УДК 517.912

Р.М. Тацій, *д-р фіз.-мат. наук, професор,* ***М.Ф. Стасюк****, канд. фіз.-мат. наук, доцент,*
О.Ю. Пазен, *канд. техн. наук,* ***Л.С. Шипот***
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОГО РАДІУСА ТЕПЛОВОЇ ІЗОЛЯЦІЇ БАГАТОШАРОВОЇ СФЕРИЧНОЇ ОГОРОДЖУВАЛЬНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Розв’язано задачу визначення розподілу одновимірного стаціонарного температурного поля у багатошаровій сферичній конструкції з урахуванням внутрішніх джерел тепла. На основі одержаного розв’язку проведено чисельні дослідження щодо визначення товщини критичного шару теплової ізоляції багатошарових сферичних огороджувальних конструкцій. Одержаний аналітичний розв’язок дає змогу встановити, що за умов конвективного теплообміну між поверхнею конструкції та навколишнім середовищем, кількість шарів та інтенсивність внутрішніх джерел тепла не впливає на товщину теплоізоляційного шару. Запропоновані у роботі чисельні дослідження можна адаптувати до визначення критичного радіуса теплової ізоляції багатошарових циліндричних конструкцій.

Ключові слова: критичний радіус ізоляції**,** багатошарова сферична огороджувальна конструкція, теплопередача.

R.M. Tatsiy, M.F. Stasiyk, O. Yu.Pazen, L. S. Shypot

THERMAL INSULATION OF MULTILAYERED SPHERICAL ENCLOSURE: CRITICAL RADIUS DETERMINATION

The distribution of one-dimensional stationary temperature field in a multilayered spherical enclosure was determined, taking into account the internal heat sources. On the basis of the obtained solution the numerous researches to determine the critical thickness of the layer of thermal insulation in multilayered spherical enclosures were conducted. Received analytical solution makes it possible to determine that under the condition of convective heat transfer between the surface of construction and the environment, the number of layers and the intensity of the internal heat source does not affect the thickness of the insulation layer. Numerous studies mentioned in the paper can be adapted to determine the critical radius of thermal insulation in multilayered cylindrical constructions.

Key words: critical radius of insulation, multilayered spherical enclosure, heat transfer.

Вступ. У практичній діяльності людини виникає потреба в енергозбереженні, тобто зменшенні теплопередачі між внутрішнім середовищем, що знаходиться в багатошаровій конструкції, та навколишнім середовищем. Для цього використовують теплову ізоляцію.

Тепловою ізоляцією називають усілякі покриття гарячої поверхні, які сприяють зниженню втрат теплоти в навколишнє середовище. Для теплової ізоляції можуть бути використані будь-які матеріали з низьким коефіцієнтом теплопровідності – азбест, корок, слюда, шлакова або скляна вата, спінені і вакуумно-багатошарові матеріали.

Виникає питання про знаходження критичних розмірів ізоляційного шару, тобто таких його розмірів, при яких спостерігається мінімальна втрата теплоти через ізоляційну поверхню в навколишнє середовище.

Розв`язок такої задачі для одношарової циліндричної труби (без врахування інтенсивності внутрішніх джерел тепла) відомий в класичній літературі з теорії теплопровідності (див. напр. [1,2]).

У роботі розв'язано крайову задачу теплопровідності про визначення розподілу стаціонарного температурного поля по товщині багатошарової сферичної конструкції. Цей розв'язок адаптовано до знаходження критичного радіуса теплоізоляції для багатошарової сферичної конструкції з урахування внутрішніх джерел тепла у шарах.

1. Моделювання процесу теплопереносу у багатошаровій сферичній конструкції

1.1. Постановка задачі та її математична модель.

В класичному випадку задача про розподіл стаціонарного температурного поля в багатошаровій сферичній конструкції (область якої обмежена поверхнями $r = r_0$ і $r = r_n$ та поділена на n шарів різної товщини) зводиться до розв'язування на відрізку $\left[r_0, r_n\right]$ (квазі)диференціального рівняння [1]

$$\frac{1}{r^2}\cdot\left(r^2\lambda(r)\cdot t^{'}(r)\right)+g(r)=0, \tag{1}$$

при крайових умовах.

$$\begin{cases} t(r_0)=t_0, \\ \alpha_n t(r_n)+\lambda(r_n)t^{'}(r_n)=\alpha_n\psi_n, \end{cases} \tag{2}$$

де, r – незалежна змінна $t(r)$ – температура, $\lambda(r)$ – коефіцієнт теплопровідності, $-\lambda t' = q\left(r\right)$ – густина теплового потоку, α_n – коефіцієнт теплообміну між зовнішнім середовищем і поверхнею, ψ_n – температура зовнішнього середовища (поза внутрішньою і зовнішньою поверхнями відповідно).

Помноживши рівняння (1) на r^2 перепишемо його у вигляді

$$\left(\lambda(r)r^2t^{'}\right)^{'}=-r^2g(r). \tag*{(1)'}$$

Введемо позначення квазіпохідної та теплового потоку [3]

$$t^{[1]}\overset{df}{=}t'r^2\lambda, \qquad\qquad q(r)=-t^{[1]}\big/r^2.$$

Тепер запишемо крайові умови (2) в термінах функції $t(r)$ і її квазіпохідної $t^{[1]}(r)$:

$$\begin{cases} \dfrac{t(r_0)}{r_0^2}=t_0, \\ \alpha_n t(r_n)+\dfrac{t^{[1]}(r_n)}{r_n^2}=\alpha_n\psi_n, \end{cases} \tag*{(2)'}$$

або після множення (2)' на r_0^2 і r_n^2 отримаємо у вигляді

$$\begin{cases} t(r_0)=t_0, \\ \alpha_n r_n^2 t(r_n)+t^{[1]}(r_n)=\alpha_n r_n^2\psi_n. \end{cases} \tag*{(2)''}$$

Отже замість крайової задачі (1), (2) будемо розв'язувати еквівалентну їй задачу (1)', (2)''.

Надалі вважатимемо, що кожен шар має свою товщину, коефіцієнт теплопровідності λ_i, та внутрішнє джерело тепла, інтенсивності g_i, $i=0,\overline{n-1}$.

Введемо поняття характеристичної функції θ_i напіввідкритого проміжку $\left[r_i, r_{i+1}\right)$ [3]:

$$\theta_i=\begin{cases} 1, якщо\, r\in\left[r_i,r_{i+1}\right), \\ 0, якщо\, r\notin\left[r_i,r_{i+1}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Використавши позначення (3), коефіцієнт теплопровідності $\lambda(r)$ та функцію внутрішніх джерел $g(r)$ можна зобразити у вигляді $\lambda(r)=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\theta_i$, $\quad g(r)=\sum_{i=0}^{i-1}g_i\theta_i$.

Крайова задача (1)', (2)'' є математичною моделлю розподілу температурного поля в багатошаровій сферичній конструкції.

1.2. Розв'язування вихідної задачі шляхом зведення до відповідної системи

Введемо вектори $\overline{T}=\begin{pmatrix} t(r) \\ t^{[1]}(r) \end{pmatrix}$, $\overline{G}(r)=\begin{pmatrix} 0 \\ -r^2 g(r) \end{pmatrix}$, та матрицю $A=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{r^2\lambda(r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді квазідиференціальне рівняння (1)' зводиться до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку [3, 5-7]:

$$\overline{T}' = A\cdot\overline{T}+\overline{G}, \tag{4}$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} t \\ t^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{r^2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t \\ t^{[1]} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -r^2 g \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Крайові умови (2)'' теж запишемо у векторній формі

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t(r_0) \\ t^{[1]}(r_0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n r_n^2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t(r_n) \\ t^{[1]}(r_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_0 \\ \alpha_n r_n^2\psi_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В матричній формі крайові умови матимуть вигляд

$$P\cdot\overline{T}(r_0)+Q\cdot\overline{T}(r_n)=\overline{\Gamma}, \tag{6'}$$

де позначено

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n r_n^2 & 1 \end{pmatrix},\ \overline{\Gamma}=\begin{pmatrix} t_0 \\ \alpha_n r_n^2\psi_n \end{pmatrix}, \overline{T}(r_0)=\begin{pmatrix} t(r_0) \\ t^{[1]}(r_0) \end{pmatrix},\ \overline{T}(r_n)=\begin{pmatrix} t(r_n) \\ t^{[1]}(r_n) \end{pmatrix}.$$

Позначимо $t_i(r)$ та $t_i^{[1]}(r)$ температуру та квазіпохідну на проміжку $[r_i, r_{i+1})$ відповідно. Вектор $\overline{T}_i(r)$ матиме вигляд $\overline{T}_i(r)=\begin{pmatrix} t_i \\ t_i^{[1]} \end{pmatrix}$.

Розглянемо систему (5) на проміжку $[r_i, r_{i+1})$:

$$\begin{pmatrix} t_i \\ t_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{r_i^2\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t_i \\ t_i^{[1]} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -g_i r^2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Відповідна однорідна система на проміжку має вигляд:

$$\begin{pmatrix} t_i \\ t_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{r_i^2\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t_i \\ t_i^{[1]} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Підкреслимо той факт, що системи (7) і (8) є специфічними. Першою координатою вектора $\overline{T}_i(r)$ є розв'язок рівняння (1)' на $[r_i, r_{i+1})$, а друга координата – її квазіпохідна.

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриця Коші системи (8) має вигляд [4]:

$$B_i(r,s)=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

У роботі [3] встановлено, що на проміжку $[r_i, r_{i+1})$ вектор $\overline{T}_i(r)$ має вигляд:

$$\overline{T}_i(r)=B_i(r,r_i)\cdot\overline{P}_i+\int_{r_i}^{r}B_i(r,s)\cdot\overline{G}_i(s)ds. \qquad (10)$$

Аналогічно на проміжку $[r_{i+1}, r_{i+2})$

$$\overline{T}_{i+1}(r)=B_{i+1}(r,r_{i+1})\cdot\overline{P}_{i+1}+\int_{r_{i+1}}^{r}B_{i+1}(r,s)\cdot\overline{G}_{i+1}(s)ds. \qquad (11)$$

В точці $r=r_i$ повинна виконуватись умова спряження (умова рівності двох суміжних розв'язків $\overline{T}_i(r)=\overline{T}_{i+1}(r)$), тому

$$B_i(r_{i+1},r_i)\cdot\overline{P}_i+\int_{r_i}^{r_{i+1}}B_i(r_{i+1},s)\cdot\overline{G}_i(s)ds=B_{i+1}(r_{i+1},r_{i+1})\cdot\overline{P}_{i+1}+\int_{r_{i+1}}^{r_{i+1}}B_{i+1}(r_{i+1},s)\cdot\overline{G}_{i+1}(s)ds. \qquad (12)$$

Рівність (12) можна записати у вигляді:

$$\overline{P}_{i+1}=B_i(r_{i+1},r_i)\cdot\overline{P}_i+\int_{r_i}^{r_{i+1}}B_i(r_{i+1},s)\cdot\overline{G}_i(s)ds. \qquad (13)$$

Вираз (13) носить назву рекурентної формули. Методом математичної індукції доводимо, що для довільного $i>1$ вектор $\overline{P}_i$ набуде загального вигляду (тут слід зауваживши, що вектор $\overline{P}_i=\overline{T}(r_i)$)

$$\overline{P}_i=B(r_i,r_0)\cdot\overline{P}_0+\sum_{j=1}^{i}B(r_i,r_j)\cdot\overline{Z}_j, \qquad (14)$$

де, $\overline{Z}_i=\begin{pmatrix} z_i \\ z_i^{[1]} \end{pmatrix}=\int_{r_{i-1}}^{r_i}B_{i-1}(r_i,s)\cdot\overline{G}_{i-1}(s)ds$, а $\overline{P}_0$ – початковий вектор, структуру побудови якого наведено у роботі [3].

$$\overline{P}_0=\left[P+Q\cdot B(r_n,r_0)\right]^{-1}\cdot\left[\overline{\Gamma}-Q\cdot\sum_{i=1}^{n}B(r_n,r_i)\cdot\overline{Z}_i\right], \qquad (15)$$

або після проведених перетворень

$$\overline{P}_0=\begin{pmatrix} t_0 \\ -\dfrac{\alpha_n r_n^2}{\alpha_n r_n^2\sigma_{no}+1}+\dfrac{1}{\alpha_n r_n^2\sigma_{no}+1}\left(\alpha_n r_n^2\psi_n-\alpha_n r_n^2\sum_{i=1}^{n}z_i-\sum_{i=1}^{n}z_i^{[1]}\left(\alpha_n r_n^2\sigma_{ni}+1\right)\right) \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

де позначено $\sigma_{no}=\dfrac{1}{\lambda_{n-1}}\left(\dfrac{1}{r_{n-1}}-\dfrac{1}{r_n}\right)+...+\dfrac{1}{\lambda_0}\left(\dfrac{1}{r_0}-\dfrac{1}{r_1}\right)$.

Використавши формули (10), (15) та (16), бачимо, що розв'язок системи (7) у точці r_n матиме вигляд

$$\overline{T}\left(r_n\right)=\overline{P}_n=B(r_n,r_0)\overline{P}_0+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{Z}_i=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \sigma_{n0}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{matrix}t_0\\ \dfrac{\alpha_n r_n^2\left(\psi_n-t_0-\sum\limits_{i=1}^{n}z_i-\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^{[1]}\sigma_{ni}\right)-\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^{[1]}}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}\end{matrix}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\begin{pmatrix}z_i\\ z_i^{[1]}\end{pmatrix}, \tag{17}$$

де першою координатою вектора $\overline{T}$ є температура, а другою – квазіпохідна.

2. Визначення критичного радіуса теплоізоляції

Використовуючи позначення квазіпохідної знаходимо, що густина теплового потоку на зовнішній поверхні теплоізоляції дорівнює

$$-\left(\lambda t'(r_n)\right)=-\frac{t^{[1]}(r_n)}{r_n^2}. \tag{18}$$

Використавши позначення (18) та формулу (17), знаходимо, що густина теплового потоку q у точці r_n дорівнює:

$$t^{[1]}(r_n)=\frac{\alpha r_n^2\left[\psi_n-t_0\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(z_i+z_i^{[1]}\sigma_{ni}\right)\right]-\sum\limits_{i=1}^{n-1}z_i^{[1]}}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}. \tag{19}$$

У працях [1, 2] відомо, що кількість теплоти, яка передається за час τ через довільну сферичну поверхню радіуса r_n, дорівнює

$$Q=4\pi r_n^2 q(r_n)\tau. \tag{20}$$

Підставивши (19) у (20), з урахуванням виразу (18), отримаємо, що

$$Q=4\pi\tau\frac{\alpha_n r_n^2\left[\psi_n-t_0\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(z_i+z_i^{[1]}\sigma_{ni}\right)\right]-\sum\limits_{i=1}^{n-1}z_i^{[1]}}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}. \tag{21}$$

Дослідимо функцію (21) на екстремум за змінною r_n.

$$f(r_n)=\frac{\alpha_n r_n^2\left[\psi_n-t_0\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(z_i+z_i^{[1]}\sigma_{ni}\right)\right]-\sum\limits_{i=1}^{n-1}z_i^{[1]}}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}. \tag{22}$$

Позначимо

$$\sum_{i=1}^{n-1}z_i^{[1]}\sigma_{ni}=\sum_{i=1}^{n-1}z_i^{[1]}\left(\sigma_{n,n-1}+\sigma_{n-1,i}\right)=\sigma_{n,n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}z_i^{[1]}+\sum_{i=1}^{n-1}z_i^{[1]}\sigma_{n-1,i}. \tag{23}$$

Підставивши (23) у (22), одержимо

$$f(r_n)=\frac{A\alpha_n r_n^2-B\left(\dfrac{r_n^2}{r_{n-1}}-r_n\right)-C}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}=\frac{A\alpha_n r_n^2}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}-\frac{B\left(\dfrac{r_n^2}{r_{n-1}}-r_n\right)}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}-\frac{C}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}=$$

$$=\frac{\left(A\alpha_n-\dfrac{B}{r_{n-1}}\right)r_n^2}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}+\frac{Br_n}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}-\frac{C}{\alpha_n r_n^2\sigma_{n0}+1}, \tag{24}$$

де позначено $A=\psi_n - t_0 - \sum_{i=1}^{n-1} z_i - \sum_{i=1}^{n-1} z_i^{[1]}\sigma_{n-1,i}$, $B=\frac{\alpha_n}{\lambda_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} z_i^{[1]}$, $C=\sum_{i=1}^{n-1} z_i^{[1]}$, та $r_n \neq 0$, $\left(\alpha_n r_n^2 \sigma_{n0}+1\right)^2 \neq 0$.

Дослідивши функцію $f(r_n)$ на екстремум, бачимо, що

$$-\frac{r_n\alpha_n}{\lambda_{n-1}}+2=0. \tag{25}$$

Звідси отримуємо критичну точку $r_{n(кр)}$, яка є коренем рівняння (25)

$$r_n=\frac{2\lambda_{n-1}}{\alpha_n}, \tag{28}$$

де, λ_{n-1} – коефіцієнт теплоізоляційного шару; α_n – коефіцієнт теплообмінуз навколишнім середовищем.

Висновки

У даній статті розв’язано задачу про знаходження критичного радіуса теплової ізоляції багатошарової сферичної конструкції з урахуванням внутрішніх джерелах тепла у шарах. Крайові умови при цьому першого та третього роду. Встановлено, що значення $r_{n(кр)}$ не залежить від кількості шарів та від інтенсивності внутрішніх джерел тепла. Виведено формулу для визначення критичного радіуса термоізоляції для багатошарової сферичної огороджувальної конструкції. Розроблені у роботі методи мають перспективу подальшого розвитку та можуть бути використані в інженерних розрахунках.

Список літератури:

1. Величко Л. Д. Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі / Л. Д. Величко, Р. Я. Лозинський, М. М. Семерак. – Л: "Сполом", 2011. – 497 с.
2. Исаченко В. П. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М: Энергия, 1975. – 488 с.
3. Тацій Р. М. Визначення теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом джерел тепла / Р. М. Тацій, М. І. Кусій, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека : Зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2012. – № 20. – С. 20-26.
4. Стасюк М. Ф. Построение функции Коши для квазидифференциального уравнения 2-го порядка с кусочно-переменными коэффициентами / М. Ф. Стасюк. // Вестник Львовского политехнического института. – 1983. – №172. – С. 122–124.
5. Таций Р. М. Расчет стационарного температурного поля в многослойной плите с учетом внутренних источников тепла при условии неидеального теплового контакта между слоями / Р. М. Таций, О. Ю. Пазен // Safety & Fire Technique (безопасность и пожарная техника). – Polska, Jozefov: CNOBP-PIB, BiTP 2015. – Vol. 40, issue 4. – P. 51-59.
6. Тацій Р. М. Нестандартні крайові задачі теплопровідності у багатошарових структурах за наявності внутрішніх джерел тепла / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека – 2013 : Зб. тез доп. XI Міжнар. наук.-практ. конф. (25–26 вересня). – Київ, 2013. – С. 308–312.
7. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. В. Мазуренко, О. О. Власій. – Дрогобич: "Коло", 2011. – 301 с.

References:

1. Velichko L.D. Thermodynamics and Heat Transfer in fire-fighting / L.D. Velichko, R.J. Lozinski, M.M. Semerak. – L: "Soplom", 2011. – 497 p.

2. Tatsiy R.M. Determination of heat transfer in multilayered infinite slab with discrete continuous distribution of heat / R.M. Tatsiy, M.I. Kusiy, O.Y. Pazen // Fire safety: collection of scientific papers. – Lviv: LSU BC, 2012. – № 20. – P. 20-26.

3. Stasiyk M.F. Construction of the Cauchy function for a second-order quasidifferential equation with piecewise-variable coefficients / M.F. Stasiyk. // Bulletin of Lviv Polytechnic Institute. – 1983. – №172. – P. 122-124.

4. Tatsiy R.M. Calculation of a stationary temperature field in a multilayered plate with allowance for internal heat sources under the condition of nonideal thermal contact between layers / R.M. Tatsiy, O.Y. Pazen // Safety & FireTechnique (Safety and Fire fighting technique). – Polska, Jozefov: CNOBP-PIB, BiTP 2015. – Vol. 40, issue 4. – P. 51-59.

5. Tatsiy R.M. Nonstandard verge exercises of heat conduction in multilayered structures if internal heat sources / R.M. Tatsiy, O.Y. Pazen // Fire safety – 2013: Book of abstracts. XI International scientific and practical conference (25-26 September). – Kyiv, 2013. – P. 308-312.

6. Generalized kvazidyferentsialni equation / R.M. Tatsiy, M.F. Stasiyk, O.V. Mazyrenko, O.O. Vlasiy. – Drohobych "Circle", 2011. – 301 p.

❖❖❖