Вісник ЛДУБЖД
Bulletin of Lviv State University of Life Safety
https://journal.ldubgd.edu.ua/index.php/Visnuk
ISSN 2078-4643 (print), ISSN 2708-1389 (online)

UDC 004.6:656.01
DOI: 10.32447/20784643.30.2024.26

Л. П. Гащук[1], П. М. Гащук[1], І. Р. Вайда[2]
[1]Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна
[2]Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів, Україна
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5522-2757 – Л. П. Гащук
https://orcid.org/0000-0002-2345-4879 – П. М. Гащук
https://orcid.org/0000-0001-9437-9944 – І. Р. Вайда
petroh@meta.ua

АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ СТРУКТУРНИХ І РЕЖИМНИХ ІДЕНТИФІКАТОРІВ МАРШРУТІВ АВТОМОБІЛЬНИХ ПЕРЕВЕЗЕНЬ НА ОСНОВІ НЕ ЦІЛКОМ УПОРЯДКОВАНИХ БАЗ ДАНИХ

Вимірник середньої швидкости пересування автомобіля на маршруті цілком природно поєднує в собі у, так би мовити, консолідованому вигляді інформацію (дані) одночасно і стосовно структури маршруту, і стосовно швидкісних можливостей переміщення транспортного засобу окремими його ділянками. Але, досліджуючи і організовуючи транспортні процеси, було б дуже зручно оперувати даними про структурні особливості маршрутів і про їхні швидкісні потенції поокремо. Звісно, це істотно полегшило б нагромадження й аналіз «транспортних даних», але ціною цьому було б, звісно, лише наближене відображення транспортних ситуацій. Мета дослідження — віднайти можливість зручного для практичного використання алгоритму наближеного оцінювання середньої швидкости пересування автомобіля на маршруті зі штучним поділом характеристичних параметрів на структурні й швидкісні. Гіпотетично це можна здійснити, так би мовити, «вимірюванням» через нерівності.

Визначальним для оцінювання швидкости пересування вантажу маршрутом та визначення продуктивности автомобіля є середнє гармонічне значень швидкостей на окремих ділянках цього маршруту, зважених значеннями довжин цих ділянок. У разі маятникового маршруту — це елементарне середнє гармонічне.

Із використанням класичних нерівностей можна знайти змістовні границі значень фактичної середньої гармонічної швидкости, які виражаються через елементарні середні окремо шляхових і окремо швидкісних параметрів. Такі середні правлять за характеристичні параметри маршруту — шляхові й швидкісні.

В рамках обчислювальних операцій істинну середню гармонічну швидкість можна заступити середнім геометричним чи відповідною комбінацією елементарних середніх, покладаючись на ефект регресії даних до істинно середнього.

Ключові слова: автомобіль, маршрут, бази даних, продуктивність автомобіля, середні величини, шляховий характеристичний ідентифікатор, швидкісний характеристичний ідентифікатор

L. P. Hashchuk[1], P. M. Hashchuk[1], I. R. Vayda[2]
[1]Lviv State University of Life Safety, Lviv, Ukraine
[2]Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy, Lviv, Ukraine

ALGORITHM FOR DETERMINING STRUCTURAL AND MODE IDENTIFIERS OF ROAD TRANSPORTATION ROUTES BASED ON NOT COMPLETELY ORDERED DATABASES

The measure of the average speed of a vehicle on a route naturally combines, in a so-called consolidated form, information (data) both on the structure of the route and on the speed capacities of the vehicle along its individual sections. However, when studying and organizing transportation processes, it would be very convenient to operate with data on the structural features of routes and their speed potentials separately. Of course, this would greatly facilitate the accumulation and analysis of "transport data," but the price would be, of course, only an approximate reflection of transport situations. The purpose of the study is to find a practical algorithm for estimating the average speed of a vehicle on a route with an artificial division of characteristic parameters into structural and speed parameters. Hypothetically, this can be accomplished by so called "measuring" through inequalities.

The harmonic mean of the speeds on individual sections of the route, weighted by the lengths of these sections, is crucial for estimating the speed of cargo movement along the route and determining the vehicle's performance. In the case of a pendulum route, this is an elementary harmonic mean.

Using classical inequalities, it is possible to find meaningful bounds on the values of the actual harmonic mean velocity, which are expressed through elementary averages of individual path and individual speed parameters. Such averages are corrected for the characteristic parameters of the route - road and speed.

As part of computational operations, the true harmonic mean speed can be replaced by a geometric mean or an appropriate combination of elementary averages, relying on the effect of regressing the data to the true mean.

Keywords: motor car, route, databases, car performance, average values, road characteristic identifier, speed characteristic identifier

Вступ/зачин. Перевезення вантажів автомобільним транспортом здійснюють наперед укладеними за правилами певної вигоди маршрутами [1, 2]. Оптимальна маршрутизація — один з основних аспектів теорії транспортних процесів [3, 4]. Загалом, маршрут (нім. Marschroute від фр. Marsch — хід та route — шлях) — заздалегідь намічений чи згодом встановлений шлях пересування вантажів чи/та транспортних засобів. Тож маршрутом доречно називати вмотивовано окреслений путь пересування автомобіля (автотранспортного засобу) від автотранспортного підприємства (АТП) до початкового пункту завантаження через проміжні пункти прийняття/відправлення вантажів до кінцевого пункту вивантаження і знову до автотранспортного підприємства. Окресленість маршруту означає ще, що вказано конкретні ділянки доріг чи вулиць, якими автомобіль відвідує пункти призначення. Це напрямлений перелік пунктів прийняття/відправлення вантажів та доріг/вулиць, що їх сполучають. Вибір початкового пункту маршруту залежить часто від розташування АТП. Тому природно окреслювати маршрут саме з урахуванням нульових пробігів.

Використовують ще приблизно таке означення: маршрут перевезення — це вмотивовано окреслений путь пересування автомобіля від початкового пункту завантаження через пункти прийняття/відправлення вантажів знову до початкового пункту або ж лише до кінцевого пункту вивантаження, якщо путь розімкнутий. Але якщо автомобіль робить один чи декілька обертів, повертаючись кожного разу у початковий пункт, а от останній оберт, як зазвичай, завершує в автотранспортному підприємстві, вже не відвідуючи початковий пункт, то відповідно до цього означення доведеться визнати, що він пересувався двома маршрутами — замкнутим і розімкнутим.

Оцінювати маршрут так-чи-так доводиться за допомогою структурних і режимних параметрів [1, 2, 5]. Структурні параметри визначають здебільшого те, як будова (структурна складність) маршруту позначатиметься на ефективності транспортного процесу. Натомість режимні параметри мають характеризувати як інтенсивність пересування транспортних засобів окремими ділянками позначається на швидкості вантажного потоку і продуктивності автомобіля на маршруті загалом. Індикатором того, як себе проявляють ці параметри, є середня швидкість пересування транспортного засобу маршрутом. Через призму середнього здебільшого дивляться на все у світі. Для цього навіть слугує спеціальний підхід — «регресія до середнього».

Мета дослідження. Вимірник середньої швидкости пересування автомобіля на маршруті цілком природно поєднує в собі у, так би мовити, консолідованому вигляді інформацію (радше дані) одночасно і стосовно структури маршруту, і стосовно швидкісних можливостей переміщення транспортного засобу окремими його ділянками. Але, досліджуючи і організовуючи транспортні процеси, було б дуже зручно оперувати даними про структурні особливості маршрутів і про їхні швидкісні потенції по окремо. Звісно, це істотно полегшило б нагромадження й аналіз «транспортних даних», але ціною цьому було б, звісно, лише наближене відображення транспортних ситуацій. Мета дослідження — віднайти можливість зручного для практичного використання алгоритму наближеного оцінювання середньої швидкости пересування автомобіля на маршруті зі штучним поділом характеристичних параметрів на структурні й швидкісні. Гіпотетично це можна здійснити, так би мовити, «вимірюванням» через нерівності. Нерівності надзвичайно багато важать у функціональному аналізі, але стають також корисними і в технічному аналізі [6—8].

Поняття середнього в загальних рисах. Застосовують різні формальні означення середнього. За середнє n додатних чисел x_1, x_2, …, x_n можна взяти величину

$$M_p(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$$

окремі випадки якої відомі як:

$$M_{-\infty}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{p \to -\infty} \sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p} = \min(x_1, x_2, ..., x_n)$$

— те (чи ті) з n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, за яке (чи які) не менші усі інші;

$$M_{-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \qquad (1)$$

— середнє гармонічне (HM);

$$M_0(x_1,x_2,...,x_n)=\lim_{p\to 0}\sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^p}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i} \qquad (2)$$

— середнє геометричне (GM);

$$M_1(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (3)$$

— середнє арифметичне (AM);

$$M_2(x_1,x_2,...,x_n)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

— середнє квадратичне (RMS);

$$M_{+\infty}(x_1,x_2,...,x_n)=\lim_{p\to+\infty}\sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^p}=\max(x_1,x_2,...,x_n)$$

— те (чи ті) з n чисел $x_1,x_2,...,x_n$, котрого (чи котрих)) не перевершують усі інші.

Якщо $p<q$, то

$$M_p(x_1,x_2,...,x_n)\le M_q(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (4)$$

(рівність справджується тільки у разі $x_1=x_2=...=x_n$). Остання нерівність випливає з того, що для дійсних p: $\frac{\partial M_p(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial p}\ge 0$.

Тож відповідно до (4), приміром,

$$\min(x_1,x_2,...,x_n)\le\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}\le\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n}\le$$

$$\le\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\le\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}\le\max(x_1,x_2,...,x_n). \qquad (5)$$

На рис. 1 — повсюдно відомі наочні приклади порівняння середніх двох відтинків $|AD|$ і $|DB|$ прямої чи двох додатних чисел a і b.

Співвідношення між арифметичним і геометричним середніми (5), зокрема, дозволяє виснувати твердження: у разі заданої суми n додатних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ добуток $x_1^{\nu_1}\cdot x_2^{\nu_2}\cdot...\cdot x_n^{\nu_n}$ ($\nu_1,\nu_2,...,\nu_n$ — довільно задані додатні раціональні числа) набуває найбільшого значення за умови

$$\frac{x_1}{\nu_1}=\frac{x_2}{\nu_2}=...=\frac{x_n}{\nu_n}.$$

Поняття арифметичного квазісереднього. Середнє арифметичне має вагоме значення у так званому квазітлумаченні. Так, квазіарифметичне середнє дійсних чисел x_1, x_2, …, x_n виражає формула

$$M_f(x_1,x_2,...,x_n)=f^{-1}\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\right),$$

де $f(\cdot)$ — неперервна строго монотонна функція, $f^{-1}(\cdot)$ — обернена до $f(\cdot)$ функція. Легко розпізнати такі величини:

у разі $f(x)=\frac{1}{x}$ — середнє гармонічне (HM)

$$M_{x^{-1}}(x_1,x_2,...,x_n)=M_{-1}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}; \quad (6)$$

у разі $f(x)=\log x$ — середнє геометричне (GM)

$$M_{\log x}(x_1,x_2,...,x_n)=M_0(x_1,x_2,...,x_n)=\sqrt[n]{\frac{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n}{n}}; \quad (7)$$

у разі $f(x)=x$ — середнє арифметичне (AM)

$$M_x(x_1,x_2,...,x_n)=M_1(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}; \quad (8)$$

у разі $f(x)=x^2$ — середнє квадратичне (RMS)

$$M_{x^2}(x_1,x_2,...,x_n)=M_2(x_1,x_2,...,x_n)=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}};$$

у разі $f(x)=x^p$, $p\ne 0$ — середнє степеневе

$$M_{x^p}(x_1,x_2,...,x_n)=M_p(x_1,x_2,...,x_n)=\left(\frac{x_1^p+x_2^p+...+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

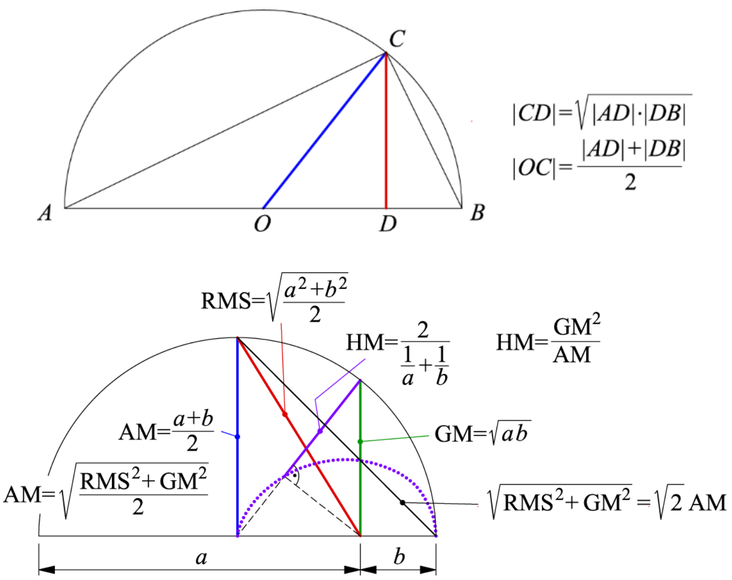

Рисунок 1 — Геометричне відображення співвідношення між деякими середніми двох додатних величин

Доведено, що кожна середня величина має вигляд саме функції $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо її властиві: 1) неперервність і монотонність за кожним x_i, $i=\overline{1,n}$; 2) симетричність (значення не змінюється у разі переставляння аргументів); 3) незмінність у разі заміни кожної величин з групи їх власним середнім.

В загальному випадку, до прикладу,

$$x_{srn} = \frac{m\frac{x_1+x_2+...+x_m}{m}+(n-m)\frac{x_{m+1}+x_{m+2}+...+x_n}{n-m}}{n} =$$

$$= \frac{mx_{srm}+(n-m)x_{sr(n-m)}}{n} \neq \frac{x_{srm}+x_{sr(n-m)}}{2},$$

якщо $n \neq 2m$. Тобто загальне середнє арифметичне (8) загалом не дорівнює звичному середньому арифметичному двох групових середніх арифметичних $x_{srm}, x_{sr(n-m)}$, але величина

$$\frac{mx_{srm}+(n-m)x_{sr(n-m)}}{n}$$

— це раціонально зважене середнє арифметичне цих величин (m/n, $(n-m)/n$ — раціональні числа). Оскільки величини $x_1, x_2, ..., x_n$ самі по собі також можуть бути якимись середніми, то це може створювати певні клопоти в ході аналізу процесів. Саме зважені (здебільшого не раціонально) фігурують в теоретичних дослідженнях і практичних застосунках.

Нерівності між середніми дуже часто дають цінні орієнтири.

Різним додатним числам $x_1, x_2, ..., x_n$ поставмо у відповідність, приміром, середні арифметичні y_k усіх можливих добутків по k цих чисел, $k=1,2,...,n$:

$$y_1 = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n},$$

$$y_2 = \frac{x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n}{\frac{n(n-1)}{2}},$$

....

$$y_n = x_1x_2...x_n.$$

Виявляється, що

$$y_1 \geq \sqrt{y_2}, \quad y_k^2 \geq y_{k-1}y_{k+1}, \; k=\overline{2,n-1};$$

$$\sqrt[k]{y_k} \geq \sqrt[k-1]{y_{k+1}}, \; k=\overline{2,n-1}.$$

Якщо, $x_1, x_2, ..., x_n$ і $y_1, y_2, ..., y_n$ — додатні числа, а $p>1$, $1/p+1/q=1$, то

$$x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n \leq$$

$$\leq (x_1^p+x_2^p+...+x_n^p)^{\frac{1}{p}}(y_1^q+y_2^q+...+y_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Рівність справджується тільки у разі

$$\frac{x_1^p}{y_1^q} = \frac{x_2^p}{y_2^q} = ... = \frac{x_n^p}{y_n^q}.$$

Джерелом нерівностей між середніми є ще такі міркування.

Позначмо

$$A_k = \frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}, \; G_k = \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k}; \quad (9)$$

$x_1, x_2, ..., x_k$ — додатні числа. Стосовно них справджується співвідношення $A_k \geq G_k$ — нерівність Коші (перетворюється на рівність тільки у разі $x_1 = x_2 = ... = x_k$). Між величинами (9), виявляється, існує «красиве» співвідношення

$$0 = A_1 - G_1 \leq 2(A_2 - G_2) \leq \cdots \leq (n-1)(A_{n-1}-G_{n-1}) \leq$$

$$\leq n(A_n - G_n), \quad (10)$$

зрозуміло, що й тут $A_k = G_k$ тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_k$ ($k=\overline{1,n}$).

Вираз (10) застосовний також до величин

$$A_{k\alpha} = \frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_kx_k}{\alpha k},$$

$$G_{k\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_k)^{\frac{1}{k}}(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k)^{\frac{1}{k}}$$

($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ — додатні числа, $\alpha = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k$). Отже в цьому випадку можна писати

$$0 \leq ... \leq (n-1)(A_{n-1}-G_{n-1}) \leq n(A_n - G_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq ... \leq \frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_{n-1}x_{n-1}}{\alpha} -$$

$$-\frac{n-1}{\alpha}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n}{\alpha} -$$

$$-\frac{n}{\alpha}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n)^{\frac{1}{n}}(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

У разі

$$A_{k\alpha} = \frac{1}{k\alpha}\left(\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+...+\frac{\alpha_k}{x_k}\right),$$

$$G_{k\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_k)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{x_k}\right)^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\frac{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_k)^{\frac{1}{k}}}{(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k)^{\frac{1}{k}}}$$

вираз (10) набирає вигляду

$$0 \leq ... \leq (n-1)(A_{n-1}-G_{n-1}) \leq n(A_n - G_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq ... \leq \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+...+\frac{\alpha_{n-1}}{x_{n-1}}\right) -$$

$$-\frac{n-1}{\alpha}\frac{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}{(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+...+\frac{\alpha_n}{x_n}\right) - \frac{n}{\alpha}\frac{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n)^{\frac{1}{n}}}{(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}}.$$

На підставі останнього співвідношення можна зокрема з'ясувати, що

$$X_h = \frac{\alpha}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}} \le$$

$$\le \frac{n}{\alpha}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_k)^{\frac{1}{k}} (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k)^{\frac{1}{k}} \le$$

$$\le \frac{\alpha}{n} \frac{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}}{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n)^{\frac{1}{n}}} = X_g$$

Легко бачити, що максимальне значення середнього гармонічного, так би мовити, «обрамляють» спочатку середнє геометричне, а далі — середнє арифметичне.

Модель маршруту перевезення. Транспортний (перевізний) процес складають низка повторюваних дій: подавання рухомого засобу до місця завантаження; власне завантажування вантажу на облавок транспортного засобу чи причіплювання заздалегідь завантаженого причепа або начіплювання заздалегідь завантаженого начепа (напівпричепа); переміщування вантажу у пункт його споживання; вивантажування вантажу чи відчіплювання причепа або напівпричепа (начепа). Сукупно ці дії утворюють доцільно завершену операцію достачання вантажу — перевізний цикл. Для зручності, коли нема потреби особливо вирізняти розвізні, збірні (звізні), розвізно-збірні (розвізно-звізні) маршрути всіх ї разом називатимемо однаково — розвізними.

Відобразімо (рис. 2) розвізний маршрут перевезень якнайзагальніше — пласким орієнтованим багатокутником *0—1—2…—n—0*, вершинам якого відповідають автотранспортне підприємство (АТП, перевізник — точка *0*) та пункти (осередки — точки *1*, *2*, …, *n*) продукування/споживання(завантаження/вивантаження) вантажів, а от сторонам цього багатокутника хай умовно відповідають ділянки шляху переміщення транспортного засобу та вантажів. Орієнтованість схемного маршруту означає, що автомобіль за домовленістю обходить його тільки в одному напрямі *0→1→2…→n→0*.

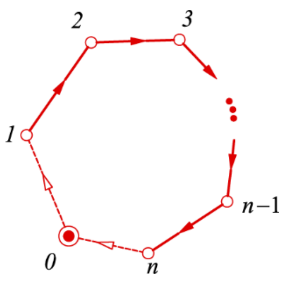

Рисунок 2 — Схема-розгортка перевізного циклу автомобіля

Зокрема, ділянку маршруту *0—1* (до першого пункту завантаження) довжиною l_{01} та завершальну ділянку маршруту *n—0* довжиною l_{n0} активний транспортний засіб долатиме марним ходом з деякими технічними швидкостями v_{01} та v_{n0} відповідно.

Позначмо через q_{ij} масу (і за потреби різновид) вантажу, що подається з пункту продукування i у пункт споживання j, а через l_{ik} — шлях між суміжними пунктами i та k продукування/споживання вантажу. В пункті *1* автомобілю буде надано вантаж (вантажі)

$$q_{12} + q_{13} + q_{14} + \ldots + q_{1n},$$

і вся його (їх) маса у незмінному складі подолає шлях l_{12} ділянкою *1—0* зазначеного маршруту. В пункті *2* автомобіль позбудеться вантажу q_{12} і прийме на облавок вантаж $q_{23} + q_{24} + q_{25} + \ldots + q_{2n}$. Тож далі вантаж у кількості

$$q_{13} + q_{14} + q_{15} + \ldots + q_{1n} + q_{23} + q_{24} + q_{25} + \ldots + q_{2n}$$

у незмінному складі подолає шлях l_{23} ділянкою *2—3*. В пункті *3* з автомобіля буде вилучено вантажі q_{13} і q_{23}, а взамін йому буде надано вантаж $q_{34} + q_{35} + q_{36} + \ldots + q_{3n}$. Тож сукупно в незмінному складі шлях l_{34} ділянкою *3—4* подолає вантаж у кількості

$$q_{14} + q_{15} + \ldots + q_{1n} + q_{24} + q_{25} + \ldots +$$
$$+ q_{2n} + q_{34} + q_{35} + q_{36} + \ldots + q_{3n}.$$

Тощо-тощо...

Отож маршрутом загалом буде перевезено вантажу в кількості

$$Q = q_{12} + q_{13} + q_{14} + \ldots + q_{1n} + q_{23} + q_{24} + q_{25} + \ldots +$$
$$+ q_{2n} + \ldots + q_{(n-2)(n-1)} + q_{(n-2)n} + q_{(n-1)n}$$

Вантажообіг (транспортна робота) при цьому становитиме

$$W = q_{12}l_{12} + q_{13}l_{13} + q_{14}l_{14} + \ldots + q_{1n}l_{1n} + q_{23}l_{23} + q_{24}l_{24} +$$
$$+ q_{25}l_{24} + \ldots + q_{2n}l_{2n} + \ldots + q_{(n-2)(n-1)}l_{(n-2)(n-1)} +$$
$$+ q_{(n-2)n}l_{(n-2)n} + q_{(n-1)n}l_{(n-1)n}.$$

На завантаження вантажу q_{ij} в пункті i потрібен якийсь час t'_{ij}, а тривалість вивантаження того самого вантажу в пункті j може становити t''_{ij}. Тож на реалізацію усіх операцій завантаження-вивантаження потрібен якийсь час

$$t_{\text{пр}} = t'_{12} + t''_{12} + t'_{13} + t''_{13} + \ldots + t'_{1n} + t''_{1n} + t'_{23} + t''_{23} + t'_{24} +$$
$$+ t''_{24} + \ldots + t'_{2n} + t''_{2n} + t'_{34} + t''_{34} + t'_{35} + t''_{35} + \ldots + t'_{3n} + t''_{3n} + \ldots +$$
$$+ t'_{(n-2)(n-1)} + t''_{(n-2)(n-1)} + t'_{(n-2)n} + t''_{(n-2)n} + t'_{(n-1)n} + t''_{(n-1)n}.$$

Тривалість перебування автомобіля в русі з вантажем можна визначити за формулою

$$t_r = \frac{l_{12}}{v_{12}} + \frac{l_{23}}{v_{23}} + \ldots + \frac{l_{(n-2)(n-1)}}{v_{(n-2)(n-1)}} + \frac{l_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}},$$

(v_{ij} — середня технічна швидкість пересування автомобіля з пункту i у пункт j), а тривалість марного руху автомобіля — за подібною формулою

$$t_0 = \frac{l_{01}}{v_{01}} + \frac{l_{n0}}{v_{n0}}.$$

Величину

$$v_{sr} = v_{\text{hm}r} = \frac{l_{1n}}{t_r} = \frac{l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-2)(n-1)} + l_{(n-1)n}}{\frac{l_{12}}{v_{12}} + \frac{l_{23}}{v_{23}} + \ldots + \frac{l_{(n-2)(n-1)}}{v_{(n-2)(n-1)}} + \frac{l_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}}} \quad (11)$$

є всі підстави називати зваженою гармонійною середньою швидкістю пересування вантажів, коли за ваги правлять шляхи l_{12}, l_{23}, …, $l_{(n-2)(n-1)}$, $l_{(n-1)n}$. Якщо б раптом справдилась умова $l_{12} = l_{23} = \ldots = l_{(n-2)(n-1)} = l_{(n-1)n}$, то v_{hm} збіглася б зі звичним гармонічним середнім (1), (6)

$$v_{\text{HM}} = \frac{n-1}{\frac{1}{v_{12}} + \frac{1}{v_{23}} + \ldots + \frac{1}{v_{(n-2)(n-1)}} + \frac{1}{v_{(n-1)n}}}$$

величин v_{12}, v_{23}, …, $v_{(n-2)(n-1)}$, $v_{(n-1)n}$.

Подібно можна ввести поняття середньої (зваженої гармонійної) технічної швидкости марного (чи нульового) ходу автомобіля

$$v_{\text{hm}0} = \frac{l_{01} + l_{n0}}{t_0} = \frac{l_{01} + l_{n0}}{\frac{l_{01}}{v_{01}} + \frac{l_{n0}}{v_{n0}}} \quad (12)$$

та поняття середньої (зваженої гармонічної) технічної швидкости усього загалом пересування автомобіля (не тільки з вантажем, не тільки марним ходом) в транспортному виряді (вирядженні)

$$V_{\text{hm}} = \frac{l_{01} + l_{1n} + l_{n0}}{t_r + t_0} =$$

$$= \frac{l_{01} + l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-2)(n-1)} + l_{(n-1)n} + l_{n0}}{\frac{l_{01}}{v_{01}} + \frac{l_{12}}{v_{12}} + \frac{l_{23}}{v_{23}} + \ldots + \frac{l_{(n-2)(n-1)}}{v_{(n-2)(n-1)}} + \frac{l_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}} + \frac{l_{n0}}{v_{n0}}}. \quad (13)$$

Величини (11), (12) і (13) можна називати швидкісними характеристиками маршруту перевезень. Вони ж бо дають можливість оцінювати швидкісні режими переміщення вантажів на конкретному маршруті.

Середнє гармонічне задовольняє низку класичних нерівностей, окремі з яких стосовно (11) мають вигляд (якщо не всі v_{12}, v_{23}, …, $v_{(n-2)(n-1)}$, $v_{(n-1)n}$ однакові):

$$v_{\text{hm}r} = \frac{l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}}{\frac{l_{12}}{v_{12}} + \frac{l_{23}}{v_{23}} + \ldots + \frac{l_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}}} <$$

$$< \exp\frac{l_{12}\ln v_{12} + l_{23}\ln v_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}\ln v_{(n-1)n}}{l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}} <$$

$$< \frac{l_{12}v_{12} + l_{23}v_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}v_{(n-1)n}}{l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}} = v_{\text{am}r}, \quad (14)$$

$$\exp\frac{l_{12}\frac{\ln v_{12}}{v_{12}} + l_{23}\frac{\ln v_{23}}{v_{23}} + \ldots + l_{(n-1)n}\frac{\ln v_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}}}{\frac{l_{12}}{v_{12}} + \frac{l_{23}}{v_{23}} + \ldots + \frac{l_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}}} <$$

$$< \frac{l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}}{\frac{l_{12}}{v_{12}} + \frac{l_{23}}{v_{23}} + \ldots + \frac{l_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}}} = v_{\text{hm}r}.$$

Ці нерівності, як і багато інших, випливають з такого твердження: якщо функція $\varphi(x)$ в інтервалі $[m, M]$ двічі диференційовна і $d^2\varphi(x)/dx^2 > 0$ (а отже гладка й опукла), то для будь-яких додатних a_1, a_2, …, a_n

$$\varphi\left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\right) \le$$

$$\le \frac{a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2) + \ldots + a_n\varphi(x_n)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n};$$

рівність виникає тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Доводять це, покладаючи

$$\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = M,$$

та записуючи

$$\varphi(x_\nu) = \varphi(M) + (x_\nu - M)\frac{d\varphi(M)}{dx} + \frac{(x_\nu - M)^2}{2}\frac{d^2\varphi(M)}{dx^2},$$

звідки (якщо хоча б одне з чисел $x_\nu - M$ не дорівнює нулю)

$$\frac{a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2) + \ldots + a_n\varphi(x_n)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} =$$

$$= \varphi(M) + \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{(x_\nu - M)^2}{2}\frac{d^2\varphi(x_\nu)}{dx^2}}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu} > \varphi(M)$$

Вираз

$$v_{\text{am}r} = \frac{l_{12}v_{12} + l_{23}v_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}v_{(n-1)n}}{l} \quad (15)$$

— це, зрозуміло, середнє арифметичне зважених шляхом величин v_{12}, v_{23}, …, $v_{(n-2)(n-1)}$, $v_{(n-1)n}$, що узагальнює примітивне середнє арифметичне (3), (8). Отже фактична середня швидкість пересування автомобіля радше завжди менша за середню арифметичну (див. (14)). Тут $l = l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-2)(n-1)} + l_{(n-1)n}$. Не менш важливим і корисним є середнє геометричне зважених шляхом величин v_{12}, v_{23}, …, $v_{(n-2)(n-1)}$, $v_{(n-1)n}$

$$v_{\text{gm}r} = \sqrt[n-1]{\frac{l_{12}v_{12}}{l} \cdot \frac{l_{23}v_{23}}{l} \cdot \ldots \cdot \frac{l_{(n-1)n}v_{(n-1)n}}{l}} =$$

$$= \frac{1}{l} \cdot \sqrt[n-1]{l_{12} \cdot l_{23} \cdot \ldots \cdot l_{(n-1)n}} \cdot \sqrt[n-1]{v_{12} \cdot v_{23} \cdot \ldots \cdot v_{(n-1)n}}, \quad (16)$$

що узагальнює середнє геометричне (2), (7).

Маятниковий цикл. Звернімося до моделі найпростішого маятникового циклу (виряду), рис. 3. Автомобіль здійснює n разів перевезення вантажу з пункту його продукування *1* у пункт його споживання *2* — кожного разу в кількості q (рис. 3*а*). Прямий і зворотний шляхи однакові — завдовжки l, шляхи марного ходу з АТП на маршрут і з маршруту в АТП — відповідно l_0' і l_0''. Швидкість руху порожнього автомобіля v' дещо вища за швидкість v'' руху завантаженого автомобіля (тут важливо, що вони неоднакові).

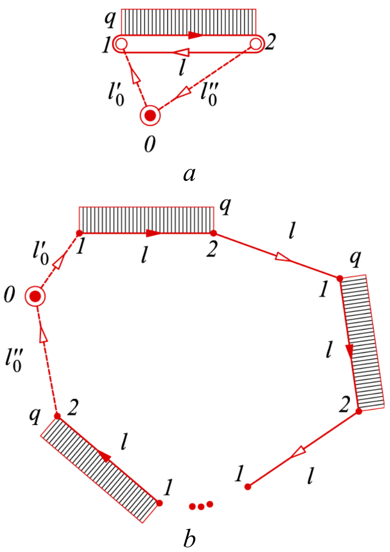

Рисунок 3 — Схема маятникового циклу і його розгортка

Маятниковий цикл, взагалі кажучи, можна трактувати як кільцевий (рис. 3*б*), на окремих ділянках якого перевозиться «нуль вантажу». Легко з'ясувати, що маршрутом загалом буде перевезено вантажу

$$Q = nq\,,$$

виконано транспортну роботу

$$W = nql\,,$$

подолано маршрутний шлях

$$L = (2n-1)l$$

і загальний, цикловий шлях

$$L_c = l_0' + (2n-1)l + l_0''\,.$$

Якщо t_{pr} — сумарна тривалість одного завантаження-вивантаження вантажу, то загальний технологічний простій автомобіля становитиме $T_{pr} = nt_{pr}$. Відтак тривалість перебування автомобіля в русі на маршруті, тривалість роботи автомобіля на маршруті, тривалість циклу відповідно визначають формули

$$T = \left(\frac{n-1}{v'} + \frac{n}{v''}\right)l\,, \quad T_m = \left(\frac{n-1}{v'} + \frac{n}{v''}\right)l + nt_{pr}\,,$$

$$T_c = \left(\frac{n-1}{v'} + \frac{n}{v''}\right)l + \frac{l_0' + l_0''}{v'} + nt_{pr}\,.$$

Вантажну продуктивність маршруту визначають як

$$P_{Qm} = \frac{Q}{T} = \frac{nq}{\left(\frac{n-1}{v'} + \frac{n}{v''}\right)l + nt_{pr}}\,,$$

а загальну вантажну продуктивність автомобіля — за формулою

$$P_{Qc} = \frac{Q}{T_c} = \frac{nq}{\left(\frac{n-1}{v'} + \frac{n}{v''}\right)l + \frac{l_0' + l_0''}{v'} + nt_{pr}}\,.$$

Подібно визначають транспортну продуктивність маршруту (автомобіля на маршруті) і транспортну продуктивність автомобіля (циклу):

$$P_{Wm} = \frac{W}{T} = \frac{nql}{\left(\frac{n-1}{v'} + \frac{n}{v''}\right)l + nt_{pr}}\,,$$

$$P_{Wc} = \frac{W}{T_c} = \frac{nql}{\left(\frac{n-1}{v'} + \frac{n}{v''}\right)l + \frac{l_0' + l_0''}{v'} + nt_{pr}}\,.$$

Середня швидкість пересування автомобіля на маршруті і в циклі — це відповідно величини

$$v_{sr} = \frac{L}{T} = \frac{2n-1}{\frac{n-1}{v'} + \frac{n}{v''}}\,,$$

$$v_c = \frac{L_c}{T_c} = \frac{l_0' + (2n-1)l + l_0''}{\left(\frac{n-1}{v'} + \frac{n}{v''}\right)l + \frac{l_0' + l_0''}{v'}}\,.$$

Якщо n достатньо велике, так що $n-1 \approx n$, то середня швидкість пересування автомобіля на маршруті стає майже звичним середнім гармонічним величин v' і v'':

$$v_{sr} \approx \frac{2}{\frac{1}{v'} + \frac{1}{v''}} = \frac{2v'v''}{v' + v''}\,.$$

Хай для наочності $v' = 40$ км/год, $v'' = 60$ км/год. В такому разі середнє гармонічне становить $\frac{2v'v''}{v'+v''} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 60}{40+60} = 48$ км/год, середнє геометричне — $\sqrt{v'v''} = \sqrt{40 \cdot 60} = 49$ км/год, а середнє арифметичне — $\frac{v'+v''}{2} = \frac{40+60}{2} = 50$ км/год. Тож середнє гармонічне менше, скажімо, за середнє арифметичне на 4 %. Багато це, чи мало?

Швидкість — дуже важливий параметр, який суттєво позначається на продуктивності автомобіля. Середнє гармонічне завжди збігається з середнім арифметичним у разі $v' = v''$. Але ситуація, коли $v' = v'' = 50$ км/год, відрізняється від ситуації, коли $v' = 40$ км/год і $v'' = 60$ км/год, настільки істотно, що не зважати на це принципово не можна. Викладене у повній мірі можна перенести на маршрут будь-якої структури.

Хай там як, а зазвичай в статистичному аналізі дуже часто перевагу все-таки надають оперуванню середніми арифметичними. І це здебільшого не створює особливих непорозумінь. Тож може справді нема сенсу перейматись вибором якогось справді об'єктивного середнього, що не зводиться до середнього арифметичного? Але перш ніж ухвалити своє рішення, звернімо увагу на такий відомий приклад дивних подій, що є або майже неймовірними, або відбуваються майже напевно.

Отож хай одна подія відбувається з імовірністю $p = 0{,}99$, а інша — з імовірністю $p = 0{,}9999$. Це майже однакової ваги події, що відбуваються ледь не напевно. Але чи так воно у всіх сенсах?

Припустімо, що йдеться про незалежні події, які можуть відбутись у будь-який день року з імовірністю $p = 0{,}99$. Тоді ймовірність того, що вони відбуватимуться щодня впродовж року буде меншою за число $P \approx 0{,}03$ — це майже неймовірна подія. Але якщо $p = 0{,}9999$, то $P \approx 0{,}97$ — це майже певна подія.

Отже точність таки багато важить. Що могло б для нас означати, приміром, «цілковито точна помилка» чи «дуже-дуже приблизна точність (правда/істина)»?

Строго кажучи, ніяких маятникових (човникових) маршрутів насправді немає. А якщо все-таки моделювати рух машини на якомусь маршруті у формі маятникового переміщення ніби однією і тією ж дорогою, то зневаженими виявляться багато цінних ознак і характеристик маршруту. По-перше, одна і та сама дорога в прямому і зворотному напрямах для мобільної машини практично завжди є цілком різною як за поздовжнім профілем (пересіченістю), так і за планом (звивистістю). По-друге, до маршрутної дороги/вулиці з двох боків прилягають зазвичай цілком різні й структурно цілком по-різному бічні дороги/вулиці, що зумовлює потребу цілком по-різному у різних напрямах регулювати рух і взаємодію транспортних потоків. По-третє інтенсивність транспортних потоків в прямому і зворотному напрямах у різні часові проміжки доби можуть істотно відрізнятись, що істотно нівелює подібність руху машини у протилежних напрямах. Зрештою, навіть переважні вітрові потоки проявляють себе як чинники, що поглиблюють відмінність протилежних напрямів маршруту. Але чи завжди на це зважають?

Але на цій дуже простій моделі легко бачити, що помітні розбіжності в конкретних даних істотно нівелюються в середньому. Це стосується як конкретно швидкісних параметрів, так і загалом особливостей маршруту в прямому і зворотному напрямках. Звісно, статус точного швидкісного параметра слід визнати за середньою гармонічною швидкістю, але не завадить звернути увагу на середню геометричну швидкість.

Нівелювання зважености в середніх величинах — розділення параметрів. Вдамося до перетворень, пам'ятаючи (5):

$$v_{sr} = \frac{l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}}{\dfrac{l_{12}}{v_{12}} + \dfrac{l_{23}}{v_{23}} + \ldots + \dfrac{l_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}}} =$$

$$= \frac{l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{\dfrac{1}{v_{12}/l_{12}} + \dfrac{1}{v_{23}/l_{23}} + \ldots + \dfrac{1}{v_{(n-1)n}/l_{(n-1)n}}} \le$$

$$\le \frac{l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-1)n}}{n-1} \cdot \sqrt[n-1]{\frac{v_{12}}{l_{12}} \cdot \frac{v_{23}}{l_{23}} \cdot \ldots \cdot \frac{v_{(n-1)n}}{l_{(n-1)n}}} = \frac{l_{sr(a)}}{l_{sr(g)}} v_{sr(g)}, \qquad (17)$$

де

$$l_{sr(a)} = \frac{l_{12} + l_{23} + \ldots + l_{(n-2)(n-1)} + l_{(n-1)n}}{n-1} \qquad (18)$$

— арифметично середній шлях;

$$l_{sr(g)} = \sqrt[n-1]{l_{12} \cdot l_{23} \cdot \ldots \cdot l_{(n-2)(n-1)} \cdot l_{(n-1)n}} \qquad (19)$$

— геометрично середній шлях;

$$v_{sr(g)} = \sqrt[n-1]{v_{12} \cdot v_{23} \cdot \ldots \cdot v_{(n-2)(n-1)} \cdot v_{(n-1)n}} \qquad (20)$$

— геометрично середня швидкість.

Зрозуміло, що $l_{sr(a)} / l_{sr(g)} \ge 1$, а тому співвідношення (17) можна ніби «підправити», записавши

$$v_{sr} \approx v_{sr(g)} = \sqrt[n-1]{v_{12} \cdot v_{23} \cdot \ldots \cdot v_{(n-2)(n-1)} \cdot v_{(n-1)n}}\,. \qquad (21)$$

Використання останньої формули (що є відображенням середнього геометричного (2), (7)) дає змогу уникнути зважування значеннями шляху осереднюваних значень швидкости. Очевидно також, що на противагу v_{sr} величина $\dfrac{l_{sr(a)}}{l_{sr(g)}} v_{sr(g)}$ в (17) побудована із застосуванням оператора усереднення до шляхових і швидкісних параметрів нарізно.

Характеристичні структурні й режимні параметри маршруту. Величина $\dfrac{l_{sr(a)}}{l_{sr(g)}} v_{sr(g)}$, що фігурує у виразі (17), містить в своєму складі шляхові параметри $l_{sr(a)}$ і $l_{sr(g)}$, що характеризують структуру маршруту (див. (18), (19)), та швидкісний параметр $v_{sr(g)}$, що характеризує режим переміщення вантажу маршрутом (див. (20)). При цьому величина $l_{sr(a)}$ поєднує в собі інформацію про загальну довжину l маршруту та кількість ділянок n, на які він поділений. Поділ маршруту на ділянки однакової довжини можна було б назвати простим структуруванням — у цьому випадку $l_{sr(a)} = l_{sr(g)}$. А от чим більшим буде відношення $l_{sr(a)} / l_{sr(g)} > 1$, тим складнішою можна вважати структуру маршруту.

Оцінювати маршрут, звісно, можна по-різному.

Приміром, у разі $1 \le p \le +\infty$ справджується співвідношення (якщо суми праворуч існують) [8, 9]

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \le \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p/(p-1)}\right]^{p-1/p}$$

— нерівність Гельдера (O. Hölder). У випадку $p = p/(p-1) = 2$ вона відома як нерівність Коші — Буняковського, що для дійсних $x_1, x_2, ..., x_n$ і $y_1, y_2, ..., y_n$ має вигляд

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Якщо покласти $x_i = \sqrt{\dfrac{a_i^2}{b_i}}$ і $y_i = \sqrt{b_i}$, $i = \overline{1,n}$, то нерівність Коші — Буняковського перетвориться на нерівність

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n} .$$

Якщо тепер покласти $a_i^2 = l_i$, $b_i = v_i$, $i = \overline{1, n-1}$, то випливе нерівність

$$\frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} + ... + \frac{l_{n-1}}{v_{n-1}} \ge \frac{\left(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} + ... + \sqrt{l_{n-1}}\right)^2}{v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}} =$$

$$= \frac{n-1}{v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}} \left(\sqrt{\frac{l_1}{n-1}} + \sqrt{\frac{l_2}{n-1}} + ... + \sqrt{\frac{l_{n-1}}{n-1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{(n-1)^2}{v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}} \left(\frac{\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} + ... + \sqrt{l_{n-1}}}{n-1}\right)^2 = (n-1)\frac{\left(\sqrt{l}\right)^2_{sr(a)}}{v_{sr(a)}} ,$$

де $\left(\sqrt{l}\right)_{sr(a)}$ — середнє арифметичне $n-1$ параметрів $\sqrt{l_i}$ (квадратних коренів від шляху переміщення), $v_{sr(a)}$ — середня арифметична швидкість пересування автомобіля. Отже можна писати

$$v_{sr} = \frac{l_1 + l_2 + ... + l_{n-1}}{\dfrac{l_1}{v_1} + \dfrac{l_2}{v_2} + ... + \dfrac{l_{n-1}}{v_{n-1}}} \le$$

$$\le \frac{l_1 + l_2 + ... + l_{n-1}}{(n-1)\left(\sqrt{l}\right)^2_{sr(a)}} v_{sr(a)} = \frac{l_{sr(a)}}{\left(\sqrt{l}\right)^2_{sr(a)}} v_{sr(a)} . \quad (22)$$

Величини $\left(\sqrt{l}\right)_{sr(a)}$, $l_{sr(a)}$, $n-1$ — це структурні характеристичні параметри маршруту, а величина $v_{sr(a)}$ — його режимний характеристичний параметр.

Покладаючись регресію до середнього, величину v_{sr} хотілося б відповідно чи до (17), чи до (21), чи (22) заступити величиною

$$\text{чи } v_{sr} \approx \frac{l_{sr(a)}}{l_{sr(g)}} v_{sr(g)} , \text{ чи } v_{sr} \approx v_{sr(g)} , \text{ чи } v_{sr} \approx \frac{l_{sr(a)} v_{sr(a)}}{\left(\sqrt{l}\right)^2_{sr(a)}} . \quad (23)$$

У рамках обчислювальних процедур це можна здійснювати без особливих застережень, бо приблизні результати не втрачатимуть цінности. У разі ж аналітичних процедур слід зважати на таке.

Відповідно до (11), (15), (16) матимемо:

$$\frac{\partial v_{sr}}{\partial l_{ij}} = \frac{\partial}{\partial l_{ij}} \frac{l_{12} + l_{23} + ... + l_{(n-1)n}}{\dfrac{l_{12}}{v_{12}} + \dfrac{l_{23}}{v_{23}} + ... + \dfrac{l_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}}} = \frac{1}{n-1} \frac{v_{sr}}{l_{sr(a)}} \left(1 - \frac{v_{sr}}{v_{ij}}\right),$$

$$\frac{\partial v_{\text{am}r}}{\partial l_{ij}} = \frac{\partial}{\partial l_{ij}} \frac{l_{12} v_{12} + l_{23} v_{23} + ... + l_{(n-1)n} v_{(n-1)n}}{l_{12} + l_{23} + ... + l_{(n-1)n}} = (n-1) \frac{v_{ij} - v_{\text{am}r}}{l_{sr(a)}} ,$$

$$\frac{\partial v_{\text{gm}r}}{\partial l_{ij}} = \frac{\partial}{\partial l_{ij}} \left(\frac{1}{l} \cdot \sqrt[n-1]{l_{12} \cdot l_{23} \cdot ... \cdot l_{(n-1)n}} \cdot \sqrt[n-1]{v_{12} \cdot v_{23} \cdot ... \cdot v_{(n-1)n}}\right) =$$

$$= v_{sr(g)} \frac{\partial}{\partial l_{ij}} \frac{l_{sr(g)}}{l} = \frac{v_{sr(g)} l_{sr(g)}}{l^2} \left(\frac{1}{n-1} \cdot \frac{l}{l_{ij}} - 1\right) > 0 .$$

Ці похідні засвідчують, що варіація параметра l_{ij} цілком по-різному (немонотонно, несинхронно) позначається на зміні значень величин $v_{sr} = v_{\text{hm}r}$, $v_{\text{am}r}$, $v_{\text{gm}r}$.

Натомість

$$\frac{\partial v_{sr}}{\partial v_{ij}} = \frac{\partial}{\partial v_{ij}} \frac{l_{12} + l_{23} + ... + l_{(n-1)n}}{\dfrac{l_{12}}{v_{12}} + \dfrac{l_{23}}{v_{23}} + ... + \dfrac{l_{(n-1)n}}{v_{(n-1)n}}} = \frac{v_{sr}^2}{v_{ij}^2} \frac{l_{ij}}{l} > 0 ,$$

$$\frac{\partial v_{\text{am}r}}{\partial v_{ij}} = \frac{\partial}{\partial v_{ij}} \frac{l_{12} v_{12} + l_{23} v_{23} + ... + l_{(n-1)n} v_{(n-1)n}}{l_{12} + l_{23} + ... + l_{(n-1)n}} = \frac{l_{ij}}{l} > 0 ,$$

$$\frac{\partial v_{\text{gm}r}}{\partial v_{ij}} = \frac{\partial}{\partial v_{ij}} \left(\frac{1}{l} \cdot \sqrt[n-1]{l_{12} \cdot l_{23} \cdot ... \cdot l_{(n-1)n}} \cdot \sqrt[n-1]{v_{12} \cdot v_{23} \cdot ... \cdot v_{(n-1)n}}\right) =$$

$$= \frac{l_{sr(g)}}{l} \cdot \frac{v_{sr(g)}}{(n-1) v_{ij}} > 0 .$$

Отже зростання (зменшення) v_{ij} одночасно призводить до зростання (зменшення) і v_{sr}, і $v_{\text{am}r}$, і $v_{\text{gm}r}$.

Перша з оцінок (23) виглядає привабливішою: за шляховий характеристичний параметр править відношення $l_{sr(a)} / l_{sr(g)} \ge 1$, а за швидкісний — величина $v_{sr(g)}$ (середнє геометричне, див. (20)). Відповідно до неї формально $v_{sr} l_{sr(g)} \approx l_{sr(a)} v_{sr(g)}$ чи $\tau = l_{sr(a)} / v_{sr} \approx l_{sr(g)} / v_{sr(g)} = \tau'$. Друга оцінка $v_{sr} \approx v_{sr(g)}$ — найпростіша: вона цілком ігнорує структуру маршруту, ніби натякаючи на те, що маршрути формують, керуючись певною логікою, що нівелює їхню особливість (раціональність несумісна з різноманітністю).

Висновки. 1. Визначальним для оцінювання швидкости пересування вантажу маршрутом та визначення продуктивности автомобіля є середнє гармонічне значень швидкостей на окремих ділянках цього маршруту, зважених значеннями довжин цих ділянок. У разі маятникового маршруту — це елементарне середнє гармонічне.

2. Із використанням класичних нерівностей можна знайти змістовні границі значень фактичної середньої гармонічної швидкости, які виражаються через елементарні класичні середні окремо шляхових і окремо швидкісних параметрів. Такі середні правлять за характеристичні параметри маршруту — шляхові й швидкісні.

3. В рамках обчислювальних операцій істинну середню гармонічну швидкість можна заступити середнім геометричним чи відповідною комбінацією елементарних середніх, покладаючись на ефект регресії даних до істинно середнього. Це істотно спрощує добування, перетворення й аналіз транспортних даних.

Список літератури:

1. Дмитриченко М. Ф., Яцківський Л. Ю., Ширяєва С. В., Докуніхін В. З. Основи теорії транспортних процесів і систем. Навчальний посібник для ВНЗ. — Київ: Видавничий Дім «Слово», 2009. — 336 с. ISBN 978-966-8407-99-4

2. Гащук Л., Гащук П. Теоретичні засади транспорту: Планування транспортних операцій: Навчальний посібник. — Харків: Видавництво «Діса плюс», 2024. — 256 с. ISBN 978-617-88122-93-5

3. Ortúzar J. D., Willumsen L. G. Modeling Transport (4-th edition). — John Willey & Sons Ltd, 2011. — xx, 588 p. ISBN: 9781119993520

4. Janić M. Transport Systems. Modelling, Planning, and Evaluation. — Taylor & Francis Group, LLC, 2017. — xviii, 410 p. DOI: 10.1201/9781315371023

5. Босняк М. Г. Вантажні автомобільні перевезення: Навчальний посібник для студентів спеціальности 7.100403 «Організація перевезень і управління на транспорті (автомобільний)». — Київ: Видавничий Дім «Слово», 2010. — 408 с. ISBN 978-966-194-035-1

6. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — Київ: Вища школа, 1974. — 456 с.

7. Beckenbach E. F., Bellman R. Inequalities. — Berlin, Göottingen and Heidelberg: Springer, 1961. — xii, 198 p. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-64971-4

8. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Inequalities*. 2nd edition. Cambridge University Press, 1952. — xii, 324 p.

9. Beckenbach E. F., Bellman R. Introduction to Inequalities. — Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1975. — viii, 133 p. ISBN 978-0-88385-603-1

References:

1. Dmytrychenko, M. F., Yatskivskyi, L. Yu., Shyryaeva, S. V., and Dokunikhin, V. Z. (2009). Fundamentals of the theory of transport processes and systems. Train aid for universities. Kyiv, Slovo Publishing House, 336 p. ISBN 978-966-8407-99-4

2. Hashchuk, L., and Hashchuk, P. (2024) Theoretical principles of transport: Planning of transporting operations: Train aid. Kharkiv, Publishing House «Disa plus», 256 p. ISBN 978-617-88122-93-5

3. Ortúzar, J. D., and Willumsen, L. G. (2011) Modeling Transport (4-th edition). John Willey & Sons Ltd, xx, 588 p. ISBN: 978-1119993520

4. Janić, M. (2017) Transport Systems. Modelling, Planning, and Evaluation. Taylor & Francis Group, LLC, xviii, 410 p. DOI: 10.1201/9781315371023

5. Bosnyak, M. G. (2010). Freight automobile transportation. Train aid. Kyiv, Slovo Publishing House, 408 p. ISBN 978-966-194-035-1

6. Kolmogorov, A. M., and Fomin, S. V. (1974) Elements of the theory of functions and functional analysis. Kyiv: Higher School. — 456 p.

7. Beckenbach, E. F., and Bellman, R. (1961) Inequalities, Springer, Berlin, Göottingen and Heidelberg, xii, 198 p. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-64971-4

8. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G. (1952) Inequalities. 2nd edition. Cambridge University Press, xii, 324. p.

9. Beckenbach, E. F., and Bellman, R. (1975) Introduction to Inequalities, Washington, D.C., The Mathematical Association of America, viii, 133 p. ISBN 978-0-88385-603-1

Науково-методична стаття.
Надійшла до редакції 28.10.2024.
Прийнято до публікації 18.12.2024.