

*Р.М. Тацій, О.Ю. Пазен**(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)*

## ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМІ ДВОХ СФЕРИЧНИХ ТІЛ

Запропонована робота присвячена застосуванню прямого методу до дослідження процесів теплообміну в системі двох вкладених сферичних тіл – куля в сферичній оболонці. Припускається що між ними існує ідеальний тепловий контакт, а закон зміни температури зовнішньої поверхні є довільною функцією часу, та рівномірно розподілений по поверхні. Отже, ізотерми всередині цієї конструкції являють собою концентричні сфери, тобто задача є симетричною і в такій постановці розв'язана вперше. Для розв'язування такої задачі паралельно ставиться допоміжна задача про визначення розподілу нестационарного температурного поля у двошаровій порожнистій сферичній конструкції з «вилученою» кулею достатньо малого радіуса. При цьому умова симетрії вихідної задачі замінюється умовою другого роду на внутрішній поверхні цієї конструкції. Реалізація розв'язку допоміжної задачі проводиться шляхом застосування методу редукції із використанням концепції квазіпохідних. Надалі використовується схема Фур'є із застосуванням модифікованого методу власних функцій.

Для знаходження розв'язку вихідної задачі використано ідею граничного переходу шляхом прямування радіуса вилученої кулі до нуля. Встановлено, що при такому підході всі власні функції відповідної задачі на власні значення не мають особливостей в нулі, а це означає, що й розв'язки вихідної задачі є обмеженими у всій конструкції. Розв'язок цієї задачі при нульовій температурі на зовнішній поверхні збігається з відомим у літературі. Для ілюстрації запропонованого методу розв'язано модельний приклад про знаходження розподілу температурного поля у системі двох сферичних тіл з різними теплофізичними характеристиками матеріалів. Результати обчислень представлені у вигляді таблиці та об'ємного графіка зміни температури залежно від часу та просторової координати.

Узагальнення отриманих результатів на випадок будь-якої скінченної кількості сферичних оболонок є задачею суто технічною, а не принциповою. Зауважимо, що при цьому заміна крайової умови першого роду на будь-яку іншу крайову умову (наприклад, третього роду) не впливає на схему розв'язування аналогічно поставлених задач. Оскільки загальна схема дослідження розподілу температурних полів у багатошарових конструкціях з довільною кількістю шарів за умов наявності внутрішніх джерел тепла детально вивчена, то постановка та розв'язування таких задач для системи куля всередині багатошарової оболонки (конструкції) не викликає жодних труднощів.

**Ключові слова:** вкладені кулі, квазіпохідна, прямий метод, граничний перехід.

**Постановка проблеми.** Характерною особливістю елементів шаруватих конструкцій є поєднання різного роду механічних та теплофізичних характеристик шарів, що робить їх більш досконалими. Такі конструкції набули широкого застосування у різних галузях індустрії: будівництві, нафтогазовій, аерокосмічній, енергетичній та інших сферах. Проте, такий підхід зумовлює значні труднощі при розробці аналітичних методів їх дослідження.

**Аналіз відомих результатів досліджень.** Розв'язуванню проблеми теплообміну присвячені

численні публікації. Основні методи дослідження задач про визначення розподілу нестационарного температурного поля шаруватих конструкцій умовно поділяються на три види: а) прямі або класичні, які базуються на методі відокремлення змінних [1,2]; б) операційні, що використовують різного роду інтегральні перетворення [3,4]; в) наближені аналітичні та числові методи [5,6].

Так, зокрема, за останні роки в роботах [7,8] розглядаються багатошарові порожнисті циліндричні та сферичні конструкції. В основу цих

### Інформація про авторів:

*Тацій Роман Мар'янович, завідувач кафедри прикладної математики і механіки, д-р фіз.-мат. наук, професор, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*  
*roman.tatsiy@gmail.com.*

*Пазен Олег Юрійович, канд. техн. наук, докторант*  
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*  
*orazen@gmail.com*

публікацій покладено пряму (класичну) схему дослідження, що базується на методі редукції, концепції квазіпохідних, сучасній теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, модифікованому методі власних функцій Фур'є.

**Мета роботи.** Дослідити розподіл нестационарного температурного поля у системі – куля всередині сферичної оболонки (конструкції), коли на поверхні задано закон зміни температури, яка залежить від часу.

**1. Постановка вихідної задачі.** В початковий момент часу  $\tau = 0$ , куля радіусом  $r = r_0$  вкладається в іншу кулю радіусом  $r = r_1$  з однаковою початковою температурою  $T = T_0$ , яка збігається з температурою навколишнього середовища. Між кулями існує ідеальний тепловий контакт.

На зовнішній поверхні порожнистої кулі задано закон зміни температури  $\psi(\tau)$ . Необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля  $T(r, \tau)$  у будь-який момент часу  $\tau$  в системі цих двох сферичних тіл (рис.1).

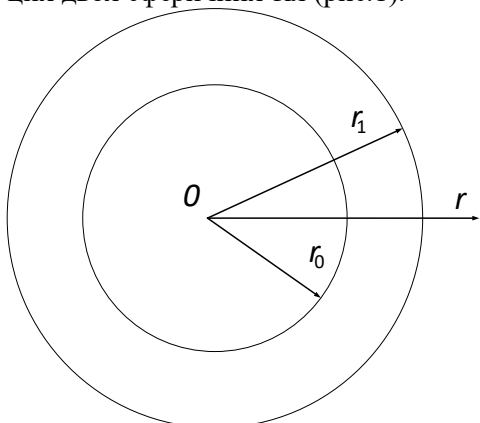


Рисунок 1 – Схема системи двох сферичних тіл (діаметральний переріз)

Вважається, що закон зміни температури  $\psi(\tau)$  рівномірно розподілений по поверхні кулі так, що ізотерми всередині цієї конструкції являють собою концентричні сфери. Це значить, що температура  $T(r, \tau)$  залежить лише від радіуса  $r$  та часу  $\tau$  і задача є симетричною.

Така постановка задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності [3]

$$c\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right),$$

$$r \in (0, r_1), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

з крайовою умовою

$$T(r_1, \tau) = \psi(\tau), \quad (2)$$

умовою симетрії

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(0, \tau) = 0, \quad (3)$$

та початковою умовою

$$T(r, 0) = T_0. \quad (4)$$

**2. Допоміжна задача.** У системі двох сферичних тіл «вилучимо» кулю радіусом  $r = \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < r_0$  та розглянемо мішану задачу теплопровідності для двошарової сферичної конструкції зображеної, на рис. 2.

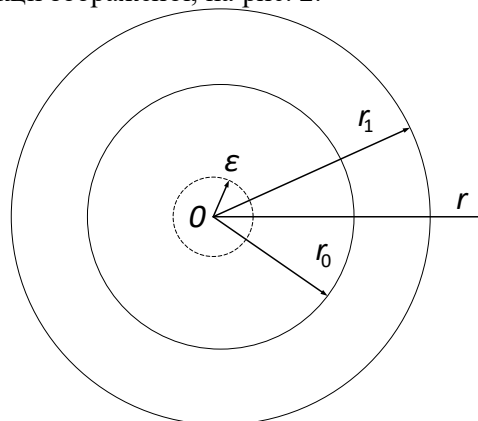


Рисунок 2 – Схема двошарової порожнистої сферичної конструкції

Нехай  $\theta_i$  – характеристична функція [7] на проміжках  $[\varepsilon, r_0)$  та  $[r_0, r_1]$ , тобто

$$\theta_0(r) = \begin{cases} 1, & r \in [\varepsilon, r_0), \\ 0, & r \notin [\varepsilon, r_0), \end{cases} \quad \theta_1(r) = \begin{cases} 1, & r \in [r_0, r_1], \\ 0, & r \notin [r_0, r_1]. \end{cases}$$

Позначимо  $\lambda(r) = \sum_{i=0}^1 \lambda_i \theta_i$ ,  $c(r)\rho(r) = \sum_{i=0}^1 c_i \rho_i \theta_i$ ,

$$\lambda_i > 0, \quad c_i \rho_i > 0, \quad \forall i = \overline{0, 1}, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i \in R.$$

Для знаходження розподілу нестационарного температурного поля у цій двошаровій порожнистій сферичній конструкції необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності [8]

$$c\rho \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right),$$

$$r \in (\varepsilon, r_1), \quad \tau > 0, \quad (5)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \lambda r^2 \frac{\partial t}{\partial r}(\varepsilon, \tau) = 0, \\ t(r_1, \tau) = \psi(\tau), \end{cases} \quad (6)$$

та початковою умовою

$$t(r, 0) = t_0. \quad (7)$$

Розв'язок задачі (5)-(7) шукатимемо за допомогою методу редукції [9,10]

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau), \quad (8)$$

де одна з функцій ( $u(r, \tau)$  або  $v(r, \tau)$ ) вибирається спеціальним чином, а інша вже визначається однозначно.

### 3. Крайова задача для $u(r, \tau)$ та мішана задача для $v(r, \tau)$

Введемо позначення  $r^2 \lambda u' \stackrel{df}{=} u^{[1]}$ . Визначимо функцію  $u(r, \tau)$  як розв'язок крайової (квазістаціонарної) задачі:

$$(r^2 \lambda u')'_r = 0, \quad (9)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u^{[1]}(\varepsilon) = 0, \\ u(r_1, \tau) = \psi(\tau), \end{cases} \quad (10)$$

Підставляючи (8) у рівняння (5), з урахування (9), послідовно отримуємо мішану задачу для функції  $v(r, \tau)$

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial}{\partial \tau}(u+v) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial}{\partial r}(u+v) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Rightarrow \quad (11) \\ \Rightarrow c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Оскільки крайові умови (10) для функції  $u(r, \tau)$  справджують крайові умови (6) для функції  $t(r, \tau)$ , отримаємо нульові крайові умови для визначення функції  $v(r, \tau)$ , тобто

$$\begin{cases} v^{[1]}(\varepsilon, \tau) = 0, \\ v(r_1, \tau) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

а початкова умова набуде вигляду

$$v(r, 0) = t_0 - u(r, 0) \equiv t_0. \quad (13)$$

### 4. Розв'язування крайової задачі (9), (10)

Введемо вектор  $\mathbf{u} = (u, u^{[1]})^T$  та матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Тоді квазідиференціальне рівняння (9) зводиться до розв'язування еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь 1-го порядку [11]}$$

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u} \quad (14)$$

Ввівши матриці  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  та

вектор  $\Gamma = (0, \psi(\tau))^T$ , крайові умов (10) запишемо у матричному вигляді

$$P \cdot \mathbf{u}(\varepsilon) + Q \cdot \mathbf{u}(r_1) = \Gamma,$$

Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$u(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

Фундаментальну систему розв'язків утворюють функції  $\left\{ 1; \frac{1}{r} \right\}$ .

Безпосередньою перевіркою переконаємось, що на кожному з проміжків  $[\varepsilon, r_0]$  та  $[r_0, r_1]$  матриці Коші  $B_0(r, s)$  та  $B_1(r, s)$  системи (14), відповідно, мають вигляд

$$B_0(r, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1(r, r_0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В роботі [11] встановлено, що на кожному з вказаних проміжків розв'язок задачі (9), (10) має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(r, \tau) &= B_0(r_0, \varepsilon) \cdot \mathbf{P}_0, \\ \mathbf{u}_1(r, \tau) &= B_1(r, r_0) \cdot B(r_0, \varepsilon) \cdot \mathbf{P}_0, \end{aligned}$$

де  $\mathbf{P}_0$  – початковий вектор.

Для визначення початкового вектора  $\mathbf{P}_0$  використаємо таку формулу

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= (P + Q \cdot B(r_1, \varepsilon))^{-1} \cdot \Gamma = \\ &= \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(\tau) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(\tau) \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Відповідно, розв'язок задачі (9), (10) на кожному з проміжків  $[\varepsilon, r_0]$  та  $[r_0, r_1]$  зображується так:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(r) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_1(r) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r_0} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Отже, розв'язок крайової задачі (9), (10)  $u(r, t) \equiv \psi(\tau)$ , тобто не залежить від радіуса  $r$ .

### 5. Розв'язування мішаної неоднорідної задачі для функції $v(r, \tau)$

Оскільки функція  $u(r, \tau)$  вже є відомою, то задача (11) для функції  $v(r, \tau)$  набуде вигляду

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \psi'(\tau), \quad (15)$$

з нульовими крайовими умовами (12) при початковій умові (13)

### 6. Метод Фур'є та задача на власні значення

Нетривіальні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (16)$$

з крайовими умовами (12) шукатимемо у вигляді [9]

$$v(r, \tau) = e^{-\omega \tau} \cdot R(r), \quad (17)$$

де  $\omega$  – параметр, а  $R(r)$  – невідома функція.

Підставляючи праву частину (17) у рівняння (16) отримуємо квазідиференціальне рівняння [8]

$$(r^2 \lambda R')' + \omega c \rho r^2 R = 0, \quad (18)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} R^{[1]}(\varepsilon) = 0, \\ R(r_1) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Задача (18), (19) є класичною задачею на власні значення, у якій необхідно знайти значення  $\omega_k$  (власні значення) при яких існують відповідні їм нетривіальні розв'язки  $R_k(r, \omega_k)$  (власні функції) задачі (18), (19). Як відомо [9], всі власні значення цієї задачі є додатними та різними.

### 7. Конструктивна побудова власних функцій

Ввівши квазіпохідну  $R^{[1]} \stackrel{df}{=} r^2 \lambda R'$ , вектор

$$\mathbf{R} = \left( R, R^{[1]} \right)^T \quad \text{та} \quad \text{матрицю}$$

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda(r)} \\ -\omega c(r) \rho(r) r^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{зведемо квазідиферен-$$

ціальне рівняння (18) до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} \mathbf{R}.$$

Відповідну систему на проміжках  $[\varepsilon, r_0]$  та  $[r_0, r_1]$  запишемо у вигляді

$$\mathbf{R}'_0 = A_0 \cdot \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{R}'_1 = A_1 \cdot \mathbf{R}_1, \quad (20)$$

з матрицями

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda_0} \\ -\omega c_0 \rho_0 r^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2 \lambda_1} \\ -\omega c_1 \rho_1 r^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння (18) можна переписати у вигляді

$$(r^2 R')' + \beta_i^2 r^2 R = 0,$$

де позначено  $\beta_i = \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}} \quad i=0,1.$

У роботі [8] встановлено, що матриця Коші системи (20) має вигляд

$$B_i(r, s, \omega) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{pmatrix}$$

де позначено

$$b_{11}^i = \frac{\beta_i s \cos(\beta_i(r-s)) + \sin(\beta_i(r-s))}{\beta_i r};$$

$$b_{12}^i = \frac{\sin(\beta_i \cdot (r-s))}{\lambda_i \beta_i r s};$$

$$b_{21}^i = \frac{\beta_i \cos(\beta_i \cdot (r-s)) [r-s] - \sin(\beta_i(r-s)) [1 + \beta_i^2 r s]}{\beta_i} \lambda_i$$

$$b_{22}^i = \frac{\beta_i r \cos(\beta_i(r-s)) - \sin(\beta_i(r-s))}{\beta_i s}; \quad i=0,1.$$

Нетривіальні розв'язки  $\mathbf{R}(r, \omega)$  системи (20) шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{R}(r, \omega) = B(r, \varepsilon, \omega) \cdot \mathbf{C}, \quad (21)$$

де

$$B(r, \varepsilon, \omega) = B_0(r, \varepsilon, \omega) \Theta_0 + B_1(r, r_0, \omega) B_0(r_0, \varepsilon, \omega) \Theta_1$$

а  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$  – деякий ненульовий вектор.

Застосувавши до рівності (21) крайові умови (19) (при  $\Gamma(\tau) \equiv \mathbf{0}$ ), отримуємо

$$P \cdot \mathbf{R}(\varepsilon, \omega) + Q \cdot \mathbf{R}(r_1, \omega) = \left[ P \cdot B(\varepsilon, \varepsilon, \omega) + Q \cdot B(r_1, \varepsilon, \omega) \right] \cdot \mathbf{C} = 0,$$

Оскільки  $B(\varepsilon, \varepsilon, \omega) = E$ , де  $E$  – одинична матриця, приходимо до рівності

$$\left[ P + Q \cdot B(r_1, \varepsilon, \omega) \right] \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (22)$$

Для існування нетривіального вектора  $\mathbf{C}$  у (22) необхідно та достатньо щоб виконувалась така умова

$$\det \left[ P + Q \cdot B(r_1, \varepsilon, \omega) \right] = 0. \quad (23)$$

Рівняння (23) – характеристичне рівняння задачі на власні значення (18), (19).

$$\begin{aligned} \det [P + Q \cdot B(r_1, \varepsilon, \omega)] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \det [P + Q \cdot B_1(r_1, r_0, \omega) \cdot B_0(r_0, \varepsilon, \omega)] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \det \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 \end{pmatrix} \right] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \det \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{11}^1 b_{11}^0 + b_{12}^1 b_{21}^0 & b_{11}^1 b_{12}^0 + b_{12}^1 b_{22}^0 \end{pmatrix} \right] &= \\ = 0 \Rightarrow b_{11}^1 b_{11}^0 + b_{12}^1 b_{21}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} b_{11}^1 \cdot \frac{\beta_0 \varepsilon \cos(\beta_0(r_0 - \varepsilon)) + \sin(\beta_0(r_0 - \varepsilon))}{\beta_0 r_0} + \\ + b_{12}^1 \cdot \frac{\beta_0 \cos(\beta_0 \cdot (r_0 - \varepsilon)) [r_0 - \varepsilon] - \sin(\beta_0(r_0 - \varepsilon)) [1 + \beta_0^2 r_0 \varepsilon]}{\beta_0} \cdot \lambda_0 = 0 \end{aligned}$$

Для знаходження нетривіального вектора  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$  покладемо у рівність (22)  $\omega_k$  замість  $\omega$ . Використавши позначення (24) прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{11}^1 b_{11}^0 + b_{12}^1 b_{21}^0 & b_{11}^1 b_{12}^0 + b_{12}^1 b_{22}^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ (b_{11}^1 b_{11}^0 + b_{12}^1 b_{21}^0) C_1 + (b_{11}^1 b_{12}^0 + b_{12}^1 b_{22}^0) C_2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи дорівнює нулю, то одне з рівнянь (наприклад друге) можна відкинути.

Звідси випливає, що  $C_2 = 0$  при будь-якому ненульовому значенні  $C_1$ . Поклавши, наприклад,  $C_1 = 1$ , отримуємо, що нетривіальний вектор  $\mathbf{C}$  можна записати у вигляді:

$$\mathbf{C} = (1, 0)^T.$$

Нетривіальний розв'язок відповідної до (18) системи тоді запишеться у вигляді

$$\mathbf{R}_k(r, \omega_k) = \tilde{B}(r, \varepsilon, \omega) \cdot (1, 0)^T \stackrel{df}{=} \mathbf{R}_{k0} \Theta_0 + \mathbf{R}_{k1} \Theta_1,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

На проміжках  $[\varepsilon, r_0)$  та  $[r_0, r_1]$  власні вектори мають вигляд

$$\mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, \varepsilon, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = (b_{11}^0, b_{21}^0)^T,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k1}(r, \omega_k) &= \tilde{B}_1(r, r_0, \omega_k) \cdot \tilde{B}_0(r_0, \varepsilon, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = \\ &= \tilde{B}_1(r, r_0, \omega_k) (b_{11}^0, b_{21}^0)^T. \end{aligned} \quad (25)$$

## 8. Розвинення за власними функціями

Нехай  $g(r)$  – кусково-неперервна функція, що має різні аналітичні вирази на проміжках  $[\varepsilon, r_0)$  та  $[r_0, r_1]$ , тобто має вигляд

$$g(r) = \sum_{i=1}^n g_i \theta_i.$$

Розвинення функції  $g(r)$  в ряд Фур'є за власними функціями  $R_k(r, \omega_k)$  задачі (18), (19) має вигляд [12]

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot R_k(r, \omega_k),$$

де коефіцієнти Фур'є  $g_k$  обчислюються за формулою

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{\|R_k\|^2} \int_{\varepsilon}^{r_1} c \rho g(r) R_k(r, \omega_k) r^2 dr = \\ &= \frac{1}{\|R_k\|^2} \left( c_0 \rho_0 \int_{\varepsilon}^{r_0} g_0(r) R_{k0}(r, \omega_k) r^2 dr + c_1 \rho_1 \int_{r_0}^{r_1} g_1(r) R_{k1}(r, \omega_k) r^2 dr \right). \end{aligned}$$

Зуважимо, що  $\|R_k\|^2$  – квадрат норми власних функцій  $R_k$

$$\|R_k\|^2 = \int_{\varepsilon}^{r_1} c \rho r^2 R_k^2(r, \omega_k) dr =$$

$$= c_0 \rho_0 \int_{\varepsilon}^{r_0} R_{k0}^2(r, \omega_k) r^2 dr + c_1 \rho_1 \int_{r_0}^{r_1} R_{k1}^2(r, \omega_k) r^2 dr.$$

## 9. Побудова розв'язку $v(r, \tau)$ мішаної задачі (15), (12), (13)

Схема побудови розв'язку цієї задачі методом власних функцій детально описана в роботах [7-8, 11-13]. Цей розв'язок зображується у такому вигляді:

$$\begin{aligned} v(r, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_k(r, \omega_k) = \\ &= \sum_{i=0}^1 v_i(r, \tau) \cdot \theta_i, \end{aligned}$$

$$v_i(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k),$$

де  $f_k$  та  $u_k$  коефіцієнти розвинення початкової умови та функції  $\psi(\tau)$  відповідно в ряди Фур'є за системою власних функцій  $R_k(r, \omega_k)$ .

## 10. Граничний перехід при $\varepsilon \rightarrow 0$ та зображення розв'язку вихідної задачі (1)-(4)

На основі методу редукції розв'язок вихідної задачі зображується у вигляді

$$\begin{aligned} T(r, \tau) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u(r, \tau) + v(r, \tau)) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \psi(\tau) + \sum_{i=0}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_{ki} \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_{ki}(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k) \Theta_i \right). \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння (24) задачі на власні значення (18), (19) після граничного переходу, очевидно, матиме вигляд

$$b_{11}^1 \cdot \frac{\sin(\beta_0(r_0))}{\beta_0 r_0} + b_{12}^1 \cdot \frac{\beta_0 r_0 \cos(\beta_0 \cdot r_0) - \sin(\beta_0 r_0)}{\beta_0} \cdot \lambda_0 = 0,$$

а відповідні власні вектори (25) зобразяться так:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) &= \tilde{B}_0(r, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T = \\ &= \left( \frac{\sin(\beta_0 r)}{\beta_0 r}, \frac{\beta_0 r \cos(\beta_0 \cdot r) - \sin(\beta_0 r)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T, \\ \mathbf{R}_{k1}(r, \omega_k) &= \tilde{B}_1(r, r_0, \omega) \cdot \tilde{B}_0(r_0, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T = \\ &= \tilde{B}_1(r, r_0, \omega) \left( \frac{\sin(\beta_0 r_0)}{\beta_0 r_0}, \frac{\beta_0 r_0 \cos(\beta_0 \cdot r_0) - \sin(\beta_0 r_0)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T. \end{aligned}$$

Зауваження:

1.  $\mathbf{R}_{k0}(0, \omega_k) = (1, 0)^T$ .
2. В роботі [1] розглядається варіант  $\psi(\tau) \equiv 0$ . У такому випадку коефіцієнти розвинення цієї функції в ряд Фур'є  $u_k = 0$  та  $\int_0^\tau e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds = 0 \quad \forall k$ .
3. Якщо значення функцій  $t(r, 0)$  та  $\psi(0)$  збігаються то коефіцієнти Фур'є розвинення початкової умови  $f_k = 0$  та  $f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} = 0 \quad \forall k$ .
4. При граничному переході  $\varepsilon \rightarrow 0$ , перша з крайових умов (6) перетворюється на умову симетрії (3).

## 11. Модельний приклад

У якості модельного числового прикладу розглянемо систему двох ізотропних сферичних куль, для яких необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля. Теплофізичні характеристики матеріалів, з яких виготовлені кулі, та вихідні дані для розрахунку, наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Теплофізичні характеристики

Параметр	Шар 1	Шар 2
Радіус $r$ , м	$r_0 = 0,2$	$r_1 = 0,3$
Коефіцієнт теплопровідності $\lambda$ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$	2,5	58
Питома масова теплоємність $c$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$	840	470
Густина $\rho$ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	2200	7800
Початкова температура $t(r, 0)$ , $^\circ\text{C}$	20	20
Закон зміни температури поверхні, $\psi(\tau)$ , $^\circ\text{C}$	$\psi(\tau) = 345 \lg\left(\frac{8\tau}{60} + 1\right) + 20$	

Використавши запропонований метод розрахунку розподілу нестационарного температурного поля у системі двох сферичних тіл та програмне забезпечення Maple 13 [13], отримуємо розв'язок поставленої задачі у вигляді графіка (рис. 3) і таблиці 2. Слід зауважити, що для одержання результату із заданою точністю при обчисленні було використано перших 50 коренів характеристичного рівняння.

Слід зауважити, що поставлена задача є модельною, а метою її є ілюстрація можливостей запропонованого методу.

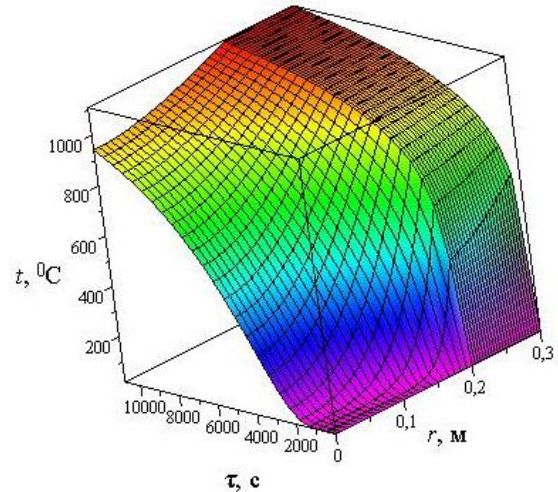


Рисунок 3 – Розподіл нестационарного температурного поля у системі двох сферичних тіл

Таблиця 2

Розподіл температурного поля у системі двох сферичних тіл,  $^\circ\text{C}$

час	Координати шару, м						
	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
0 хв	20	20	20	20	20	20	20
1 хв	20	20	20	20	27,2	82,4	349,2
3 хв	20	20	20	20,2	156,5	266,8	502,3
10 хв	20	20	21,9	79,1	523,6	583,9	678,4
20 хв	21,5	25,9	65,9	254,3	707,9	739,2	781,4
30 хв	40,3	61,1	156,7	399,9	792,5	814,4	841,8
45 хв	129,5	171,5	310,1	556,3	868,7	884	902,3
1 год	261,4	308,8	449,6	668,2	919,8	931,6	945,3
2 год	714	741	815,9	922,1	1037,1	1042,6	1049
3 год	941,1	954,2	990,6	1043,3	1102,8	1105,8	1109,7

## Висновки

1. До розв'язування вихідної задачі застосовано прямий метод, причому вперше використано ідею граничного переходу.

2. У загальній постановці (функція  $\psi(\tau)$  вважається довільною), таку задачу розв'язано вперше.

3. У випадку  $\psi(\tau) \equiv 0$  отриманий розв'язок збігається з відомим [3].

4. Узагальнення отриманих результатів на випадок будь-якої скінченної кількості вкладених куль є задачею суто технічною, а не принциповою.

#### Список літератури:

1. Singh, Suneet, and Prashant K. Jain. "Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere." *Journal of Heat Transfer* 138.10 (2016): 101301. DOI: 10.1115/1.4033536.

2. De Monte, Filippo. "Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46.8 (2003): 1455-1469.

3. Лыков А.В. Теория теплопроводности/ А.В. Лыков –М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

4. Siegel R. "Transient thermal analysis of parallel translucent layers by using Green's functions" *J. Thermophys. Heat Transfer (AIAA)*. Vol. 13, Issue 1, pp. 10–17, 1999.

5. Özişik M. N., Orlande H. R. B., Colaço M. J., Cotta R. M. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, Second Edition. New York: CRC Press, 2017. 580 p.

6. Gosz M. R. *Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer*. – New York: CRC Press, 2017. – 400 p.

7. O. Y. Pazen and R. M. Tatsii, General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 89, no. 2, pp. 357-368, March 2016. DOI:<https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>.

8. Тацій Р.М. Прямой метод расчета температурного поля в многослойной полой сферической конструкции / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, О.Ю. Пазен // Вестник Кокшетауского технического института: Кокшетау: КТИКЧСМВД Республики Казахстан, 2018. – № 1(29). – С.9-20.

9. Арсенин В.Я. Методы математической физики / В.Я. Арсенин –М.: Наука, 1974. – 432 с.

10. Тихонов А.Н., Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский – М.: Наука, 1977. – 735 с.

11. Тацій Р. М. Прямий метод розрахунку нестационарного температурного поля за умов пожежі / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека : Зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2015. – № 26. – С. 135-141.

12. Тацій Р. М. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталіми коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла / Р. М. Тацій, Т. І. Ушак, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека : Зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2015. – № 27. – С. 120-126.

13. O. Y. Pazen "Mathematical modelling and computer simulation of direct method for studying

boundary value problem of thermal conductivity" *Problems of Infocommunications. Science and Technology*, pp. 73-76. 2017. DOI:10.1109/INFOCOMMST.2017.8246353.

#### Reference:

1. Singh, Suneet, and Prashant K. Jain. "Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere." *Journal of Heat Transfer* 138.10 (2016): 101301. DOI: 10.1115/1.4033536.

2. De Monte, Filippo. "Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46.8 (2003): 1455-1469.

3. Lykov, A.V. (1967) *Teoriia teploprovodnosti [The theory of heat conduction]*, Vysshiaia shkola, Moscow, USSR.

4. Siegel R. "Transient thermal analysis of parallel translucent layers by using Green's functions" *J. Thermophys. Heat Transfer (AIAA)*. Vol. 13, Issue 1, pp. 10–17, 1999.

5. Özişik M. N., Orlande H. R. B., Colaço M. J., Cotta R. M. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, Second Edition. New York: CRC Press, 2017. 580 p.

6. Gosz M. R. *Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer*. – New York: CRC Press, 2017. – 400 p.

7. O. Y. Pazen and R. M. Tatsii, General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 89, no. 2, pp. 357-368, March 2016. DOI:<https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>.

8. Tatsiy R.M. Pryamoy metod rascheta temperaturnogo polya v mnogosloynoy poloy sfericheskoy konstruktсии [Direct method for calculating the temperature field in a multilayer hollow spherical structure] / R.M. Tatsiy, M.F. Stasyuk, O.YU. Pazen // *Vestnik Kokshetauskogo tekhnicheskogo instituta: Kokshetau: KTIKCHSMVD Respubliki Kazakhstan*, 2018. – № 1(29). – S.9-20.

9. Arsenin, V.Ya. (1974) *Metody matematicheskoi fizyky [Methods of Mathematical physics]*, Nauka, Moscow, USSR.

10. Tihonov, A.N. and Samarskii, A.A. (1977) *Urvnenie matematicheskoi fizyky [Mathematical physics equation]* Nauka, Moscow, USSR.

11. Tatsiy R. M. Pryamyi metod rozrakhunku nestatsionarnoho temperaturnogo polya za umov pozhzhi [Direct method of calculation unsteady temperature field in a fire] / R. M. Tatsiy, O. Yu. Pazen // *Pozhezhna bezpeka : Zb. nauk. pr. – Lviv : LDU BZHD*, 2015. – № 26. – S. 135-141.

12. Tatsiy R. M. Zahalna tretya krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovodnosti z kuskovo-stalymy koefitsiyentamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla [General third boundary value problem for the heat equation with piecewise constant coefficients and internal heat sources] / R. M. Tatsiy, T. I. Ushak, O. Yu. Pazen // Pozhezhna bezpeka: Zb. nauk. pr. – Lviv : LDU BZHD, 2015. – № 27. – S. 120-126.

13. O. Y. Pazen "Mathematical modelling and computer simulation of direct method for studying boundary value problem of thermal conductivity" Problems of Infocommunications. Science and Technology, pp. 73-76. 2017. DOI:10.1109/INFOCOMMST.2017.8246353.

*R. M. Tatsii, O. Y. Pazen*

## **DETERMINATION OF NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN THE SYSTEM OF TWO SPHERICAL SHELL**

The main classification indicator, in terms of fire safety, is the degree of fire resistance of the house. Depending on this indicator normalize its surface, the area of development and distance to other buildings and structures. The degree of fire resistance of the house is determined by the limit of fire resistance of its building structures and the limit of the fire spread by these structures. Therefore, the value of the fire resistance limit of building constructions, which consists of a house, significantly affect its architectural solution and the parameters of construction in general. On this basis, taking into account the approaches to ensuring normalized fire resistance limits of the design and the features of their behavior under high-temperature (fire) influence is very relevant.

Most research on building constructions

The proposed work is devoted to the application of the direct method to the study of heat transfer processes in the system of two embedded spherical bodies – a ball in a sphere. It is assumed that there is an ideal thermal contact between the balls, and the law of temperature change on the outer surface is an arbitrary function of time, and evenly distributed over the surface of the ball. Consequently, isotherms inside this construction are concentric fields, that is, the problem is symmetric and is solved for the first time in such a statement. To solve such a problem, in parallel, the auxiliary problem of determining the distribution of a non-stationary temperature field in a two-layer hollow spherical structure with a "extracted" sphere of sufficiently small radius is raised. In this case the symmetry condition of the original problem is replaced by the condition of the second kind on the inner surface of this construction. The implementation of the solution of the auxiliary problem is carried out by applying a reduction method using the concept of quasi-derivatives. In the future, the Fourier scheme is used with the use of the modified eigenfunctions method.

To find the solution of the original problem, the idea of the boundary transition is used by passing the radius of the withdrawn bullet to zero. It is established that in this approach all the eigenfunctions of the corresponding problem on the eigenvalues have no singularities at zero, which means that the solutions of the original problem are constrained throughout the design. The solution of this problem at zero temperature on the outer surface coincides with those known in the literature. To illustrate the proposed method, a model example of finding the temperature field distribution in a system of two spherical bodies with different thermophysical properties of materials is solved. The results of the calculations are presented in the form of a table and a three-dimensional graph of temperature change, depending on the time and spatial coordinates.

The generalization of the results obtained in the event of any finite number of nested balls is a purely technical problem, and not a fundamental one. Note that while changing the boundary condition of the first kind to any other boundary condition (for example, the third kind) does not affect the scheme of solving similar tasks. Since the general scheme of studying the distribution of temperature fields in multi-layered structures with an arbitrary number of layers in the presence of internal sources of heat is studied in detail, the setting and solving of such problems for the system of nested balls does not cause any difficulty.

**Key words:** nested balls, quasi-derivative, direct method, boundary transition.