d_l(s) z^{l-2} y^{l-2}}{(1-y)[\delta(s) - zy a_1 \beta(s) + a_1^2 z^2 y^2]} \Big|_{z=y=0}, \quad (38)$$

$$j = 2, 3, \dots, r-1;$$

де

$$d_j(s) = Vq_{1j0}(0) - (a_0 + \lambda + Vs)Uq_{1j1}(0) / \lambda + a_1 Uq_{1,j-1,1}(0) / \lambda,$$

$$j = 1, 2, \dots, r-1.$$

Функції  $q_{1j0}^*(s), j = 1, 2, \dots, r-1$ , виражаються

через функції  $q_{1j1}^*(s)$  за допомогою співвідношення (див. (24)):

$$\lambda q_{1j0}^*(s) = -(a_1 + \mu - Us)q_{1j1}^*(s) - a_1 q_{1,j-1,1}^*(s) + Uq_{1j1}(0), \quad (39)$$

$$j = 1, 2, \dots, r-1.$$

Таким чином, для знаходження невідомих функцій

$$q_{000}^*(s), q_{001}^*(s), q_{100}^*(s), q_{101}^*(s), q_{111}^*(s) \quad (40)$$

знайдені всі необхідні рівняння (32), (34), (37)–(39). В результаті, функції (40) будуть виражені через невідомі поки що сталі

$$q_{1j0}(0), q_{1j1}(0), q_{1,j-1,1}(0), j = 1, 2, \dots, r-1,$$

які виражаються через ймовірності

$$P_{001}^-, P_{1,r-1,1}^-, P_{101}^-, P_{0,r-1,1}^-, P_{0,r-1,0}^-,$$

за допомогою граничних умов (23), (24). Останні ж ймовірності можуть бути знайдені за допомогою стандартного прийому, що часто використовується в прикладних ймовірнісних задачах, а саме за допомогою властивості аналітичності функцій (26) в правій півплощині комплексної площини. Ця умова в нашому випадку зводиться до одночасного перетворення в нуль чисельника та знаменника дробу (38) для декількох значень змінної  $s$  (нулів знаменника). Це дасть нам додаткові співвідношення для визначення шуканих сталих (разом з умовою нормування (31)).

Після знаходження шуканих щільностей ймовірності та ймовірностей станів дослідної системи, можна знайти необхідні нам показники, що характеризують негативний вплив шкідливих виробничих факторів на організм працівника.

Найбільшу зацікавленість викликає знаходження ймовірності того, що у випадковий період часу робочої зміни (виробниче обладнання працездатне) накопичення негативного впливу шкідливого виробничого фактора в організмі працівника не перевищить значень  $\sigma$ . В прийнятих позначеннях ця ймовірність буде дорівнювати

$$\int_0^{\sigma} \sum_{j=0}^{r-1} q_{1j0}(x) dx$$

Оскільки явні вирази для щільностей  $q_{1j0}(x), j = 0, 1, \dots, r-1$ , знайти дуже складно, як це

було видно з вищенаведених обчислень, можна скористатися оцінкою наведеної ймовірності за допомогою, наприклад, однієї з модифікацій нерівності Чебишева. Для цього необхідно знайти лише перші два моменти потрібного нам розподілу ймовірностей

$$F(x) = \int_0^x \sum_{j=0}^{r-1} q_{1j0}(u) du / \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{r-1} q_{1j0}(u) du$$

або в термінах перетворення Лапласа

$$sF^*(s) = \sum_{j=0}^{r-1} q_{1j0}^*(s) / \sum_{j=0}^{r-1} q_{1j0}^*(0)$$

Зазначені моменти вказаного розподілу обчислюються за формулами:

$$M_1 = -\frac{d}{ds} sF^*(s) \Big|_{s=0} = -\sum_{j=0}^{r-1} \frac{d}{ds} q_{1j0}^*(s) \Big|_{s=0} / \sum_{j=0}^{r-1} q_{1j0}^*(0),$$

$$M_2 = \frac{d^2}{ds^2} sF^*(s) \Big|_{s=0} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{d^2}{ds^2} q_{1j0}^*(s) \Big|_{s=0} / \sum_{j=0}^{r-1} q_{1j0}^*(0).$$

Скористаємось нерівністю Чебишева у такій формі [18]:

$$F(\sigma) \geq \frac{(M_1 - \sigma)^2}{(M_1 - \sigma)^2 + M_2 - M_1^2}. \quad (40)$$

Вираз  $F(\sigma)$  це ймовірність того, що рівень накопичування негативного впливу від дії шкідливого виробничого фактора в організмі працівника не перевищує гранично-допустимих (нормованих) значень. Остання нерівність дає нижню оцінку шуканої ймовірності. Аналогічним чином можна розробити алгоритм для вирішення більш складного граничного завдання для випадку комплексного впливу на працівника небезпечних та шкідливих виробничих факторів. У загальному випадку практична реалізація процесу оцінювання ризиків виникнення професійних небезпек для отримання необхідних кількісних результатів може бути здійснена шляхом чисельного рішення системи диференціальних рівнянь та граничних умов в просторі спеціальних пакетів комп'ютерних програм, наприклад Matlab.

За результатами проведених досліджень можна зробити такі **висновки**:

1. Визначені передумови побудови стохастичних моделей оцінки ризику виникнення професійних небезпек на основі дослідження реальних виробничих ситуацій. Встановлено, що завдання оцінювання ризиків зводиться до знаходження розподілу випадкового вектора зі змінними, що описують стан зайнятості працівника протягом часу, працездатності працівника і виробничого обладнання в певний момент часу, а



також рівень накопичування в організмі працівника негативного впливу шкідливих виробничих факторів протягом часу. Зазначено, що при введені додаткової компоненти, яка характеризує час, котрий залишився від моменту  $t$ , до зміни стану альтернуючого процесу, цей процес стає марковським. Визначено і наведено характеристики можливих станів марковського процесу для систем «людина – машина – середовище».

2. З метою знаходження граничного розподілу ймовірностей марковського процесу, який описує негативний вплив на працівника небезпечних і шкідливих виробничих факторів, виведено систему основних диференціальних рівнянь та граничних умов. За результатами вирішення граничної задачі розроблено стохастичні моделі для оцінювання ризиків виникнення професійних небезпек.

Розроблені моделі дозволяють оцінити рівень ризику виникнення професійних небезпек за такими показниками: ймовірністю перевищення нормованих значень (гігієнічного нормативу) накопичування негативного впливу дії шкідливого виробничого фактора; ймовірністю того, що у випадковий період часу наслідки негативного впливу шкідливого виробничого фактора в організмі працівника будуть повністю відсутніми; ймовірністю отримання виробничої травми працівником у випадковий період часу; середнім рівнем накопичування в організмі працівника негативного впливу шкідливого виробничого фактора тощо;

3. Розроблено метод вирішення граничної задачі для системи диференціальних рівнянь, що базується на перетворенні Лапласа для випадку ерлангівського розподілу робочих та неробочих періодів часу. Отримане рішення дозволяє знайти моменти ймовірнісного розподілу рівня накопичування негативного впливу шкідливих виробничих факторів в організмі працівника. Що надає можливість за допомогою нерівності Чебишева визначити нижню оцінку ймовірності перевищення рівня зазначеного негативного впливу гранично-допустимих (нормованих) значень.

#### Список літератури:

1. Бочковський А. П. Методологічні основи застосування марковських процесів для оцінювання ризиків в системах «людина-машина-середовище». *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*. Львів, 2018. №18. С. 88 – 95. doi: 10.32447/20784643.18.2018.09

2. Bochkovskyi A. P. Legal and organizational issues of improving the labor protection and industrial safety level at the Ukrainian enterprises. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2017. No 5 (161). P. 100 – 108. doi:10.13140/RG.2.2.33613.23528

3. Bochkovskii A. P. Development of the method for the optimal management of occupational risks. *Eastern-European Journal of Enterprise*

*Technologies*, 2018. No 3/3(93). P. 6 – 13. doi:10.15587/1729-4061.2018.132596

4. Bochkovskyi A. P. Actualization of the scientific principles elaboration on evaluating the risks of occupational danger occurrence. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2018. Vol. 6. P. 95 – 103. doi:10.29202/nvngu/2018/14

5. Aneziris O. N. Occupational risk quantification owing to falling objects. *Safety Science*, 2014. Vol. 69. P. 57 – 70. doi:10.1016/j.ssci.2014.02.017

6. Alea B. J. M. Quantifying occupational risk: The development of an occupational risk model. *Safety Science*, 2008. Vol. 46. Is. 2. P. 176 – 185. doi:10.1016/j.ssci.2007.02.001

7. Brocal F. Theoretical framework for the new and emerging occupational risk modeling and its monitoring through technology lifecycle of industrial processes. *Safety Science*, 2017. Vol. 99. Part B. P. 178 – 186. doi:10.1016/j.ssci.2016.10.016

8. Berkhout P. H. G. Estimating individual occupational risk using registration data. *Safety Science*, 2016. Vol. 82. – P. 95 – 102. doi:10.1016/j.ssci.2015.08.013

9. Aneziris O. N. Occupational risk for an onshore wind farm. *Safety Science*, 2016. Vol. 88. P. 188 – 198. doi:10.1016/j.ssci.2016.02.021

10. Papazoglou I. A. Quantitative occupational risk model: Single hazard. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017. Vol. 160. P. 162 – 173. doi:10.1016/j.ress.2016.12.010

11. Papazoglou I. A. Multi-hazard multi-person quantitative occupational risk model and risk management. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017. Vol. 167. P. 310 – 326. doi:10.1016/j.ress.2017.06.019

12. Ima Ilyani Ibrahim. Safety in the Office: Does It Matter to the Staff? *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2012. Vol. 50. P. 730 – 740. doi:10.1016/j.sbspro.2012.08.076

13. Debasish Majumder. Risk Analysis in Construction Sites Using Fuzzy Reasoning and Fuzzy Analytic Hierarchy Process. *Procedia Technology*, 2013. Vol. 10. P. 604 – 614. doi:10.1016/j.protcy.2013.12.401

14. Європейська агенція з безпеки та гігієни праці на робочому місці. URL: <https://osha.europa.eu/> (дата звернення: 18.04.2019 р.)

15. Аналіз страхових нещасних випадків та професійних захворювань в Україні. Фонд соціального страхування України. URL: <http://www.fssu.gov.ua/fse/control/main/uk/index> (дата звернення: 18.04.2019 р.)

16. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. Москва: КомКнига, 2005. 400 с.

17. Гельфанд А.О. Исчисление конечных разностей. Москва: Наука, 1967. 375 с.

18. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Москва: Мир, 1984. Т.2. 738 с.

## References:

1. Bochkovskiy A. P. (2018). Methodological basis for the use of Markov processed for risk assessment in systems «man-machine-environment». *Visnik Lvivskogo derzhavnogo universitetu bezpeki zhittediyalnosti*, 18, 88 – 95. doi: 10.32447/20784643.18.2018.09
2. Bochkovskiy, A. P., Sapozhnikova, N.Yu., Gogunskii, V. D. (2017). Legal and organizational issues of improving the labor protection and industrial safety level at the Ukrainian enterprises. *Scientific Bulletin of National Mining University*, 5 (161), 100-108. doi:10.13140/RG.2.2.33613.23528
3. Bochkovskii A. P., Gogunskii V. D. (2018). Development of the method for the optimal management of occupational risks. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3/3 (93), 6 – 13. doi:10.15587/1729-4061.2018.132596
4. Bochkovskiy A. P. (2018). Actualization of the scientific principles elaboration on evaluating the risks of occupational danger occurrence. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 6, 95 – 103. doi:10.29202/nvngu/2018/14
5. Aneziris O.N., Papazoglou I.A., Mud M. (2014). Occupational risk quantification owing to falling objects. *Safety Science*, 69, 57 – 70. doi:10.1016/j.ssci.2014.02.017
6. Alea B.J.M., Baksteen H., Bellamy L.J., Bloemhof A. (2008). Quantifying occupational risk: The development of an occupational risk model. *Safety Science*, 46 (2), 176 – 185. doi:10.1016/j.ssci.2007.02.001
7. Brocal F., Sebastián M.A., González C. (2017). Theoretical framework for the new and emerging occupational risk modeling and its monitoring through technology lifecycle of industrial processes. *Safety Science*, 99, B, 178 – 186. doi:10.1016/j.ssci.2016.10.016
8. Berkhout P.H.G., Damen M. (2016). Estimating individual occupational risk using registration data. *Safety Science*, 82, 95 – 102. doi:10.1016/j.ssci.2015.08.013
9. Aneziris O.N., Papazoglou I.A., Psinias A. (2016). Occupational risk for an onshore wind farm. *Safety Science*, 88, 188 – 198. doi:10.1016/j.ssci.2016.02.021
10. Papazoglou I.A., Aneziris O.N., Bellamy L.J., Ale B.J.M., Oh J. (2017). Quantitative occupational risk model: Single hazard. *Reliability Engineering & System Safety*, 160, 162 – 173. doi:10.1016/j.ress.2016.12.010
11. Papazoglou I.A., Aneziris O.N., Bellamy L.J., Ale B.J.M., Oh J. (2017). Multi-hazard multi-person quantitative occupational risk model and risk management. *Reliability Engineering & System Safety*, 167, 310 – 326. doi:10.1016/j.ress.2017.06.019
12. Ima Ilyani Ibrahim, Sarina Muhamad Noor, Noraini Nasirun, Zulaiha Ahmad (2012). Safety in the Office: Does It Matter to the Staff? *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 50, 730 – 740. doi:10.1016/j.sbspro.2012.08.076
13. Debasish Majumder, Joy Debnath, Animesh Biswas. (2013). Risk Analysis in Construction Sites Using Fuzzy Reasoning and Fuzzy Analytic Hierarchy Process *Procedia Technology*, 10, 604 – 614. doi:10.1016/j.protcy.2013.12.401
14. European Agency for Safety and Health at Work. Available at: <https://osha.europa.eu/>
15. Analysis of accident insurance and occupational diseases in Ukraine. Social Insurance Fund of Ukraine. Available at: <http://www.social.org.ua/activity/stat>
16. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. (2005). *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya*. [Introduction to queuing theory]. Moskva: KomKniga, 400 p.
17. Gelfand A.O. (1967). *Ischislenie konechnykh raznostey*. [Calculus of finite differences]. Moskva: Nauka. 375 p.
18. Feller V. (1984). *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya*. [Introduction to probability theory and its applications]. Moskva: Mir. T.2. 738 p.

A.P. Bochkovskiy

## DEVELOPMENT OF STOCHASTIC MODELS FOR OCCUPATIONAL HAZARDS RISK ASSESSMENT

**Introduction.** The main disadvantage of existing methods and models of risk assessment in the field of occupational safety is the failure to take into account the dynamic characteristics of the processes of random hybrid impact on the employee of hazardous and harmful production factors. Such negative impact characteristics are observed during the operation of any real "man-machine-environment" system, therefore, it is imperative to take into account the risk assessment.

**Purpose.** Development of stochastic models for assessing the risks of occupational hazards in the systems of "man-machine-environment".

**Methods** In the development of stochastic models for assessing the risks of occupational hazards, the theory of Markov processes was used, while the boundary problem was solved - the method of the Erlang fictitious phases.

**Results.** To find the limiting probability distribution of the random process of occupational dangers origin in systems "man-machine-environment", a system of differential equations in partial derivatives and corresponding limiting

conditions was derived, which made it possible to determine the following basic indicators for risks evaluation of occupational dangers origin:

- the probability of exceeding the normalized (hygiene standards) accumulation of negative influence of the harmful production factor;
- the probability that the effects of the negative influence on the employee of the harmful factor will be completely absent at a random period;
- the probability of employment injury by an employee at a random period;
- the average level of accumulation in employee of negative influence against the harmful production factor, etc.

It is emphasized that such indicators can be used as criteria, provided that approach of risks evaluation will be implemented at the state level. A method of solving the limited problem for a system of differential equations based on Laplace transformation for the case of the Erlang distribution of working and non-working periods is proposed.

**Conclusions.** Stochastic models for risk assessment in "human-machine-environment" systems are developed, which allow to estimate the level of risk of occupational hazards according to the basic indicators characterizing the level of occupational safety. A method of solving the boundary value problem for a system of differential equations based on Laplace transformation for the case of the Erlang distribution of working and non-working time periods is developed. The obtained solution allows to find the moments of probabilistic distribution of the level of accumulation of negative influence from the action of harmful production factors in the body of the worker. That gives the possibility of using Chebyshev's inequality to give a lower estimate of the probability of exceeding the level of the indicated negative influence of the maximum - admissible (normalized) values. In the future, the practical interest is the consideration of a random process for cases of serious injury, when the employee needs a long time to undergo treatment and rehabilitation from the consequences of injuries received during the failure of production equipment of the second type. This problem is solved within the framework of the proposed approach and presented in the study.

**Keywords** occupational safety and health, risk assessment, markov processes, "man-machine-environment" systems, occupational hazards