УДК 534.111

Б.І. Сокіл, д-р техн. наук, професор[1,2], *О.І. Хитряк*[1], *М.Б. Сокіл, канд. техн. наук*[3]
([1]Академія сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного
[2]Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
[3]НУ «Львівська політехніка»)

ХВИЛЬОВА ТЕОРІЯ РУХУ У ДОСЛІДЖЕННІ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ДВОВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ СТАЛОЮ ШВИДКІСТЮ ПОЗДОВЖНЬОГО РУХУ

Викладено методику дослідження динамічних процесів у двовимірних гнучких тілах (конструктивних елементах привода), які характеризуються сталою складовою швидкості поздовжнього руху. В її основу покладено концепцію хвильової теорії руху та основні ідеї методів збурень для слабо нелінійних систем. Отримано співвідношення, які визначають основні характеристики хвиль для лінійних та нелінійних математичних моделей процесу.

Ключові слова: елементи систем приводів, нелінійні коливання, хвильова теорія, метод Ван-дер-Поля.

Актуальність і огляд основних результатів. Коливання і вібрації твердих тіл та елементів конструкцій значною мірою впливають як на технологічний процес, так і на працездатність та самопочуття людини. Тому важливою проблемою є їх надійний захист від шкідливих впливів вказаних факторів. Математичними моделями коливних процесів у відповідних системах чи конструкціях є диференціальні рівняння (звичайні або із частинними похідними). У більшості випадків вони є нелінійними. Із останнім пов'язані основні труднощі досліджень коливань. У випадку малої не лінійності використовують основні ідеї методів збурень [1]. Необхідною умовою їх застосування є можливість побудови розв'язку відповідних незбурених (лінійних) аналогів рівнянь. Для багатьох класів систем отримати їх є окремою не менш складною задачею. До них належать, в першу чергу, одно- та двовимірні гнучкі елементи систем приводів. Приводи – пристрої для приведення в дію якої-небудь машини чи механізму.

Приводи в автоматичному режимі дозволяють здійснювати регулювання швидкості механізму за заданою програмою як функції шляху, часу або навантаження, регулювати прискорення і уповільнення, перерозподіл навантаження, тощо. Застосування автоматизації (навіть часткової) збільшує надійність і точність роботи привода, підвищує продуктивність машини в цілому, дозволяє управляти приводом на відстані. Приводи також дають можливість перейти від індивідуального управління робочими машинами до автоматичного управління виробничими агрегатами, ділянками, цехами.

Математичними моделями процесів в елементах приводів є крайові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними, що містять мішану похідну за часовою та просторовою координатах. Описання динамічних процесів у випадку дещо спрощених одновимірних моделей систем, будується у [2,3] на основі хвильової теорії руху. Ця теорія в останні десятиліття отримала новий імпульс розвитку [2-5]. Вона дає можливість дослідити динамічні процеси у багатьох системах, для яких застосування класичних методів [6-7] є неможливим. Метою роботи є розробка, на основі хвильової теорії руху, методики дослідження динамічних процесів у двовимірних нелінійних системах, які характеризуються поздовжнім рухом: стрічки конвеєрних ліній, транспортерів тощо. Для цього, використовуючи основну ідею методу Ван-дер-Поля, отримано рівняння у стандартному вигляді, які описують основні параметри процесу.

Постановка задачі і методика розв'язування

Математичною моделлю у змінних Ейлера [8], нелінійних коливань двовимірних тіл, згинною жорсткістю котрих можна знехтувати, і які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, є диференціальне рівняння

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - \left(\alpha^2 - V^2\right)u_{xx} - \gamma^2 u_{yy} = \varepsilon f\left(u, u_t, u_x, u_y, u_{xt}, u_{xx}, u_{xy}\right), \qquad (1)$$

де α, γ – деякі сталі, що описують фізико-механічні властивості матеріалу досліджуваного об'єкта, x, y – його координати, $u(t, x, y)$ – шукана функція, t – час, с, V – швидкість поздовжнього руху, м/с, $\varepsilon f\left(u, u_t, u_x, u_y, u_{xt}, u_{xx}, u_{xy}\right)$ – відома функція, яка враховує нелінійні сили системи і є достатньо гладкою. Для диференціального рівняння (1) будемо розглядати крайові умови вигляду

$$u(t, x, y)_{|x=0} = u(t, x, y)_{|x=l} = 0, \qquad (2)$$

які узгоджуються із умовами безвідривності стрічки від привідного і веденого барабанів.

Незбурене рівняння. Відповідно до загальних підходів побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із малим параметром у правій частині, покажемо спочатку, що розв'язок незбуреної ($\varepsilon = 0$) крайової задачі можна описати за допомогою двох хвиль: прямої та відбитої. Із цією метою, узагальнюючи основну ідею концепції хвильової теорії руху для одновимірних динамічних систем, які характеризуються сталою складовою швидкості поздовжнього руху [2, 3], розв'язок рівняння (1) при $\varepsilon = 0$ за крайових умов (2) будемо шукати у вигляді [9]

$$u(t, x, y) = a\cos(\kappa x + \delta y + \omega t + \varphi) + b\cos(\chi x - \delta y - \omega t + \psi), \qquad (3)$$

де, відповідно, ω – частота, a, b – амплітуди відбитої та прямої хвиль, κ, χ – їх хвильові числа, δ – хвильове число поперечної складової хвилі, φ, ψ – початкові фази хвиль.

Підставляючи (3) в (1) для випадку незбуреного руху отримуємо дисперсійні співвідношення

$$\omega^2 + 2V\omega\kappa - \left(\alpha^2 - V^2\right)\kappa^2 - \gamma^2\delta^2 = 0,$$
$$\omega^2 - 2V\omega\chi - \left(\alpha^2 - V^2\right)\chi^2 - \gamma^2\delta^2 = 0. \qquad (4)$$

До того ж, представлення розв'язку (3) буде задовольняти крайові умови у точках $x = 0$, $x = l$, якщо існує зв'язок між амплітудами та початковими фазами хвиль

$$a = b, \quad \varphi = -\psi \qquad (5)$$

та

$$\cos(\kappa l + \delta y + \omega t + \varphi) - \cos(\chi l - \delta y - \omega t - \varphi) = 0. \qquad (6)$$

Наведена вище залежність (6) буде виконуватись для довільного моменту часу t, якщо хвильові числа κ, χ задовольняють умову

$$\kappa_k + \chi_k = \frac{2k\pi}{l}, k = 1,2,\dots . \qquad (7)$$

Дисперсійні співвідношення (4) разом із залежністю (7) визначають хвильові числа κ_k, χ_k та частоту процесу у вигляді

$$\kappa_k = \frac{\pi k}{l} + \frac{V\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}}{\alpha l\sqrt{\alpha^2 - V^2}}, \quad \chi_k = \frac{\pi k}{l} - \frac{V\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}}{\alpha l\sqrt{\alpha^2 - V^2}},$$
$$\omega_k = \frac{1}{\alpha l}\sqrt{\alpha^2 - V^2} \cdot \sqrt{l^2\gamma^2\delta^2 + \pi^2 k^2(\alpha^2 - V^2)}. \qquad (8)$$

Для визначення хвильового числа поперечної хвилі δ припускаємо, що впоперек срічки поміщається ціле число півхвиль. У цьому випадку хвильове число δ приймає значення $\delta = \dfrac{b}{m\pi}$ (b – ширина стрічки, $m = 1,2,..$).

Таким чином, незбурений одночастотний процес, який відповідає крайовій задачі (1),(2) описується співвідношенням

$$u_k(t,x,y)=a_k\left[\cos\left(\left(\frac{k\pi}{l}+\frac{V}{\alpha}\Delta_k\right)x+\frac{m\pi}{b}y+\frac{\alpha^2-V^2}{\alpha}\Delta_k t+\varphi_k\right)-\right.$$

$$\left.-\cos\left(\left(\frac{k\pi}{l}-\frac{V}{\alpha}\Delta_k\right)x-\frac{m\pi}{b}y-\frac{\alpha^2-V^2}{\alpha}\Delta_k t-\varphi_k\right)\right], \tag{9}$$

де

$$\Delta_k=\frac{\sqrt{l^2\gamma^2\delta^2+\pi^2k^2(\alpha^2-V^2)}}{l\sqrt{\alpha^2-V^2}}.$$

Із врахуванням того, що незбурена крайова задача є лінійною, можемо записати і загальний її розв'язок, який відповідає багаточастотному процесу

$$u(t,x,y)=\sum_{k=1}a_k\left[\cos\left(\left(\frac{k\pi}{l}+\frac{V}{\alpha}\Delta_k\right)x+\frac{m\pi}{b}y+\frac{\alpha^2-V^2}{\alpha}\Delta_k t+\varphi_k\right)-\cos\left(\left(\frac{k\pi}{l}-\frac{V}{\alpha}\Delta_k\right)x-\frac{m\pi}{b}y-\frac{\alpha^2-V^2}{\alpha}\Delta_k t-\varphi_k\right)\right],$$

в якому a_k, φ_k – знаходяться із початкових умов. Така задача може бути об'єктом окремих досліджень. Нижче ж побудуємо розв'язок збуреної крайової задачі, який близький до однієї із форм одночастотних коливань незбуреної задачі, тобто наперед вважатимемо, що початкові умови забезпечують його існування.

Збурене рівняння. Існують різні підходи побудови асимптотичних наближень [10-12] для дослідження впливу збурень на рух (правої частини рівняння (1)). Нижче будемо розглядати випадок, який стосується так званих «коротких систем» [13,14]. Для вказаного типу динамічних процесів параметри амплітуди та початкові фази прямої і відбитої хвиль змінюються лише в часі, одночасно хвильові числа є сталими. Такий підхід є дещо простішим при побудові розв'язків відповідних крайових задач, хоча із практичної сторони є не менш важливим.

На наш погляд найбільш простим і зручним для застосування в інженерних розрахунках є метод, який базується на основній ідеї Ван-дер-Поля [15]. Його суть полягає в тому, що у першому наближенні збуреної крайової задачі можна співвідношення (9) також трактувати за розв'язок, із тією лише різницею, що параметри a і φ будуть невідомими функціями часу. Таким чином перше одночастотне наближення рівняння (1) за крайових умов (2) будемо шукати у вигляді

$$u(t,x,y)=a(t)\left[\cos\left(\left(\frac{k\pi}{l}+\frac{V}{\alpha}\Delta\right)x+\frac{m\pi}{b}y+\frac{\alpha^2-V^2}{\alpha}\Delta t+\varphi(t)\right)-\cos\left(\left(\frac{k\pi}{l}-\frac{V}{\alpha}\Delta\right)x-\frac{m\pi}{b}y-\frac{\alpha^2-V^2}{\alpha}\Delta t-\varphi(t)\right)\right] \tag{10}$$

Шляхом диференціювання (10) по незалежних змінних, маємо

$$u_t=a\omega[-\sin(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-\sin(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]+a_t[\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]-$$
$$-a\varphi_t[\sin(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)+\sin(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)];$$

$$u_{tt}=a_{tt}[\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]+a\varphi_{tt}[\sin(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)+\sin(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]$$
$$-a(\varphi_t)^2[\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]-2a_t\varphi_t[\sin(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)+\sin(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]-$$
$$-2\omega a\varphi_t[\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]-a\omega^2[\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)];$$

$$u_{xt}=a\omega[-\kappa\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-\chi\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]$$
$$-a_t[\kappa\sin(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-\chi\sin(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]-a\varphi_t[\kappa\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)+\chi\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)];$$

$$u_{xx}=a[-\kappa^2\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)+\chi^2\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)];$$

$$u_{yy}=a[-\delta^2\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)+\delta^2\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)]; \tag{11}$$

Правою частиною диференціального рівняння (1) є аналітична функція, яка вказує на малу величину максимального значення нелінійних сил порівняно із силою натягу гнучкого елемента. Як показано у [10,11], мале збурення в автономних системах (саме такою є і вихідна система) викликає повільну зміну в часі амплітуди і початкової фази коливань. Це для розглядуваного наближення дозволяє знехтувати доданками порядку малини ε^2, тобто доданками пропорційними a_{tt}; φ_{tt}; $(\varphi_t)^2$; $a_t\varphi_t$

Таким чином із (1) та (11), зважаючи на вказане, отримаємо для визначення закону зміни амплітуди і фази хвиль диференціальне співвідношення:

$$\dot{a}\{-2\omega\sin(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-2\omega\sin(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)-2V\kappa\sin(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)+2V\chi\sin(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)\}+$$
$$a\dot{\varphi}\{-2\omega\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)+2\omega\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)-2V\kappa\cos(\kappa l+\delta y+\omega t+\varphi)-2V\chi\cos(\chi l-\delta y-\omega t-\varphi)\}=$$
$$=\varepsilon\overline{f}(a,x,y,\psi), \tag{12}$$

де $\overline{f}(a,x,y,\psi)$. відповідає значенню функції $f(u,u_t,u_x,u_y,u_{xt},u_{xx},u_{xy})$ за умови, що u та її похідні визначаються відповідно до розв'язку незбуреної задачі. Ліву частину залежності (12) можна привести до вигляду

$$\begin{aligned}&\cos(\omega t+\varphi)\{\dot{a}[(-2\omega-2V\kappa)\sin(\kappa x+\delta y)+(-2\omega+2V\chi)\sin(\chi x-\delta y)]+\\&+a\dot{\varphi}[(-2\omega-2V\kappa)\cos(\kappa x+\delta y)+(2\omega-2V\chi)\cos(\chi x-\delta y)]\}+\\&+\sin(\omega t+\varphi)\{\dot{a}[(-2\omega-2V\kappa)\cos(\kappa x+\delta y)-(-2\omega+2V\chi)\cos(\chi x-\delta y)]+\\&+a\dot{\varphi}[-(-2\omega-2V\kappa)\sin(\kappa x+\delta y)+(2\omega-2V\chi)\sin(\chi x-\delta y)]\}=\varepsilon\overline{f}(a,x,y,\psi).\end{aligned} \tag{13}$$

Як випливає із асимптотичного наближення, яке будується, $\dot{a}$ та $\dot{\varphi}$ є повільно змінними функціями часу. Тому точність отриманих залежностей не зміниться, якщо праву і ліву частини (12) усереднити [16] по швидкій змінній $\psi=\omega t+\varphi$. Це дозволяє із (12) отримати систему диференціальних рівнянь відносно шуканих функцій

$$\begin{aligned}&\dot{a}[(-2\omega-2V\kappa)\sin(\kappa x+\delta y)+(-2\omega+2V\chi)\sin(\chi x-\delta y)]+\\&+a\dot{\varphi}[(-2\omega-2V\kappa)\cos(\kappa x+\delta y)+(2\omega-2V\chi)\cos(\chi x-\delta y)]=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f}(a,x,y,\psi)\cos\psi d\psi;\\&\dot{a}[(-2\omega-2V\kappa)\cos(\kappa x+\delta y)-(-2\omega+2V\chi)\cos(\chi x-\delta y)]+\\&+a\dot{\varphi}[-(-2\omega-2V\kappa)\sin(\kappa x+\delta y)+(2\omega-2V\chi)\sin(\chi x-\delta y)]=\frac{\varepsilon}{a\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f}(a,x,y,\psi)\sin\psi d.\end{aligned} \tag{14}$$

Зважаючи на те, що ми розглядаємо випадок коротких систем, для яких $a=a(t)$ та $\varphi=\varphi(t)$, із (14) маємо

$$\begin{aligned}\dot{a}=&\frac{-\varepsilon}{2\pi lb[(\omega+V\kappa)^2+(\omega-V\chi)^2]}\times\int_0^b\int_0^l\Bigg([(\omega+V\kappa)\sin(\kappa x+\delta y)+(\omega-V\chi)\sin(\chi x-\delta y)]\int_0^{2\pi}\overline{f}(a,x,y,\psi)\cos\psi d\psi+\\&+[(\omega+V\kappa)\cos(\kappa x+\delta y)-(\omega-V\chi)\cos(\chi x-\delta y)]\int_0^{2\pi}\overline{f}(a,x,y,\psi)\sin\psi d\psi\Bigg)dxdy;\\\dot{\varphi}=&\frac{\varepsilon}{2\pi lba[(\omega+V\kappa)^2+(\omega-V\chi)^2]}\times\int_0^b\int_0^l\Bigg([(\omega+V\kappa)\sin(\kappa x+\delta y)+(\omega-V\chi)\sin(\chi x-\delta y)]\int_0^{2\pi}\overline{f}(a,x,y,\psi)\sin\psi d\psi-\\&-[(\omega+V\kappa)\cos(\kappa x+\delta y)-(\omega-V\chi)\cos(\chi x-\delta y)]\int_0^{2\pi}\overline{f}(a,x,y,\psi)\cos\psi d\psi\Bigg)dxdy.\end{aligned} \tag{15}$$

Достовірність отриманих результатів підтверджується хоча б тим, що при $\gamma=0$ вони збігаються із відповідними залежностями отриманими для одновимірних систем [2,3], а при $V=0,\ \gamma=0$ – із відомими результатами, які стосуються нелінійного хвильового рівняння [11].

Використання методики проілюструємо на прикладі коливань гнучкого елемента за умови, що його пружні властивості описуються нелінійним технічним законом [17]. Праву частину рівняння (1) у вказаному випадку можна представити у вигляді $\varepsilon\Theta u_x^2u_{xx}$, де Θ – деяка стала. Для вказаного випадку АЧХ коливань визначаються залежностями

$$\frac{da}{dt}=0; \quad \frac{d\psi}{dt}=\frac{\varepsilon}{2\pi a\left[(\omega+V\kappa)^2+(\omega-V\chi)^2\right]}\times\int_0^b\int_0^l\Big(\left[(\omega+V\kappa)\sin(\kappa x+\delta y)+(\omega-V\chi)\sin(\chi x-\delta y)\right]\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}9\left(-a\kappa^2\cos(\kappa x+\delta y+\psi)+a\chi^2\cos(\chi x-\delta y-\psi)\right)\cdot\left(-a\kappa\sin(\kappa x+\delta y+\psi)+a\chi\sin(\chi x-\delta y-\psi)\right)^2\sin\psi d\psi-$$

$$-\left[(\omega+V\kappa)\cos(\kappa x+\delta y)-(\omega-V\chi)\cos(\chi x-\delta y)\right]\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}9\left(-a\kappa^2\cos(\kappa x+\delta y+\psi)+a\chi^2\cos(\chi x-\delta y-\psi)\right)\cdot\left(-a\kappa\sin(\kappa x+\delta y+\psi)+a\chi\sin(\chi x-\delta y-\psi)\right)^2\cos\psi d\psi\Big)dxdy$$

Нижче на рис.1 представлено залежність частоти коливань від швидкості поздовжніх коливань та довжини гнучкого елемента, а на рис.2 — від параметра γ та l.

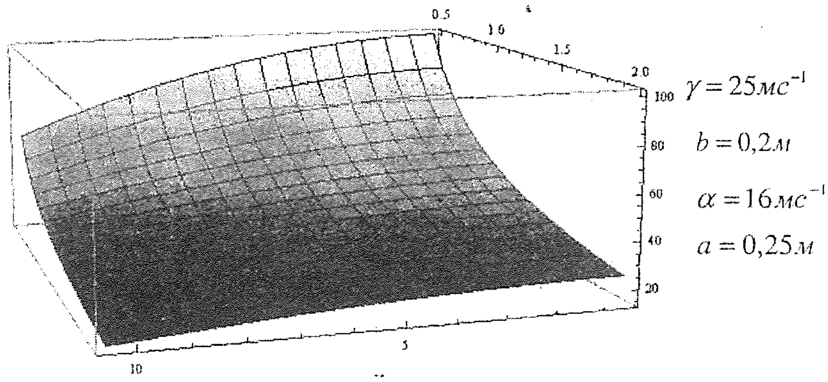

Рис.1. *Вплив швидкості поздовжнього руху та довжини гнучкого елемента на частоту коливань*

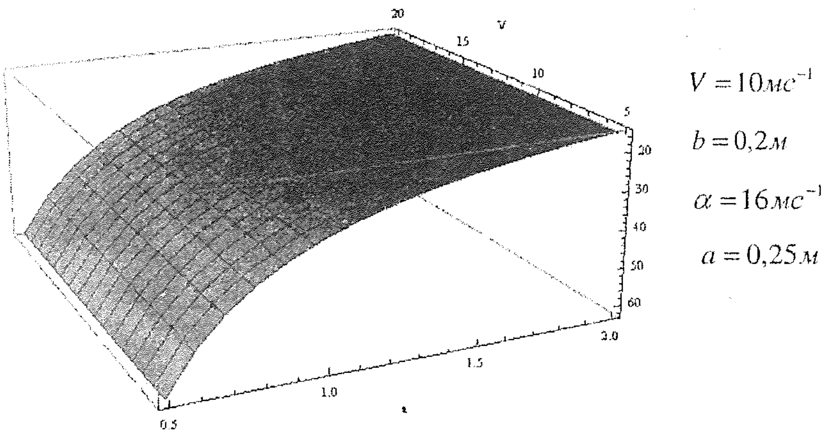

Рис.2. *Вплив довжини гнучкого елемента та параметра γ на частоту коливань*

Висновки

Розроблена методика дозволяє отримати аналітичні залежності, що визначають вплив нелінійних сил на амплітуду і частоту власних коливань гнучких елементів систем приводів та транспортування. Вона показує, що із зростанням швидкості поздовжнього руху частота власних коливань лінійної моделі систем спадає і за швидкості поздовжнього руху $V=\alpha$ проходить зрив коливань. Що стосується нелінійних моделей, то частота власних коливань у загальному випадку залежить ще і від амплітуди і для «м'яких» систем вона із ростом амплітуди зменшується і навпаки для «жорстких» – зростає. Останні властивості слід враховувати при дослідженні неавтономних систем, зокрема, резонансних явищ. Останнє може бути предметом окремого дослідження.

Список літератури:

1. Найфэ А.Х. Методы возмущений [пер. с англ. А.А. Мелиняна и А.А. Миронова. Под ред. Ф. Л. Черноуського]. – М.: Мир, 1976. – 456 с.

2. Харченко Є.В. Коливання рухомих нелінійно пружних середовищ і асимптотичний метод у їх дослідженні / Є.В. Харченко, М.Б. Сокіл. // Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів: НЛТУУ, 2006. – Вип. 16.1. – С. 134–138.

3. Поперечні коливання нелінійно пружного середовища і метод Д'Аламбера у їх дослідженні / Сокіл Б.І., Сеник А.П., Сокіл М.Б., Назар І.І. // Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. Вісник Національного університету "Львівська політехніка" № 509. – Львів: НУ "Львівська політехніка", 2004. – С. 104–109.

4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.:Мир. – 1977. – 662 с.

5. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. — М.: Мир, 1988.

6. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

7. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

8. Зельдович Я.Б. Элементы математической физики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. – М., Наука, 1973. – 352 с.

9. Сокіл М.Б. Хвильова теорія у дослідженні коливань систем, які характеризуються сталою складовою швидкості руху / М.Б. Сокіл, А.П.Сеник, Б.І.Сокіл // ЕМТ перша Міжнар. наук. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених "Інженерна механіка та транспорт 2010

10. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов., Ю.А. Митропольский. – М.: Наука. – 1974. – 501 с.

11. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков.- Киев: Вища школа, 1976. – 684 с.

12. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы / В.П. Маслов. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 312 с.

13. Рабинович М.И. Введение в теорию колебаний и волн / М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. – М.: Наука. – 1992. – 542 с.

14. Рабинович М.И. Об асимптотических решениях нелинейных уравнений в частных производных / М.И.Рабинович, Л.А. Розенблюм // ПММ. – 1972. – 36. – №2. – С.330-343.

15. Wan der Pol. A Teory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations // Radio Review. – №1. – 1920

16. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский. – Киев: Наукова думка. – 1971. – 440 с.

17. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер. – М.: ИЛ. – 1961. – 777 с.

Б.И. Сокил, д-р техн. наук, профессор[1,2], О.И. Хитряк[1], М.Б. Сокил, канд. техн. наук[3]
([1]Академия сухопутных войск им. гетмана П. Сагайдачного, Львов
[2]Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности
[3]Национальный Университет «Львовская политехника»)

ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУМЕРНЫХ ТЕЛ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Изложена методика исследования динамических процессов в двумерных гибких телах, которые двинуться с постоянной составляющей продольной скорости. В ее основу положена концепция волновой теории движения и основные идеи методов возмущений для слабо нелинейных систем. Получены соотношения, которые определяют основные характеристики волн для линейных и нелинейных математических моделей процесса.

Ключевые слова: нелинейные колебания, волновая теория, матод Ван-дер-Поля.

B.I. Sokil, Doctor of Sciences (Engineering), Professor[1,2],
O.I Khytryak[1], M.B. Sokil, Candidate of Sciences (Engineering)[3]
([1]Hetman Petro Sahaydachny Land Forces Academy, Lviv
[2]Lviv State University Vital Activity Safety
[3]Lviv Polytechnic National University)

WAVE THEORY OF MOTION IN THE STUDY OF NONLINEAR VIBRATIONS OF TWO-DIMENSIONAL BODIES, CHARACTERIZED BY THE CONSTANT VELOCITY OF LONGITUDINAL RATE OF MOVEMENT

The technique of studying dynamic processes in the two-dimensional flexible bodies, which are characterized by a constant component of the velocity of longitudinal motion. It is based on the concept of the wave theory of movement and the basic ideas of the perturbation method for weakly nonlinear systems. The relations that define the basic characteristics of waves in linear and nonlinear mathematical models of the process.

Key words: nonlinear vibration, wave theory, matod of Wan der Pol.

❖ ❖ ❖