


*Р. М. Тацій, А. С. Лин, О. Ю. Пазен, Т. Г. Бережанський*  
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна*  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7764-2528> – Р. М. Тацій  
<https://orcid.org/0000-0002-4012-4556> – А. С. Лин  
<https://orcid.org/0000-0003-1655-3825> – О. Ю. Пазен  
<https://orcid.org/0000-0002-1290-706X> – Т. Г. Бережанський  
 [opazen@gmail.com](mailto:opazen@gmail.com)

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ОХОЛОДЖЕННЯ БАГАТОШАРОВОЇ СУЦІЛЬНОЇ СФЕРИЧНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

**Мета роботи.** Метою роботи є дослідження процесу охолодження сферичної конструкції «куля всередині багатошарової сферичної оболонки».

**Методи дослідження.** У роботі використано ідею граничного переходу, яка реалізується через постановку допоміжної задачі про визначення розподілу нестационарного температурного поля у багатошаровій порожнистій сферичній конструкції з «вилученою» кулею достатньо малого радіуса. Умова симетрії замінюється на нульову крайову умову другого роду. Реалізація розв'язку допоміжної задачі проводиться шляхом застосування методу редукції із використанням концепції квазіпохідних із застосуванням модифікованого методу власних функцій. Для знаходження остаточного розв'язку задачі вихідної задачі радіус вилученої кулі спрямовується до нуля.

**Результати.** Запропонована робота присвячена застосуванню прямого методу до дослідження процесів охолодження в системі сферичних тіл – «куля всередині багатошарової оболонки». Припускається що між шарами існує ідеальний тепловий контакт. У початковий момент часу зовнішня поверхня такої системи охолоджується до деякої постійної температури, яка є сталою протягом всього процесі охолодження. Охолодження проходить рівномірно, так що ізотерми всередині цієї конструкції являють собою концентричні сфери, тобто задача є симетричною і в такій постановці розв'язана вперше. Для розв'язування такої задачі паралельно ставиться допоміжна задача про визначення розподілу нестационарного температурного поля у багатошаровій порожнистій сферичній конструкції з «вилученою» кулею достатньо малого радіуса. При цьому умова симетрії вихідної задачі замінюється умовою другого роду на внутрішній поверхні цієї конструкції.

Для знаходження розв'язку вихідної задачі використано ідею граничного переходу шляхом прямування радіуса вилученої кулі до нуля. Встановлено, що при такому підході всі власні функції відповідної задачі на власні значення не мають особливостей в нулі, а це означає, що й розв'язки вихідної задачі є обмеженими у всій конструкції. Для ілюстрації запропонованого методу розв'язано модельний приклад про знаходження розподілу температурного поля у кулі в тришаровій оболонці з різними теплофізичними характеристиками матеріалів. Результати обчислень графіка зміни температури залежно від часу та просторової координати.

Зауважимо, що при цьому заміна крайової умови першого роду на будь яку іншу крайову умову (наприклад, третього роду) не впливає на схему розв'язування аналогічно поставлених задач.

**Ключові слова:** охолодження, граничний перехід, прямий метод, багатошарова суцільна куля, пожежна безпека.

*R. M. Tatsiy, A. S. Lyn, O. Y. Pazen, T. H. Berezhanskyi*  
*Lviv State University of Life Safety, Lviv, Ukraine*

## RESEARCH OF THE COOLING PROCESS OF MULTILAYER SOLID SPHERICAL SHELL

**Purpose.** The work aims to study the process of cooling the spherical structure "ball inside a multilayer spherical shell".

**Methodology.** The paper uses the idea of a boundary transition, which is realised through the solution of the auxiliary problem of determining the distribution of a nonstationary temperature field in a multilayer hollow plane of a structure with an "extracted" sphere of sufficiently small radius. The symmetry condition is replaced by the zero condition of the second kind. Implementation of the solution of the auxiliary problem by applying the method of reduction using the concept of quasi-derivatives using the modified method of eigenfunctions. To find the final solution of the problems of the original problem, the radius of the extracted sphere is directed to zero.

**Results.** The proposed work is devoted to the application of the direct method to the study of cooling processes in the system of spherical bodies - "ball inside a multilayer shell". It is assumed that there is a perfect thermal contact between the layers. At the initial point in time, the outer surface of such a system is cooled to a certain constant temperature, which is constant throughout the cooling process. The cooling takes place evenly so that the isotherms inside this structure are concentric spheres, i.e. the problem is symmetric and is solved for the first time in such a setting. To solve this problem, the auxiliary problem of determining the distribution of a nonstationary temperature field in a multilayer hollow spherical structure with an "extracted" sphere of a sufficiently small radius is set in parallel. The condition of symmetry of the initial problem is replaced by the condition of the second kind on the inner surface of this structure.

To find the solution to the original problem, we used the idea of a boundary transition by directing the radius of the extracted sphere to zero. It is established that with this approach all eigenfunctions of the corresponding problem have no singularities at zero, which means that the solutions of the original problem are limited in the whole construction. To illustrate the proposed method, a model example of finding the temperature field distribution in a sphere in a three-layer shell with different thermophysical characteristics of materials is solved. The results of calculations of the graph of temperature change depend on time and spatial coordinates.

Note that the replacement of the boundary condition of the first kind with any other boundary condition (for example, the third kind) does not affect the scheme of solving similar problems.

**Keywords:** cooling, boundary transition, direct method, multilayer solid sphere, fire safety.

**Постановка проблеми.** У зв'язку з невинним розвитком науки та техніки багатошарові конструктивні елементи набувають все більшої популярності. Це пов'язано з тим, що шаруватість такої структури дає можливість поєднати в собі різного роду механічні, теплофізичні та геометричні характеристики, які необхідно надати таким конструкціям. Так наприклад, чудовим взірцем є труобетонні конструкції, які через свою шаруватість мають набагато більшу міцність ніж сталь або бетон окремо.

Шаруваті конструкції можуть бути плоскими, циліндричними та сферичними. Прикладами таких сферичних шаруватих конструкцій є газгольдери, будинки-сфери, тепловідільні елементи кулястої форми в реакторах атомних електричних станцій тощо.

Дослідження процесів нагрівання та охолодження в таких конструкціях можуть розглядатися як часткові випадки загального процесу теплообміну. З точки зору пожежної безпеки такі задачі дозволяють досліджувати поведінку окремих конструктивних елементів під час розвитку пожежі та після її локалізації та ліквідації. У зв'язку з цим знаходження ефективних аналітичних методів дослідження процесів теплообміну є актуальною задачею.

Мета роботи – дослідити процес охолодження конструкції «куля всередині багатошарової сферичної оболонки».

**Аналіз літературних джерел.** Розв'язуванням задач теплообміну займається багато відомих вчених. Одні використовують точні аналітичні методи, інші – наближені числові. В роботі [1] досліджено процес розсіювання тепла від ізотермічної ребристої сфери під дією природної конвекції наближеними числовими методами. Переважна більшість таких робіт [2, 3, 4] присвячені лише дослідженню процесу теплообміну між середовищем та сферичною конструкцією.

Аналітичних досліджень про розподіл температурного поля всередині самої сферичної суцільної конструкції не так і багато. У своїй праці [5] Singh S. отримав аналітичний розв'язок поширення тепла у тришаровій порожнистій та твердій сферичній конструкції.

Одна з найпростіших задача на охолодження суцільної сферичної конструкції розв'язана в роботі [6]. В роботі [7] в системі «куля всередині багатошарової сферичної оболонки» досліджено нестационарне температурне поле із застосуванням прямого методу.

**Невирішені проблеми.** Аналітичні методи повинні застосовуватися до багатошарових конструкцій. Однак з огляду на вибір методу розв'язування кількість шарів, як правило, обмежується двома або трьома. Це зумовлено тим фактором, що збільшення кількості шарів призводить до громіздких обчислень. Тому проблема ефективного аналітичного розв'язку задач на охолодження конструкцій «куля всередині багатошарової сферичної оболонки» залишається актуальною.

**Вихідна задача.** Розглянемо сферичне суцільне тіло (кулю, яку надалі називатимемо ядром) радіусом  $r = r_1$  всередині багатошарової сферичної оболонки з радіусами шарів  $r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < r_n$ , між якими існує ідеальний тепловий контакт. Початкова температура такої системи тіл однакова і дорівнює  $T_0 = const$ . В початковий момент часу зовнішня поверхня  $r = r_n$  цієї системи тіл охолоджується до деякої температури  $T_c < T_0$ , яка підтримується сталою протягом всього процесу охолодження. Необхідно знайти розподіл температурного поля всередині такої конструкції в довільний момент часу. Охолодження проходить рівномірно, так що ізотерми всередині конструкції являють собою концентричні сфери, тобто температура залежить лише від радіус-вектора  $r$  та часу  $\tau$ .

Постановка такої задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності [6, 7]

$$c\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right),$$

$$r \in (0, r_n), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

з крайовою умовою першого роду,

$$T(r_n, \tau) = T_c, \quad (2)$$

умовою симетрії

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, \tau) = 0 \quad (3)$$

та початковою умовою відповідно

$$T(r, 0) = T_0. \quad (4)$$

Тут позначено:  $c$  – питома масова теплоємність, Дж/(кг·°C);  $r$  – радіус, м;  $T$  – температура, °C;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·°C);  $\rho$  – густина, кг/м<sup>3</sup>;  $\tau$  – час, с;  $T_c$  – температура зовнішньої поверхні конструкції, °C.

**Допоміжна задача.** Для того, щоб розв'язати поставлену задачу (1)-(4) у сферичній конструкції вилучимо з середини ядра кулю достатньо малого радіуса  $r = r_0$ , причому  $0 < r_0 < r_1$ . Розглянемо тепер мішану задачу теплопровідності у багатошаровій порожнистій сферичній конструкції. Для того, щоб розрізнити функцію розподілу температурного поля  $T(r, \tau)$  вихідної задачі від функції розподілу допоміжної задачі, позначатимемо останню через  $t(r, \tau)$ .

Для знаходження розподілу нестационарного температурного поля у багатошаровій порожнистій сферичній конструкції необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності [6]

$$c\rho \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right),$$

$$r \in (r_0, r_n), \quad \tau > 0, \quad (5)$$

Умову симетрії (3) змінимо на нульову крайову умову другого роду, тоді одержимо крайові умови для рівняння (5)

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial r}(r_0, \tau) = 0, \\ t(r_n, \tau) = T_c \end{cases} \quad (6)$$

та початкову умову

$$t(r, 0) = T_0. \quad (7)$$

Зауважмо, що розв'язок вихідної задачі (1)-(4) буде отримано з розв'язку задачі (5)-(7) шляхом граничного переходу при  $r_0 \rightarrow 0$ .

*Схема розв'язку допоміжної задачі.*

Позначимо,  $t^{[1]} = r^2 \lambda t'_r$  – квазіпохідна,  $\theta_i$  –

характеристична функція напіввідкритого проміжку

$$[r_i, r_{i+1}), \quad \text{тобто} \quad \theta_i(r) = \begin{cases} 1, & r \in [r_i, r_{i+1}), \\ 0, & r \notin [r_i, r_{i+1}), \end{cases}$$

$$\lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i, \quad c(r) \rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \rho_i \theta_i,$$

$$q_v(r) = \sum_{i=0}^{n-1} q_{vi} \theta_i, \quad \lambda_i > 0, \quad c_i \rho_i > 0, \quad \forall i = \overline{0, n-1},$$

$$\lambda_i, c_i, \rho_i, q_{vi} \in R.$$

Помноживши першу крайову умову (6) на  $\lambda r^2$ , отримаємо

$$\begin{cases} t^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ t(r_n, \tau) = T_c. \end{cases} \quad (8)$$

Аналогічно, як і в [7], розв'язок задачі (5)-(7) шукатимемо за допомогою методу редукції

$$t(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau), \quad (9)$$

де одна з функцій ( $u(r, \tau)$  або  $v(r, \tau)$ ) вибирається спеціальним чином, а інша вже визначається однозначно.

*Крайова задача для  $u(r, \tau)$  та мішана задача для  $v(r, \tau)$ .*

Як і вище, позначимо квазіпохідні  $r^2 \lambda u'_r = u^{[1]}$  та  $r^2 \lambda v'_r = v^{[1]}$ . Визначимо функцію  $u(r, \tau)$  як розв'язок крайової (квазістационарної) задачі з крайовими умовами

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\begin{cases} u^{[1]}(r_0) = 0, \\ u(r_n, \tau) = T_c. \end{cases} \quad (11)$$

Підставляючи (9) у рівняння (5), з урахуванням (10), послідовно отримуємо мішану задачу для знаходження функції  $v(r, \tau)$

$$c\rho \frac{\partial}{\partial \tau} (u + v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial}{\partial r} (u + v) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) - c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (12)$$

Оскільки крайові умови (11) для функції  $u(r, \tau)$  справджують крайові умови (8) для функції  $t(r, \tau)$ , отримаємо нульові крайові умови для визначення функції  $v(r, \tau)$ , тобто

$$\begin{cases} v^{[1]}(r_0, \tau) = 0, \\ v(r_n, \tau) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

а початкова умова набуде вигляду

$$v(r, 0) = T_0 - u(r, 0) \equiv T_0. \quad (14)$$

Схема побудови розв'язку задачі (10), (11) описана у [7]. Встановлено, що на кожному з проміжків  $[r_i, r_{i+1})$  розв'язок задачі (10), (11) зображується як вектор-функція  $\mathbf{u}_i(r, \tau)$ , де першою координатою є шукана функція  $u_i(r, \tau)$ , як розв'язок рівняння (10), а другою – її квазіпохідна

$$\mathbf{u}_i(r, \tau) = \mathbf{B}_i(r, r_i) \cdot \mathbf{B}(r_i, r_0) \cdot \mathbf{P}_0, \quad (15)$$

де  $\mathbf{P}_0$  – початковий вектор, який обчислюється за формулою

$$\mathbf{P}_0 = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{B}(r_n, r_0))^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}(\tau) = (0, T_c)^T.$$

$$\mathbf{B}_i(r, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{r - r_i}{\lambda_i r r_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(r_i, r_0) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=0}^{i-1} \frac{r_{k+1} - r_k}{\lambda_k r_{k+1} r_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Провівши відповідні математичні обчислення, встановлюємо, що вектор  $\mathbf{P}_0$  має вигляд

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} T_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Далі необхідно знайти функцію  $v(r, \tau)$  як розв'язок рівняння (12) з нульовими крайовими умовами (13) при початковій умові (14). Метод розв'язування такої задачі з використанням методу власних функцій описано в [7]. Тут лише слід зауважити, що:

1) характеристичне рівняння відповідної задачі на власні значення матиме вигляд

$$\det[P + Q \cdot B(r_n, r_0, \omega)] = 0, \quad (16)$$

де  $B(r_n, r_0, \omega) = \prod_{i=1}^n B_{i-1}(r_i, r_{i-1}, \omega)$ ,

$$B_i(r_{i+1}, r_i, \omega) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T =$$

$$= \left( \frac{\sin(\beta_0 r)}{\beta_0 r}, \frac{\beta_0 r \cos(\beta_0 \cdot r) - \sin(\beta_0 r)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T,$$

$$\mathbf{R}_{k0}(0, \omega_k) = (1, 0)^T$$

$$\mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_i(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_1, \omega_k) \cdot$$

$$\left( \frac{\sin(\beta_0 r_1)}{\beta_0 r_1}, \frac{\beta_0 r_1 \cos(\beta_0 \cdot r_1) - \sin(\beta_0 r_1)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T.$$

$$\beta_i = \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}}. \quad (17)$$

2) Власні вектори, побудова яких також описана у [7], мають вигляд

$$\mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, r_0, \omega_k) \cdot (1, 0)^T = (b_{11}^0, b_{21}^0)^T,$$

$$\mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_0, \omega_k) \cdot (1, 0)^T =$$

$$= \tilde{B}_{i-1}(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_1, \omega_k) \cdot (b_{11}^0, b_{21}^0)^T. \quad (18)$$

Розв'язок задачі (12)-(14) методом власних функцій зображується у вигляді

$$v(r, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(r, \tau) \cdot \theta_i,$$

$$v_i(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} \cdot R_{ki}(r, \omega_k), \quad (19)$$

де  $f_k$  коефіцієнти розвинення початкової умови в ряди Фур'є за системою власних функцій  $R_k(r, \omega_k)$ .

**Граничний перехід при  $r_0 \rightarrow 0$  та зображення розв'язку вихідної задачі (1)-(4).** На основі методу редукції розв'язок вихідної задачі зображується у вигляді

$$T(r, \tau) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} (u(r, \tau) + v(r, \tau)) \quad (20)$$

Відзначимо, що процедура граничного переходу буде здійснена лише для таких виразів, у яких можуть виникнути особливості при  $r_0 \rightarrow 0$

1) Значення початкового вектора  $\mathbf{P}_0$  після граничного переходу матиме вигляд:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} T_c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

а значення функції  $u(r, \tau)$ , на основі формул (15) та (21)  $u(r, \tau) = T_c$ .

2) Позначимо

$$B(r_n, r_1, \omega) = B_{n-1}(r_n, r_{n-1}, \omega) \cdot B_{n-2}(r_{n-1}, r_{n-2}, \omega) \cdot \dots \cdot$$

$$B_1(r_2, r_1, \omega) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Знайдемо вигляд характеристичного рівняння

$$\det[P + Q \cdot B(r_n, r_0, \omega)] =$$

$$= \det[P + Q \cdot B(r_n, r_1, \omega) \cdot B(r_1, r_0, \omega)] =$$

$$= \det \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -(c_{11} b_{11}^0 + c_{12} b_{21}^0) = 0,$$

або, з урахуванням позначень (17)

$$c_{11} \frac{\beta_0 r_0 \cos(\beta_0(r_1 - r_0)) + \sin(\beta_0(r_1 - r_0))}{\beta_0 r_1} + c_{12} \frac{(\omega c_0 \rho_0 r_1 r_0 + \lambda_0) \sin(\beta_0(r_{i+1} - r_i)) + (\beta_0 \lambda_0 (r_0 - r_1)) \cos(\beta_0 \cdot (r_1 - r_0))}{\beta_0} = 0 \quad (22)$$

На основі виразу (22) отримуємо характеристичне рівняння (16) після граничного переходу:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \det = c_{11} \cdot \frac{\sin(\beta_0(r_1))}{\beta_0 r_1} + c_{12} \cdot \frac{\beta_0 r_1 \cos(\beta_0 \cdot r_1) - \sin(\beta_0 r_1)}{\beta_0} \cdot \lambda_0 = 0, \quad (23)$$

3) Відповідні власні вектори (18) після граничного переходу зображаться так:

$$\mathbf{R}_{k0}(r, \omega_k) = \tilde{B}_0(r, 0, \omega) \cdot (1, 0)^T = \left( \frac{\sin(\beta_0 r)}{\beta_0 r}, \frac{\beta_0 r \cos(\beta_0 \cdot r) - \sin(\beta_0 r)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T,$$

$$\mathbf{R}_{k0}(0, \omega_k) = (1, 0)^T$$

$$\mathbf{R}_{ki}(r, \omega_k) = \tilde{B}_i(r, r_{i-1}, \omega_k) \cdot \tilde{B}(r_{i-1}, r_1, \omega_k) \cdot$$

$$\left( \frac{\sin(\beta_0 r_1)}{\beta_0 r_1}, \frac{\beta_0 r_1 \cos(\beta_0 \cdot r_1) - \sin(\beta_0 r_1)}{\beta_0} \lambda_0 \right)^T.$$

На основі вище наведених формул можна зробити висновок, що функція  $T(r, \tau)$  є обмеженою та не має особливостей в точці  $r = 0$ .

**Модельний приклад.** Для ілюстрації запропонованого методу розглянемо модельний приклад про охолодження сферичної конструкції, яка складається з ядра всередині тришарової оболонки. Теплофізичні характеристики та геометричні розміри конструкції наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Теплотехнічні характеристики конструкції

Параметр	Ядро	Шар 1	Шар 2	Шар 3
Радіус $r$ , м	$r_0 = 0,03$	$r_1 = 0,08$	$r_2 = 0,1$	$r_3 = 0,15$
Коефіцієнт теплопровідності $\lambda$ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$	209	2,91	34,6	58
Питома масова теплоємність $c$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$	894	837	130	470
Густина $\rho$ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	2680	2800	11400	7800

Початкова температура сферичної конструкції  $850^\circ\text{C}$ . В початковий момент часу її зовнішня поверхня охолоджується до температури  $20^\circ\text{C}$ , яка підтримується сталою протягом всього процесу охолодження. Необхідно знайти розподіл нестационарного

температурного поля вздовж радіуса багатшарової сферичної конструкції. Використавши вищеписаний метод, який реалізовано у системі комп'ютерної алгебри Maple 13, отримуємо розв'язок поставленої задачі у вигляді графіка (рис. 1).

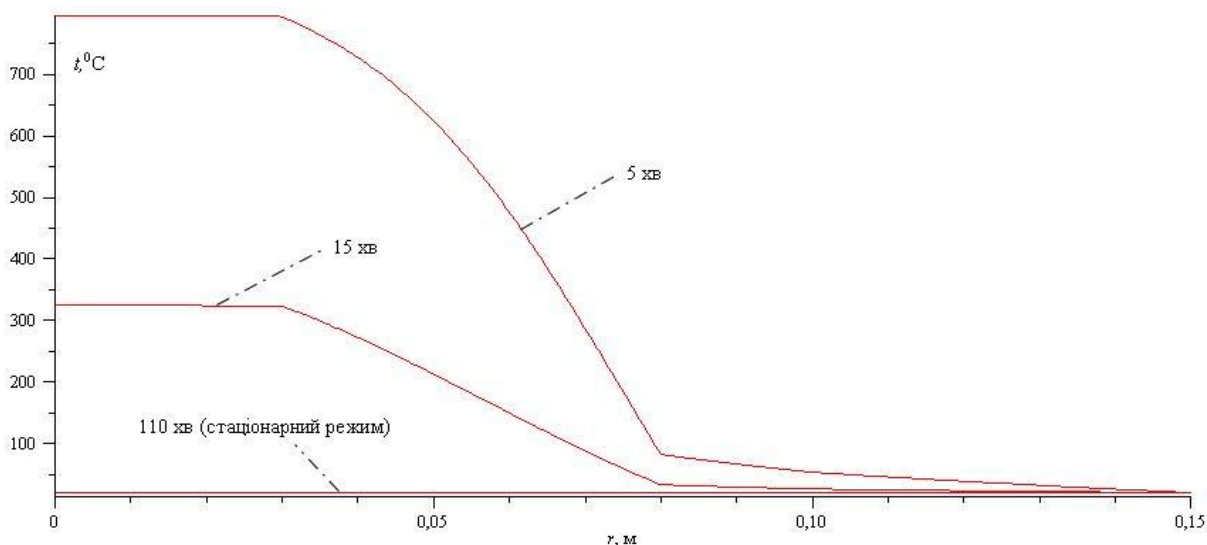


Рисунок 1 – Розподіл нестационарного температурного поля сферичної конструкції

Оскільки температура зовнішньої поверхні є сталою величиною і не змінюється у часі, то природньо що процес охолодження перейде з нестационарного режиму до стаціонарного. Час повного охолодження сферичної конструкції до температури 20 °С становить 110 хв.

**Висновки.** В роботі розв'язана задача про охолодження конструкції «куля всередині багат шарової сферичної оболонки», при цьому застосовано прямий метод дослідження процесів теплообміну в багат шарових тілах.

Використано ідею граничного переходу шляхом прямування радіуса «вилученої» кулі до нуля. Встановлено, що при такому підході всі відповідні функції не мають особливостей в нулі, а це означає, що й розв'язок вихідної задачі є обмеженим. В якості ілюстрації розглянуто модельний приклад про охолодження ядра в три шаровій сферичній оболонці.

В майбутніх дослідженнях слід врахувати наявність внутрішніх джерел тепла та умови неідеального теплового контакту між шарами.

#### Список літератури:

1. Garnayak, S., & Rath, S. (2021). Numerical Computation on Natural Convection Heat Transfer From an Isothermal Sphere With Semicircular Ribs. *Journal of Heat Transfer*, 143(9). <https://doi.org/10.1115/1.4051603>
2. Wang, J., Yang, J., Cheng, Z., Liu, Y., Chen, Y., & Wang, Q. (2018). Experimental and numerical study on pressure drop and heat transfer performance of grille-sphere composite structured packed bed. *Applied Energy*, 227, 719-730. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.07.140>
3. Duan, Z., He, B., & Duan, Y. (2015). Sphere drag and heat transfer. *Scientific reports*, 5(1), 1-7. DOI: 10.1038/srep12304
4. Mishra, G., & Chhabra, R. P. (2021). Influence of flow pulsations and yield stress on heat transfer from a sphere. *Applied Mathematical Modelling*, 90, 1069-1098. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.003>
5. Singh S. Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer

sphere / Singh S, Jain PK, Rizwan Uddin // *Journal of Heat Transfer*. 2016. Vol. 138, Issue 10. – p.101301. <https://doi.org/10.1115/1.4033536>.

6. Kakac S, Yener Y., Naveira-Cotta C. *Heat conduction*, 5th ed., Taylor & Francis; 2018.

7. Tatsii R., Pazen O. (2019). Direct method of research of the temperature field in the system of multilayer spherical shell. *Scientific Journal of TNTU (Tern.)*, vol. 93, no 1, pp. 113-126. [https://doi.org/10.33108/visnyk\\_tntu2019.01.113](https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2019.01.113)

#### References:

1. Garnayak, S., & Rath, S. (2021). Numerical Computation on Natural Convection Heat Transfer From an Isothermal Sphere With Semicircular Ribs. *Journal of Heat Transfer*, 143(9). <https://doi.org/10.1115/1.4051603>

2. Wang, J., Yang, J., Cheng, Z., Liu, Y., Chen, Y., & Wang, Q. (2018). Experimental and numerical study on pressure drop and heat transfer performance of grille-sphere composite structured packed bed. *Applied Energy*, 227, 719-730. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.07.140>

3. Duan, Z., He, B., & Duan, Y. (2015). Sphere drag and heat transfer. *Scientific reports*, 5(1), 1-7. DOI: 10.1038/srep12304

4. Mishra, G., & Chhabra, R. P. (2021). Influence of flow pulsations and yield stress on heat transfer from a sphere. *Applied Mathematical Modelling*, 90, 1069-1098. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.003>

5. Singh S. Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere / Singh S, Jain PK, Rizwan Uddin // *Journal of Heat Transfer*. 2016. Vol. 138, Issue 10. – p.101301. <https://doi.org/10.1115/1.4033536>.

6. Kakac S, Yener Y., Naveira-Cotta C. *Heat conduction*, 5th ed., Taylor & Francis; 2018.

Tatsii R., Pazen O. (2019). Direct method of research of the temperature field in the system of multilayer spherical shell. *Scientific Journal of TNTU (Tern.)*, vol. 93, no 1, pp. 113-126. [https://doi.org/10.33108/visnyk\\_tntu2019.01.113](https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2019.01.113)

© Р. М. Тацій, А. С. Лин, О. Ю. Пазен,  
Т. Г. Бережанський, 2022.

**Науково-методична стаття.**

Надійшла до редакції 15.04.2022.

Прийнято до публікації 27.05.2022.