

*Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, О.Ю. Пазен*

*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*

## ВПЛИВ НЕІДЕАЛЬНОГО ТЕПЛООВОГО КОНТАКТУ НА ТЕПЛООБМІН В СИСТЕМІ БАГАТОШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ

**Проблема.** Розв'язуванню проблеми теплообміну в багатошарових конструкціях присвячено численний ряд робіт. Переважна більшість з них обмежується випадком ідеального теплового контакту між шарами. Проте, на думку авторів, недостатньо вивченими є задачі теплопровідності в багатошарових конструкціях з урахуванням неідеального теплового контакту. Кількість таких досліджень є достатньо обмеженою. Крім цього, відомі дослідження, як правило, обмежуються двома шарами. Це зумовлено тим фактором, що збільшення кількості шарів (з огляду на вибір методів практичної реалізації) призводить до певних обчислювальних труднощів. Тому, проблема побудови ефективної аналітичної схеми дослідження процесів теплообміну в багатошарових конструкціях за наявності неідеального теплового контакту між шарами залишається актуальною задачею.

**Мета.** Застосування прямого методу до дослідження процесів теплообміну в системі «суцільний циліндр всередині багатошарової циліндричної оболонки» при неідеальному тепловому контакті.

**Методи дослідження.** Ставиться допоміжна задача про розподіл температурного поля у багатошаровому твердому циліндричному порожнистому тілі («вилучено» циліндр достатньо малого радіуса) з урахуванням неідеального теплового контакту між окремими шарами. Ця задача розв'язується за вже відомою схемою прямого методу.

**Основні результати дослідження.** Розв'язок вихідної задачі отримано шляхом граничного переходу: радіус «вилученого» циліндра, з центром в початку координат, спрямовується до нуля. Встановлено, що при такому підході, розв'язок поставленої задачі обмежений у всій конструкції. При цьому для розв'язку отримано явні формули.

**Висновки.** Побудована ефективна аналітична схема застосування прямого методу до дослідження процесів теплообміну в багатошарових суцільних циліндричних твердих тілах з урахуванням неідеального теплового контакту між шарами. При цьому кількість шарів, їх розміри та порядок розташування вважаються довільним.

**Ключові слова:** неідеальний тепловий контакт, прямий метод, граничний перехід.

*R. M. Tatsii, M.F. Stasiuk, O. Y. Pazen*

*Lviv State University of Life Safety, Lviv*

## INFLUENCE OF IMPERFECT THERMAL CONTACT ON HEAT EXCHANGE IN THE SYSTEM OF MULTILAYER CYLINDRICAL BODIES

**Introduction.** Solving the problem of heat transfer in multilayer structures devoted a large number of works. The vast majority of them are limited to the case of perfect thermal contact between the layers. However, according to the authors, the problems of thermal conductivity in multilayer structures using into account the imperfect thermal contact are insufficiently studied. The number of such studies is quite limited. Also, known studies are usually limited to two layers. That is because the increase in the number of layers (given the choice of methods of practical implementation) leads to several computational difficulties. Therefore, the problem of constructing an effective analytical scheme for the study of heat transfer processes in multilayer structures in the presence of imperfect thermal contact between the layers remains an urgent task.

**Purpose.** Application of the direct method to the study of heat transfer processes in the system "continuous cylinder inside a multilayer cylindrical shell" with imperfect thermal contact.

**Methods.** An auxiliary problem set for the distribution of the temperature field in a multilayer solid cylindrical hollow body (a cylinder of the sufficiently small radius is "removed") taking into account the imperfect thermal contact between the individual layers. According to the already known scheme of the direct method solve this problem.

**Results.** Boundary transition obtained the solution of the original problem. Boundary transition: the radius of the "removed" cylinder, with the centre at the origin, goes to zero. This approach established that the solution to the problem is limited in the whole structure. In this case, the solution obtained explicit formulas.

**Conclusions.** Effective analytical scheme constructed for application of the direct method to the study of heat transfer processes in multilayer hard cylindrical solids taking into account the non-ideal thermal contact between the layers. The number of layers, their size and arrangement are considered arbitrary.

**Keywords:** imperfect thermal contact, direct method, boundary transition.

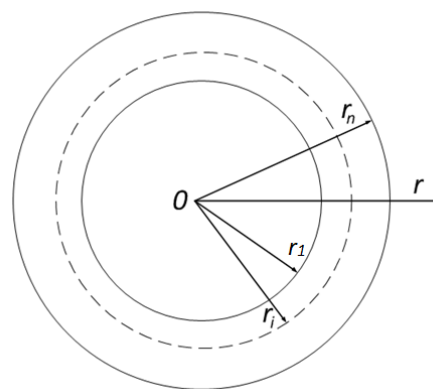
**Постановка проблеми.** Розв'язуванню проблеми теплообміну в багатошарових конструкціях присвячено численний ряд робіт. Переважна більшість з них обмежується випадком ідеального теплового контакту між шарами. Проте, на нашу думку, недостатньо вивченими є задачі теплопровідності в багатошарових конструкціях з урахуванням неідеального теплового контакту. Кількість таких досліджень є достатньо обмеженою. Так, наприклад, у роботі [1] розглянуто задачу про визначення температурного поля двошарової плоскої конструкції при неідеальному тепловому контакті між шарами та граничними умовами третього роду. В [2] проведено математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. У [3] розв'язано осесиметричну температурну задачу для системи двох контактуючих шарів з урахуванням неідеального теплового контакту.

В цитованих вище роботах автори, як правило, обмежуються двома шарами. Це зумовлено тим фактором, що збільшення кількості шарів (з огляду на вибір методів практичної реалізації) призводить до певних обчислювальних труднощів [4]. Тому, проблема побудови ефективної аналітичної схеми дослідження процесів теплообміну в багатошарових конструкціях за наявності неідеального теплового контакту між шарами залишається актуальною задачею. З огляду на вище викладене, у цій роботі пропонуємо застосування прямого методу до дослідження процесів теплообміну в системі «циліндр всередині багатошарової циліндричної оболонки». Схема цього методу, у всякому разі, дозволяє уникнути процедури знаходження оригіналів, що являє собою найбільш складний етап реалізації різного роду операційних методів [1-6].

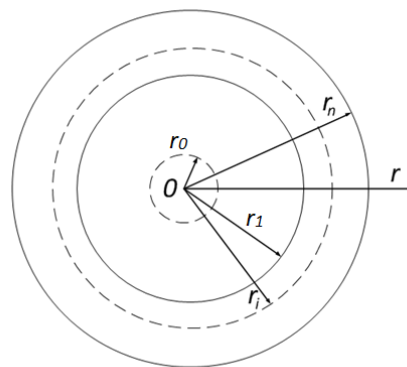
**Постановка вихідної задачі.** Розглядається нескінченний суцільний циліндр радіусом  $r = r_1$  всередині багатошарової порожнистої циліндричної оболонки радіусами  $r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < r_n$  з однаковою початковою температурою  $T = T_0$ . Між окремими шарами існує неідеальний тепловий контакт.

На зовнішній поверхні такої циліндричної конструкції існує конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, тобто виконуються край-

ові умови третього роду. Температура навколишнього середовища змінюється за деяким законом  $\psi(\tau)$ , тобто залежить від часу  $\tau$ . Необхідно знайти розподіл нестационарного температурного поля  $T(r, \tau)$  у будь-який момент часу  $\tau$  у такій складній системі. (рис. 1).



**Рисунок 1** – Схема системи багатошарових циліндричних тіл (діаметральний переріз)



**Рисунок 2** – Схема багатошарової порожнистої циліндричної конструкції

Вважається, що закон зміни температури  $\psi(\tau)$  рівномірно розподілений у зовнішньому приповерхневому шарі, так, що ізотерми всередині циліндричної конструкції являють собою коаксіальні циліндричні поверхні. Це значить, що температура залежить лише від радіуса  $r$  та часу  $\tau$  і задача є симетричною.

Така постановка задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності [7]

$$c\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad r \in [0, r_n], \quad \tau > 0, \quad (1)$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} \lambda_{i+1} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial r}(r_{i+1}, \tau) - \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r}(r_{i+1}, \tau) = 0, \\ t_{i+1}(r_{i+1}, \tau) - t_i(r_{i+1}, \tau) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r}(r_{i+1}, \tau), \end{cases} \quad (2)$$

початковою умовою

$$T(r, 0) = T_0. \quad (3)$$

крайовою умовою

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha(T(r_n, \tau) - \psi(\tau)), \quad (4)$$

та умовою симетрії [7]

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, \tau) = 0. \quad (5)$$

Тут  $c(r)$  — питома масова теплоємність матеріалу, Дж/(кг·°C),  $\rho(r)$  — густина матеріалу, кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda(r)$  — його коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·°C),  $\alpha$  — коефіцієнт теплообміну, Вт/(м<sup>2</sup>·°C).

**Допоміжна задача.** У системі «циліндр всередині багат шарової циліндричної оболонки» вилучимо циліндр радіусом  $r = r_0$ ,  $0 < r_0 < r_1$  [8] та розглянемо мішану задачу теплопровідності для багат шарової порожнистої циліндричної конструкції, зображеної на рис. 2. Для того, щоб розрізнити функцію розподілу температурного поля  $T(r, \tau)$  вихідної задачі від функції розподілу допоміжної задачі, позначатимемо останню через  $t(r, \tau)$ .

Нехай  $\theta_i$  — характеристична функція [9] проміжку  $[r_i, r_{i+1})$ , тобто

$$\theta_i(r) = \begin{cases} 1, & r \in [r_i, r_{i+1}), \\ 0, & r \notin [r_i, r_{i+1}), \end{cases} \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Позначимо  $\lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i$ ,  $c(r)\rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \theta_i$ ,

$$\lambda_i > 0, \quad c_i \rho_i > 0, \quad \forall i = \overline{0, n-1}, \quad \lambda_i, c_i, \rho_i \in R.$$

Для знаходження розподілу нестационарного температурного поля  $t(r, \tau)$  в багат шаровій порожнистій циліндричній конструкції, з урахуванням неідеального теплового контакту між окремими шарами, необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності [10]

$$c\rho \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right),$$

$$r \in [r_0, r_n], \quad \tau > 0, \quad (6)$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} \lambda_{i+1} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial r}(r_{i+1}, \tau) - \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r}(r_{i+1}, \tau) = 0, \\ t_{i+1}(r_{i+1}, \tau) - t_i(r_{i+1}, \tau) = \frac{1}{\alpha_{i+1}} \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r}(r_{i+1}, \tau), \end{cases} \quad (7)$$

початковою умовою

$$t(r, 0) = T_0. \quad (8)$$

Умову симетрії (5) змінимо на нульову крайову умову другого роду, тоді одержимо крайові умови для рівняння (6)

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial r}(r_0, \tau) = 0, \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}(r_n, \tau) = \alpha(t(r_n, \tau) - \psi(\tau)). \end{cases} \quad (9)$$

Очевидно, що тоді розв'язок вихідної задачі (1)-(5) буде отримано з розв'язку задачі (6)-(9) шляхом граничного переходу при  $r_0 \rightarrow 0$ .

Введемо позначення квазіпохідної  $t^{[1]} \stackrel{df}{=} r\lambda t'_r$ , та помножимо умови спряження (7) крайові умови (9) на  $\lambda r$  та  $r$  відповідно. Тоді отримаємо

$$\begin{cases} t_{i+1}^{[1]}(r_{i+1}, \tau) - t_i^{[1]}(r_{i+1}, \tau) = 0, \\ t_{i+1}(r_{i+1}, \tau) - t_i(r_{i+1}, \tau) = \frac{1}{r_{i+1}\alpha_{i+1}} t_i^{[1]}(r_{i+1}, \tau), \\ \begin{cases} t^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha r_n t(r_n, \tau) + t^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha r_n \psi(\tau). \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

Надалі будемо слідувати схемі, що детально описана в роботах [10, 11].

**Метод редукції.** Розв'язок задачі (6)-(9) шукатимемо за допомогою методу редукції [8-11] у вигляді

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau), \quad (11)$$

де одна з функцій ( $u(r, \tau)$  або  $v(r, \tau)$ ) вибирається спеціальним чином, а інша вже визначається однозначно.

*Крайова задача для  $u(r, \tau)$  та мішана задача для  $v(r, \tau)$ .* Як і вище, позначимо

квазіпохідні  $r\lambda u'_r \stackrel{df}{=} u^{[1]}$  та  $r\lambda v'_r \stackrel{df}{=} v^{[1]}$ . Визначимо функцію  $u(r, \tau)$  як розв'язок крайової (квазістационарної) задачі: розв'язати рівняння

$$(r\lambda u')'_r = 0, \quad (12)$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} u_{i+1}^{[1]}(r_{i+1}) - u_i^{[1]}(r_{i+1}) = 0, \\ u_{i+1}(r_{i+1}) - u_i(r_{i+1}) = \frac{1}{r_{i+1}\alpha_{i+1}} u_i^{[1]}(r_{i+1}), \end{cases} \quad (13)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u^{[1]}(r_0) = 0, \\ \alpha r_n u(r_n, \tau) + u^{[1]}(r_n, \tau) = \alpha r_n \psi(\tau). \end{cases} \quad (14)$$

Підставляючи (11) у рівняння (6), з урахуванням (12), послідовно отримуємо мішану задачу для функції  $v(r, \tau)$

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial}{\partial \tau}(u+v) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda \frac{\partial}{\partial r}(u+v) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (15)$$

з умовами спряження

$$\begin{cases} v_{i+1}^{[1]}(r_{i+1}) - v_i^{[1]}(r_{i+1}) = 0, \\ v_{i+1}(r_{i+1}) - v_i(r_{i+1}) = \frac{1}{r_{i+1}\alpha_{i+1}} v_i^{[1]}(r_{i+1}), \end{cases} \quad (16)$$

Оскільки крайові умови (14) для функції  $u(r, \tau)$  справджують крайові умови (10) для функції  $t(r, \tau)$ , отримаємо нульові крайові умови для визначення функції  $v(r, \tau)$ , тобто

$$\begin{cases} v^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ \alpha r_n v(r_n, \tau) + v^{[1]}(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

а початкова умова набуде вигляду

$$v(r, 0) = T_0 - u(r, 0) \equiv T_0. \quad (18)$$

Розв'язування крайової задачі (12)-(14).

Введемо вектор  $\mathbf{u} = (u, u^{[1]})^T$  та матриці

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda(r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r_i\alpha_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Тоді квазиди-$$

ференціальне рівняння (12) зводиться до розв'язування еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь 1-го порядку [10]

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (19)$$

з умовами спряження [11]

$$\mathbf{u}_{i+1}(r_{i+1}) - \mathbf{u}_i(r_{i+1}) = \mathbf{C}_{i+1} \cdot \mathbf{u}_i(r_{i+1}), \quad (20)$$

Необхідно відзначити, що система (19) разом з умовами спряження (20) називається системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією [11].

На кожному з проміжків  $[r_i, r_{i+1})$  система (19) має вигляд

$$\mathbf{u}'_i = \mathbf{A}_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\text{Ввівши матриці } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_n & 1 \end{pmatrix}$$

та вектор  $\mathbf{\Gamma} = (0, \alpha r_n \psi(\tau))^T$ , крайові умов (14) запишемо у матричному вигляді

$$P \cdot \mathbf{u}(r_0) + Q \cdot \mathbf{u}(r_n) = \mathbf{\Gamma},$$

Безпосередньою перевіркою переко-нуємось, що матриця Коші  $B_i(r, s)$  системи (21), має вигляд

$$B_i(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln r - \ln s}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (22)$$

Розв'язок  $\mathbf{u}_i(r)$  системи (21) на проміжку  $[r_i, r_{i+1})$  шукатимемо у вигляді [11]

$$\mathbf{u}_i(r) = \mathbf{B}_i(r, r_i) \mathbf{P}_i, \quad (23)$$

де  $\mathbf{P}_i$  – невідомий вектор

Аналогічно на проміжку  $[r_{i+1}, r_{i+2})$

$$\mathbf{u}_{i+1}(r) = \mathbf{B}_{i+1}(r, r_{i+1}) \mathbf{P}_{i+1}, \quad (24)$$

У точці  $r = r_i$  повинна виконуватись умова спряження (20), з якої при застосуванні до рівностей (23) та (24) одержимо рекурентне співвідношення [11]

$$\mathbf{P}_{i+1} = (\mathbf{E} + \mathbf{C}_{i+1}) \mathbf{B}_i(r_{i+1}, r_i) \cdot \mathbf{P}_i. \quad (25)$$

Введемо позначення

$$(\mathbf{E} + \mathbf{C}_{i+1}) = \mathbf{C}_{i+1},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r_p, r_q) &\stackrel{df}{=} \mathbf{C}_p \mathbf{B}_{p-1}(r_p, r_{p-1}) \times \mathbf{C}_{p-1} \mathbf{B}_{p-2}(r_{p-1}, r_{p-2}) \times \dots \\ &\times \mathbf{C}_{q+1} \mathbf{B}_q(r_{q+1}, r_q) \end{aligned}$$

На основі співвідношення (25) для довільного  $k > 0$  методом математичної індукції за індексом  $k$  отримуємо, що

$$\mathbf{P}_{m+k} = \mathbf{B}(r_{m+k}, r_m) \cdot \mathbf{P}_m.$$

Покладаючи  $m=0$  отримуємо

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{B}(r_k, r_0) \cdot \mathbf{P}_0.$$

де  $\mathbf{P}_0$  – початковий вектор, що обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}(r_n, r_0))^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma} = \\ &= \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( 1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\ln r_{i+1} - \ln r_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_i} \right) \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha r_n \psi(\tau) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

В роботі [10] встановлено, що на кожному з проміжків  $[r_i, r_{i+1})$ , розв'язок задачі (12)-(14) має вигляд

$$\mathbf{u}_i(r, \tau) = B_i(r, r_i) \cdot B(r_i, r_0) \cdot \mathbf{P}_0, \quad i = \overline{0, n-1}$$

Відповідно, розв'язок задачі (12)-(14) на кожному з проміжків  $[r_i, r_{i+1})$  зображується так:

$$\mathbf{u}_i(r) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ln r - \ln r_i}{\lambda_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\ln r_{k+1} - \ln r_k}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\alpha_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отже, розв'язок крайової задачі (12)-(14)  $u(r,t) \equiv \psi(\tau)$ , тобто не залежить від радіуса  $r$  [11].

Розв'язування мішаної неоднорідної задачі для функції  $v(r,\tau)$ . Оскільки функція  $u(r,\tau)$  вже відома, то задача (15) для функції  $v(r,\tau)$  набуває вигляду

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \psi'(\tau),$$

з умовами спряження (16), нульовими крайовими умовами (17) при початковій умові (18).

Метод Фур'є та задача на власні значення. Нетривіальні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (26)$$

з умовами спряження (16) та крайовими умовами (17) шукатимемо у вигляді [10]

$$v(r,\tau) = e^{-\omega\tau} \cdot R(r), \quad (27)$$

де  $\omega$  – параметр, а  $R(r)$  – невідома функція.

Ввівши квазіпохідну  $R^{[1]} \stackrel{df}{=} r\lambda R'$ , підставляючи праву частину (27) у рівняння (26), умови (16) та (17), приходимо до квазидиференціального рівняння [10]

$$(r\lambda R')' + \omega c\rho R = 0, \quad (28)$$

з умовами спряження [11]

$$\begin{cases} R_{i+1}^{[1]}(r_{i+1}) - R_i^{[1]}(r_{i+1}) = 0, \\ R_{i+1}(r_{i+1}) - R_i(r_{i+1}) = \frac{1}{r_{i+1}\alpha_{i+1}} R_i^{[1]}(r_{i+1}), \end{cases} \quad (29)$$

та крайовими умовами

$$\begin{cases} R^{[1]}(r_0) = 0, \\ \alpha r_n R(r_n) + R^{[1]}(r_n) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Друга умова з (29) показує, що розв'язок рівняння (28) в точках  $r = r_i, i = \overline{1, n-1}$  мають розриви першого роду. У зв'язку з цим, задача (28)-(30) є певним узагальненням класичної задачі на власні значення [11].

Зведення задачі (28)-(30) до задачі на власні значення для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Введемо вектор  $\mathbf{R} = (R \quad R^{[1]})^T$

та матрицю  $\mathbf{A}(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda(r)} \\ -\omega c\rho r & 0 \end{pmatrix}$ . Тоді

квазидиференціальне рівняння (28) еквівалентне системі

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}. \quad (31)$$

Умови спряження (29) у векторній формі набувають вигляду

$$\mathbf{R}_{i+1}(r_{i+1}) - \mathbf{R}_i(r_{i+1}) = \mathbf{C}_{i+1} \mathbf{R}_i(r_{i+1}). \quad (32)$$

Нагадаємо, що  $\mathbf{C}_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r_{i+1}\alpha_{i+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Запи-

шемо крайові умови (30) також у векторній формі

$$\mathbf{P}\mathbf{R}(r_0) + \mathbf{Q}\mathbf{R}(r_n) = \bar{\mathbf{0}}, \quad (33)$$

де, як і вище,  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha r_n & 1 \end{pmatrix}$ .

**Конструктивна побудова власних векторів задачі (31)-(33).** На кожному з проміжків  $[x_i, x_{i+1})$  система (31) має вигляд

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\lambda_i} \\ -\omega r c_i \rho_i & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицю Коші цієї системи позначимо  $\mathbf{B}_i(r, s, \omega)$ . В роботі [10] встановлено вигляд цієї матриці:

$$\mathbf{B}_i(r, s, \omega) = \begin{pmatrix} \frac{\pi\beta_i s (J_1(\beta_i, s) Y_0(\beta_i, r) - J_0(\beta_i, r) Y_1(\beta_i, s))}{2} & \frac{\pi (J_0(\beta_i, s) Y_0(\beta_i, r) - J_0(\beta_i, r) Y_0(\beta_i, s))}{2\lambda_i} \\ \frac{\pi\lambda_i \beta_i^2 r s (J_1(\beta_i, r) Y_1(\beta_i, s) - J_1(\beta_i, s) Y_1(\beta_i, r))}{2} & \frac{\pi\beta_i r (J_1(\beta_i, r) Y_0(\beta_i, s) - J_0(\beta_i, s) Y_1(\beta_i, r))}{2} \end{pmatrix}$$

де  $\beta_i \stackrel{df}{=} \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}}$ , а  $J_0, J_1$  і  $Y_0, Y_1$  – функції Бесселя

та Неймана нульового та першого порядків відповідно.

В роботах [10, 11] встановлено, що матриця Коші  $\mathbf{B}(r, r_0, \omega)$  системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (28), (30) на проміжку  $[r_n, r_0]$  зображується у вигляді

$$\mathbf{B}(r, r_0, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}_i(r, r_0, \omega) \theta_i, \quad \text{де позначено}$$

$$\mathbf{B}_i(r, r_0, \omega) = \mathbf{B}_i(r, r_i, \omega) \prod_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}_{i-j} \mathbf{B}_{i-j-1}(r_{i-j}, r_{i-j-1}, \omega),$$

$i = \overline{1, n-1}$ .

Нетривіальний розв'язок задачі (31)-(33) шукатимемо у вигляді [10]

$$\mathbf{R}(r, \omega) = \mathbf{B}(r, r_0, \omega) \mathbf{D}, \quad (34)$$

де  $\mathbf{D} = (D_1, D_2)^T$  – деякий нетривіальний вектор. Підставляючи (34) в умови (33), отримуємо:

$$[\mathbf{P}\mathbf{B}(r_0, r_0, \omega) + \mathbf{Q}\mathbf{B}(r_n, r_0, \omega)] \mathbf{D} = \bar{0},$$

або, оскільки  $\mathbf{B}(r_0, r_0, \omega) = \mathbf{E}$ , де  $\mathbf{E}$  – одинична матриця

$$[\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{B}(r_n, r_0, \omega)] \mathbf{D} = \bar{0}. \quad (35)$$

Для існування нетривіального розв'язку системи (35) необхідно і достатньо виконання умови

$$\det[\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{B}(r_n, r_0, \omega)] = 0. \quad (36)$$

Рівняння (36) – характеристичне рівняння задачі на власні значення (31)-(33). Корені цього рівняння позначимо через  $\omega_k > 0, k = 1, 2, \dots$ . Відповідні нетривіальні розв'язки  $\mathbf{R}_k(r, \omega_k)$  – власні вектори задачі (31)-(33).

Визначимо структуру нетривіального вектора  $\mathbf{D}$ , який використано у формулі (34). Позначимо  $\mathbf{B}(r_n, r_0, \omega_k) \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} c_{11}(\omega_k) & c_{12}(\omega_k) \\ c_{21}(\omega_k) & c_{22}(\omega_k) \end{pmatrix}$ . Врахувавши конкретні вирази матриць  $P$  і  $Q$ , приходимо до системи

$$\begin{cases} D_2 = 0, \\ (r_n \alpha_n c_{11}(\omega_k) + c_{21}(\omega_k)) D_1 + \\ + (r_n \alpha_n c_{12}(\omega_k) + c_{22}(\omega_k)) D_2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи дорівнює нулеві, то одне з рівнянь (наприклад, друге) можна відкинути. Звідси випливає, що  $D_2 = 0$  при будь якому ненульовому значенні  $D_1$ . Показавши, наприклад,  $D_1 = 1$ , отримуємо, що нетривіальний вектор  $\mathbf{D}$  можна записати у вигляді:

$$\mathbf{D} = (1, 0)^T, \quad (37)$$

Враховуючи формули (34) та (37) встановлюємо, що власні вектори системи диференціальних рівнянь (31) з умовами спряження (32) та крайовими умовами (33) мають вигляд

$$\mathbf{R}_k(r, \omega_k) = \mathbf{B}(r, r_0, \omega_k) \mathbf{D}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

Зауважимо, що перші координати  $R_k(r, \omega_k)$  власних векторів  $\mathbf{R}_k(r, \omega_k)$  є власними функціями задачі (28)-(30).

Розвинення деякої кусково-неперервної функції  $g(r)$ , що має розриви першого роду в точках  $r_i, i = \overline{1, n-1}$  в ряд Фур'є за власними функціями  $R_k(r, \omega_k)$  має вигляд [9, 10]

$$g(r) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} g_i \theta_i = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot R_k(r, \omega_k),$$

де коефіцієнти Фур'є  $\gamma_k$  обчислюються за формулою

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{\|\mathbf{R}_k\|^2} \int_{r_0}^{r_n} c \rho g(r) R_k(r, \omega_k) r dr = \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{R}_k\|^2} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} g_i(r) R_{ki}(r, \omega_k) r dr. \end{aligned}$$

Тут  $\|\mathbf{R}_k\|^2$  – квадрат норми власних функцій  $R_k(r, \omega_k)$

$$\|\mathbf{R}_k\|^2 = \int_{r_0}^{r_n} c \rho r R_k^2(r, \omega_k) dr = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} R_{ki}^2(r, \omega_k) r dr.$$

**Побудова розв'язку  $v(x, \tau)$  мішаної задачі (15)-(18).** Для побудови розв'язку задачі (15)-(18) застосуємо метод власних функцій [10, 11], який полягає в тому, що розв'язок задачі (15)-(18) шукатимемо у вигляді

$$v(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k), \quad (39)$$

де  $T_k(\tau)$  – невідома функція.

Оскільки  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  входить до правої частини рівняння (15), розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями (38) крайової задачі (28)-(30)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k), \quad (40)$$

причому змінна  $\tau$  вважається параметром.

Підставивши (39) в (15), та врахувавши розвинення (40), отримаємо рівність

$$\begin{aligned} c \rho \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k) = \\ = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \cdot (r \lambda R_k'(r, \omega_k))' - c \rho \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) \cdot R_k(r, \omega_k), \end{aligned}$$

яка після врахування рівності  $(r \lambda R_k')' + \omega_k r c \rho R_k \equiv 0$ , та скорочення на  $c \rho \neq 0$  набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k'(\tau) + \omega_k T_k(\tau) + u_k(\tau)] \cdot R_k(r, \omega_k) = 0. \quad (41)$$

Прирівнявши коефіцієнти Фур'є ряду (41) до нуля, отримаємо нескінченну сукупність диференціальних рівнянь

$$T_k'(\tau) + \omega_k T_k(\tau) + u_k(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Загальний розв'язок кожного з цих рівнянь має вигляд

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^\tau e^{-\omega_k(\tau-s)} \cdot u_k(s) ds, \quad (42)$$

$k = 1, 2, 3, \dots$

де  $C_k$  – невідомі константи. Для їх знаходження розвинемо функцію  $T_0$  (із початкової умови) (18) в ряд Фур'є за системою власних функцій (38) крайової задачі (28)-(30)

$$v(r, 0) = T_0 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k R_k(r, \omega_k), \quad (43)$$

де  $f_k$  – відповідні коефіцієнти Фур'є.

На основі (42) встановлюємо, що

$$T_k(0) = C_k, \quad (44)$$

а враховуючи вираз (39) отримаємо

$$v(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \cdot R_k. \quad (45)$$

Прирівнявши вирази (43)-(45), отримуємо, що  $C_k = f_k$ .

Остаточо розв'язок мішаної задачі (15)-(18) запишемо у вигляді ряду [10]:

$$v(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^\tau e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot R_k(r, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(r, \tau) \cdot \theta_i,$$

де

$$v_i(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_{ki} \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^\tau e^{-\omega_k(\tau-s)} u_{ki}(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k),$$

де  $f_k$  та  $u_k$  – коефіцієнти розвинення початкової умови та функції  $\psi(\tau)$  відповідно в ряди Фур'є за системою власних функцій  $R_k(r, \omega_k)$ .

**Граничний перехід при  $r_0 \rightarrow 0$  та зображення розв'язку вихідної задачі (1)-(5).** На основі методу редукції розв'язок вихідної задачі зображується у вигляді [8]

$$T(r, \tau) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (u(r, \tau) + v(r, \tau)) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left( \psi(\tau) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_{ki} \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^\tau e^{-\omega_k(\tau-s)} u_{ki}(s) ds \right] \cdot R_{ki}(r, \omega_k) \theta_i \right).$$

Оскільки  $J_1(\beta_0 r_0) = \frac{\beta_0 r_0}{2} + \dots$ ,

$$Y_1(\beta_0 r_0) = \frac{2}{\pi} J_1(\beta_0 r_0) \left( \ln \frac{\beta_0 r_0}{2} + const \right) - \frac{2}{\pi \beta_0 r_0} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^m \beta_0 r_0}{m!(m+1)!} \left( \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \right],$$

то

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (J_1(\beta_0, r_0) Y_0(\beta_0, r_1) - J_0(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0)) = \frac{2J_0(\beta_0, r_1)}{\pi \beta_0}, \quad (46)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 (J_1(\beta_0, r_1) Y_1(\beta_0, r_0) - J_1(\beta_0, r_0) Y_1(\beta_0, r_1)) = -\frac{2J_1(\beta_0, r_1)}{\pi \beta_0},$$

На основі (46) отримуємо характеристичне рівняння (36) задачі на власні значення (28), (30) після граничного переходу:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \Delta(r_0) = (\alpha r_n c_{11}(\omega) + c_{21}(\omega)) J_0(\beta_0, r_1) - (\alpha r_n c_{12}(\omega) + c_{22}(\omega)) \lambda_0 \beta_0 r_1 J_1(\beta_0, r_1) = 0$$

Відповідні власні вектори (38) зобразяться так:

$$\mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, 0, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = (J_0(\beta_0 \cdot r), -\lambda_0 \beta_0 r J_0(\beta_0 \cdot r))^T,$$

$$\mathbf{R}_{k0}(0, \omega_k) = (1, 0)^T.$$

$$\mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_1, \omega_k) \cdot (J_0(\beta_0 \cdot r_1), -\lambda_0 \beta_0 r_1 J_0(\beta_0 \cdot r_1))^T.$$

**Числовий приклад.** Розглянемо задачу про нагрівання п'ятишарової циліндричної суцільної конструкції, яка виконана з ізотропних матеріалів різної товщини. Між двома суміжними шарами виконується умова ідеального або неідеального теплового контакту. Необхідно визначити розподіл нестационарного температурного поля такої конструкції, якщо ззовні температура навколишнього середовища змінюється за стандартним температурним режимом пожежі. Теплофізичні характеристики конструкції для розрахунку наведено в таблиці 1.

**Таблиця 1**

*Теплотехнічні характеристики конструкції*

Параметр	Шар 1	Шар 2	Шар 3	Шар 4	Шар 5
Радіус	$r_0 = 0$	$r_1 = 0,1$	$r_2 = 0,4$	$r_3 = 0,48$	$r_4 = 0,58$
	$r_5 = 0,6$				
Коефіцієнт теплопровідності	2,91	209	1,55	64	393

Продовження таблиці 1

Питома масова теплоємність	921	894	770	389	389
Густина	2800	2680	2200	800	8950
Коефіцієнт теплообміну	ІТК		80	ІТК	
Закони зміни температур середовищ	$\psi(\tau) = \log_{10}\left(\frac{8\tau}{60} + 1\right) + 20$				
Коефіцієнти теплообміну з навколишнім середовищем	$\alpha = 25$				

ІТК – ідеальний тепловий контакт.

Використавши запропонований метод та програмне забезпечення Maple 13, отримано результат про розподіл нестационарного температурного поля (рис. 3) та густини теплового потоку (рис. 4) у вигляді графіків.

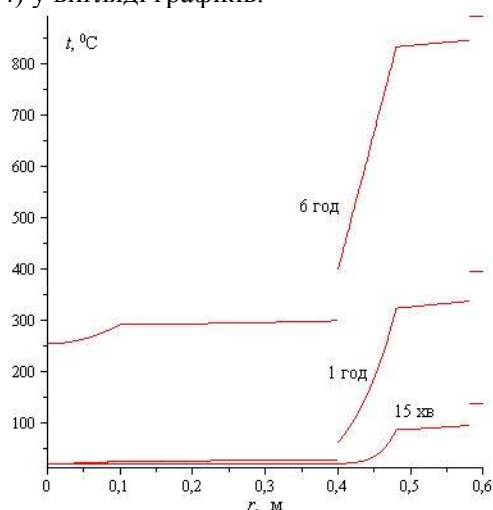


Рисунок 3 – Розподіл нестационарного температурного поля

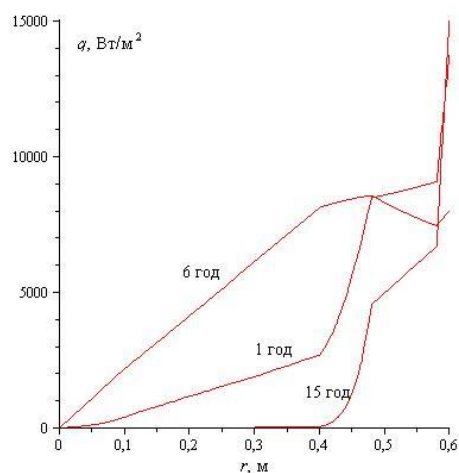


Рисунок 4 – Розподіл густини теплового потоку

Результати розрахунків також можна виводити у вигляді аналітичних залежностей, 3D-графіків, табличних даних тощо.

На рисунках 3 та 4 добре видно наявність стрибків температури та неперервність густини теплового потоку, що відповідає умовам неідеального теплового контакту.

**Висновки.** Побудована ефективна аналітична схема застосування прямого методу до дослідження процесів теплообміну в багат шарових суцільних циліндричних твердих тілах з урахуванням неідеального теплового контакту між шарами. До розв'язування вихідної задачі використали ідею граничного переходу. При цьому кількість шарів, їх розміри та порядок розташування вважається довільним.

Література:

1. Кусковець, С. Л., Половко, А. П., Борис, О. П., & Величко, Л. Д. (2011). Розподіл температурного поля в двохшаровій плоскій конструкції при умові неідеального теплового контакту міжшарами та наявності граничних умов третього типу. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*, № 2 (54), 143-150.
2. Гера Б. В. (2013) Математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. №18, 61-72. <http://eadnurt.diit.edu.ua/jspui/handle/123456789/9361>.
3. Окрепкий Б. С., Неміш В. М. (2014) Осесиметрична температурна задача для системи двох контактуючих шарів з урахуванням неідеального теплового контакту. *Міжвузівський збірник Наукові нотатки*. №47, 131-136.
4. Yang, B., & Liu, S. (2017). Closed-form analytical solutions of transient heat conduction in hollow composite cylinders with any number of layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 108, 907–917.
5. Yang, X. J. (2017). A new integral transform operator for solving the heat-diffusion problem. *Applied Mathematics Letters*, 64, 193-197. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.09.011>.
6. Jiang, J., & Zhou, J. (2020). Analytical solutions of Laplace's equation for layered media in a cylindrical domain and its application in seepage analyses. *International Journal of Mechanical Sciences*, 105781. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105781>.
7. Лыков А.В. Теория теплопроводности/ А.В. Лыков –М.: Высшая школа, 1967. – 600с .
8. Тацій Р.М. Пазен О.Ю., Шипот Л.С. (2019) Визначення нестационарного температурного поля в системі двох циліндричних тіл за



умов пожежі. *Збірник наукових праць Пожежна безпека*. Львів. № 34. С. 84-90. DOI: [10.32447/20786662.34.2019.14](https://doi.org/10.32447/20786662.34.2019.14)

9. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. (2016) General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. vol. 89, no. 2. pp. 357-368. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>

10. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. (2018) Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. vol. 91, no. 6. pp. 1373-1384. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-018-1871-3>

11. Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. Ю. Пазен (2020) Моделювання теплообміну в багатшаровій плоскій конструкції при неідеальному тепловому контакті за умов пожежі. *Збірник наукових праць Пожежна безпека*. Львів. № 36. С. 115-120. DOI: [10.32447/20786662.36.2020.13](https://doi.org/10.32447/20786662.36.2020.13)

#### References:

1. Kuskovets', S. L., Polovko, A. P., Borys, O. P., & Velychko, L. D. (2011). Rozpodil temperaturnoho polya v dvokhsharoviy ploskiy konstruktsiyi pry umovi neideal'noho teplovoho kontaktu mizhsharamy ta nayavnosti hranychnykh umov tret'oho typu. *Visnyk Natsional'noho universytetu vodnoho hospodarstva ta pryrodokorystuvannya*, № 2 (54)), 143-150.

2. Hera B. V. (2013) Mathematical modeling of conditions of non-ideal thermal contact of layers due to thin inclusion with heat sources. Physical and mathematical modeling and information technology. №18, 61-72. <http://eadnurt.diit.edu.ua/jspui/handle/123456789/9361>.

3. Okrepkyu B. S., Nemish V. M. (2014) Osesymetrychna temperaturna zadacha dlya systemy dvokh kontaktuyuchykh shariv z urakhuvannyam neideal'noho teplovoho kontaktu. *Mizhvuzivs'kyi zbirnyk Naukovi notatky*. №47, 131-136.

4. Yang, B., & Liu, S. (2017). Closed-form analytical solutions of transient heat conduction in hollow composite cylinders with any number of layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 108, 907-917.

5. Yang, X. J. (2017). A new integral transform operator for solving the heat-diffusion

problem. *Applied Mathematics Letters*, 64, 193-197. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.09.011>.

6. Jiang, J., & Zhou, J. (2020). Analytical solutions of Laplace's equation for layered media in a cylindrical domain and its application in seepage analyses. *International Journal of Mechanical Sciences*, 105781. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105781>.

7. Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti/ A.V. Lykov –M.: Vysshaya shkola, 1967. – 600s .

8. Tatsiy R.M. Pazen O.Yu., Shypot L.S. (2019) Vyznachennya nestatsionarnoho temperaturnoho polya v systemi dvokh tsylindrychnykh til za umov pozhezhi. *Zbirnyk naukovykh prats' Pozhezhna bezpeka*. L'viv. № 34. S. 84-90. DOI: [10.32447/20786662.34.2019.14](https://doi.org/10.32447/20786662.34.2019.14)

9. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. (2016) General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. vol. 89, no. 2. pp. 357-368. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8>

10. Pazen O. Yu., Tatsii R. M. (2018) Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. vol. 91, no. 6. pp. 1373-1384. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-018-1871-3>

11. R. M. Tatsiy, M. F. Stasyuk, O. YU. Pazen (2020) Modelyuvannya teploobminu v bahatosharoviy ploskiy konstruktsiyi pry neideal'nomu teplovomu kontakti za umov pozhezhi. *Zbirnyk naukovykh prats' Pozhezhna bezpeka*. L'viv. № 36. S. 115-120. DOI: [10.32447/20786662.36.2020.13](https://doi.org/10.32447/20786662.36.2020.13).

\*Науково-методична стаття