

*Н. В. Жезло-Хлевна, О. В. Хлевной, Ю. С. Назар, В. М. Пилипенко, В. І. Брошко*  
 Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3768-2863> – Н. В. Жезло-Хлевна

<https://orcid.org/0000-0003-2846-3480> – О. В. Хлевной

<https://orcid.org/0000-0003-0151-8285> – Ю. С. Назар

<https://orcid.org/0009-0008-5957-4822> – В. М. Пилипенко

<https://orcid.org/0009-0002-3661-9617> – В. І. Брошко



[olexandr.khlevnoy@gmail.com](mailto:olexandr.khlevnoy@gmail.com)

## МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ КРИТИЧНОЇ ВТОМИ ТА ДИНАМІКИ ШВИДКОСТІ РУХУ ОСІБ З ПРОТЕЗАМИ НИЖНІХ КІНЦІВОК ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕВАКУАЦІЙНИХ МАРШРУТІВ

Проблема забезпечення безпечної евакуації маломобільних груп населення, зокрема осіб з протезами нижніх кінцівок, набуває особливої актуальності в умовах зростання кількості надзвичайних ситуацій, спричинених війною. У статті представлено метод прогнозування динаміки швидкості руху осіб з протезами на основі математичного моделювання енерговитрат та накопичення втоми. Запропонований підхід дозволяє визначити момент досягнення критичного рівня втоми, після якого відбувається зниження швидкості руху, а також відповідну критичну довжину евакуаційного шляху.

Математична модель базується на поєднанні залежностей енерговитрат і функції накопичення втоми, що враховує інтенсивність фізичного навантаження та тривалість руху. Як вхідні параметри використовуються початкова швидкість руху, коефіцієнти, що характеризують фізіологічні особливості осіб з різним рівнем ампутації (трансфеморальна, транстибіальна), а також тип евакуаційного шляху (горизонтальна ділянка, підйом або спуск сходами).

Для реалізації методу розроблено алгоритм, що забезпечує чисельне моделювання зміни швидкості, рівня втоми та пройденої відстані в часі. Проведено серію чисельних експериментів, у межах яких побудовано залежності «швидкість-час», «втома-час» і «втома-відстань» для різних категорій осіб та умов руху. Отримані результати показали, що для осіб з протезами характерне прогресуюче зниження швидкості після досягнення певного порогового рівня втоми, на відміну від осіб без ампутацій, для яких швидкість може вважатися умовно сталою.

Запропонований метод дозволяє визначити критичну довжину евакуаційних шляхів і може бути використаний у комп'ютерних системах моделювання евакуації для підвищення точності оцінювання часу евакуації та обґрунтування проектних рішень.

**Ключові слова:** евакуація, протези нижніх кінцівок, втома, швидкість руху, математичне моделювання, критична довжина маршруту, комп'ютерне моделювання

*N. V. Zhezlo-Khlevna, O. V. Khlevnoi, Yu. S. Nazar, V. M. Pylypenko, V. I. Broshko*  
 Lviv State University of Life Safety, Lviv, Ukraine

## METHOD FOR PREDICTING CRITICAL FATIGUE AND MOVEMENT SPEED DYNAMICS OF PERSONS WITH LOWER LIMB PROSTHESES FOR EVACUATION ROUTE OPTIMIZATION

Ensuring the safe evacuation of people with limited mobility, particularly individuals with lower limb prostheses, has become increasingly important under conditions of growing emergency risks caused by military actions. This paper presents a method for predicting the dynamics of movement speed of persons with prostheses based on mathematical modeling of energy expenditure and fatigue accumulation. The proposed approach allows for determining the moment of reaching a critical fatigue level, after which movement speed begins to decrease, as well as the corresponding critical evacuation distance.

The mathematical model is based on the integration of energy expenditure relationships and a fatigue accumulation function that accounts for the intensity and duration of physical activity. The input parameters include initial walking speed, coefficients reflecting physiological characteristics of individuals with different levels of amputation (transtibial and transfemoral prostheses), and the type of movement segment (horizontal surface, stair ascent, or descent).

An algorithm for numerical implementation of the method has been developed, enabling simulation of speed, fatigue level, and traveled distance over time. A series of computational experiments was conducted, resulting in “speed-time”, “fatigue-time”, and “fatigue-distance” relationships for different categories of individuals and movement conditions. The results demonstrate that persons with prostheses exhibit a progressive decrease in speed after reaching a threshold fatigue level, whereas for individuals without amputations, the speed can be considered approximately constant.

The proposed method enables the determination of the critical evacuation route length and can be applied in computer-based evacuation modeling systems to improve the accuracy of evacuation time estimation and support design decision-making.

**Keywords:** evacuation, lower limb prostheses, fatigue, movement speed, mathematical modeling, critical distance, computer simulation.

**Постановка проблеми.** У сучасному світі пожежі в будівлях становлять значну загрозу для життя та здоров'я людей, а ефективна та своєчасна евакуація є ключовим елементом забезпечення безпеки. Особливої актуальності ця проблема набуває для осіб зі зниженою мобільністю, зокрема осіб з протезами нижніх кінцівок, які під час евакуації стикаються з низкою специфічних труднощів. До таких труднощів належать ускладнення під час пересування сходами, нерівними поверхнями або в умовах обмеженої видимості, а також значно швидше настання фізичної втоми. У сукупності це призводить до потенційних затримок під час евакуації, а в окремих випадках – до повної втрати здатності самостійно пересуватися, що істотно підвищує ризик травмування або летальних наслідків.

Глобальний контекст проблеми також свідчить про її масштабність: за оцінками, станом на 2020 рік у світі щорічно виконувалося близько одного мільйона ампутацій, зумовлених діабетом, судинними захворюваннями та травмами. В Україні ж ситуація має значно гостріший характер унаслідок тривалої повномасштабної війни. За даними Національної служби здоров'я України, у період з 2022 по 2025 роки було зафіксовано понад 90 тисяч ампутацій, переважно внаслідок мінно-вибухових травм, артилерійських обстрілів і застосування безпілотних літальних апаратів. При цьому близько 60% випадків припадає на ампутації нижніх кінцівок, а частка двосторонніх ампутацій сягає 10%. Важливо, що поряд із військовослужбовцями значна частка постраждалих – це цивільне населення, особливо в регіонах, що зазнають регулярних обстрілів.

З біомеханічної точки зору, пересування осіб з протезами нижніх кінцівок супроводжується суттєво підвищеними енерговитратами. За результатами досліджень, такі особи витрачають під час ходьби на 10-120% більше енергії порівняно з людьми без ампутацій, причому величина перевищення безпосередньо залежить від рівня ампутації та типу протезу. Це зумовлено

асиметрією ходи, необхідністю компенсаційних рухів, підвищеним навантаженням на інтактну кінцівку, а також додатковими зусиллями, пов'язаними зі стабілізацією тіла. В умовах евакуації, де необхідно долати сходові марші, ухили, завали або інші перешкоди, енерговитрати зростають ще більше. Зокрема, під час підйому сходами вони можуть перевищувати аналогічні показники для осіб без ампутацій у 1,5-2 рази, що призводить до прискореного накопичення втоми.

Принципово важливою є відмінність у динаміці руху: якщо для осіб без порушень опорно-рухового апарату на коротких і середніх дистанціях евакуації характерним є відносно рівномірний темп пересування, що дозволяє в інженерних розрахунках вважати швидкість сталою величиною, то для осіб з протезами спостерігається інша закономірність. Після досягнення певного порогового рівня втоми відбувається нелінійне зниження швидкості руху, яке може становити від 5% до 70% залежно від умов та індивідуальних характеристик. Це означає, що початкова швидкість руху не може вважатися сталою на всій довжині евакуаційного шляху, а існує критична дистанція, після подолання якої ефективність пересування суттєво знижується.

Умови воєнного стану додатково ускладнюють ситуацію. Часті повітряні тривоги, ракетні атаки та руйнування будівель обумовлюють необхідність термінової евакуації в умовах дефіциту часу. Пошкоджена інфраструктура створює додаткові бар'єри для пересування. Психоемоційні фактори, зокрема хронічний стрес, посттравматичний стресовий розлад і депресивні стани, також негативно впливають на фізичну витривалість та координацію рухів, що ще більше знижує ефективність евакуації осіб з протезами.

Проблема ускладнюється недостатньою адаптованістю існуючих нормативних підходів і планів евакуації. Чинні нормативні документи з пожежної безпеки відносять осіб з протезами до узагальненої групи мобільності з фіксованими параметрами швидкості руху (наприклад, 30 м/хв

[1]), не враховуючи рівень ампутації, тип протезу та індивідуальні фізіологічні особливості. Крім того, багато будівель не оснащені спеціалізованими засобами евакуації, такими як евакуаційні крісла чи адаптовані пандуси.

Наявні математичні моделі орієнтовані переважно на осіб без ампутацій і базуються на показниках споживання кисню та метаболічних еквівалентах, не враховують специфіку використання протезів і не дають змоги описати процес накопичення втоми в умовах евакуації. Відтак, з позицій комп'ютерних наук виникає актуальна науково-прикладна задача розроблення методів і моделей, здатних прогнозувати динаміку зміни швидкості руху з урахуванням індивідуальних параметрів, енерговитрат і умов середовища.

Таким чином, існує об'єктивна необхідність створення методу прогнозування критичної втоми та визначення критичної дистанції руху осіб з протезами нижніх кінцівок, який дозволить підвищити точність моделювання евакуаційних процесів і забезпечити науково обґрунтовану оптимізацію евакуаційних маршрутів із використанням сучасних інформаційних технологій та методів обробки даних.

#### **Аналіз останніх досліджень і публікацій.**

Проблематика моделювання енерговитрат і втоми осіб з ампутаціями нижніх кінцівок є предметом активних міждисциплінарних досліджень, що поєднують біомеханіку, фізіологію, реабілітологію та комп'ютерні науки. Аналіз наукових джерел свідчить про наявність значного обсягу емпіричних даних щодо енерговитрат під час ходьби з протезами, однак питання формалізації втоми та її впливу на динаміку швидкості руху в контексті евакуаційних процесів залишається недостатньо дослідженим.

Класичні дослідження показують, що енерговитрати під час ходьби осіб з ампутаціями суттєво перевищують аналогічні показники для осіб без порушень опорно-рухового апарату. Зокрема, встановлено, що зі збільшенням рівня ампутації енерговитрати зростають, що пов'язано з більшими біомеханічними втратами та складністю керування протезом [2]. Подібні результати отримані і в інших роботах, де показано, що навіть при самостійно обраному темпі руху спостерігається підвищене споживання кисню та серцево-судинне навантаження [3]. Дослідження впливу типу протезу демонструють, що використання мікропроцесорних колінних вузлів може частково знижувати енерговитрати, проте не усуває їх принципового перевищення [4].

Окремий напрям досліджень стосується біомеханічних особливостей ходи. Встановлено, що асиметрія рухів, зміна кінематичних параметрів та необхідність компенсаційних стратегій суттєво

впливають на енергетичну ефективність пересування. При цьому навіть незначні зміни у вирівнюванні протезу або його конструкції можуть призводити до помітних змін енерговитрат, що підкреслює складність формалізації процесу руху [5]. Важливим аспектом є дослідження впливу умов руху. Показано, що при зміні швидкості, напрямку або траєкторії руху (наприклад, при поворотах або русі по колу) енергозатрати під час руху для осіб з протезами зростають значно сильніше, ніж для осіб без ампутацій [6]. Це має принципове значення для задач евакуації, де рух рідко є прямолінійним і рівномірним.

Разом із тим, більшість наявних досліджень зосереджена на оцінці миттєвих або середніх енерговитрат і практично не враховує процес накопичення втоми у часі. У фізіологічних дослідженнях втома розглядається як багатофакторний процес, що включає зниження м'язової сили, порушення нейром'язової координації та зменшення ефективності енергетичного обміну [7]. Для осіб з протезами ці процеси посилюються через додаткові навантаження та неефективність рухових патернів [8].

У галузі комп'ютерних наук спостерігається зростання інтересу до розроблення моделей прогнозування руху людини з використанням методів машинного навчання та отримання даних із сенсорів. Зокрема, дослідження у сфері керування протезами демонструють можливість використання алгоритмів для адаптації до змін швидкості та умов руху [9]. Однак ці підходи орієнтовані переважно на керування пристроями, а не на прогнозування функціонального стану людини.

Наявні прикладні моделі, зокрема рівняння ACSM для оцінки енерговитрат, базуються на показниках споживання кисню та інтенсивності навантаження, але не враховують специфіку ампутацій та використання протезів [10]. Крім того, вони не дозволяють визначити момент настання критичної втоми та пов'язане з цим зниження швидкості руху.

У сучасних дослідженнях також підкреслюється потенціал використання інтелектуальних протезів і біонічних систем, які можуть покращувати швидкість і стабільність руху [11]. Проте навіть у цих умовах проблема енерговитрат і втоми не вирішується повністю, що свідчить про фундаментальний характер цієї проблеми.

Таким чином, аналіз наукових джерел показує, що, незважаючи на значну кількість досліджень у сфері енерговитрат та біомеханіки руху осіб з ампутаціями, відсутні комплексні підходи, які б дозволяли прогнозувати накопичення втоми та її вплив на зміну швидкості руху в умовах евакуації. Це зумовлює необхідність розроблення нових методів, що

поєднують математичне моделювання, фізіологічні закономірності та сучасні інформаційні технології.

**Мета і завдання досліджень. Метою роботи** є розроблення методу прогнозування критичної втоми та динаміки швидкості руху осіб з протезами нижніх кінцівок на основі розширеної математичної моделі енерговитрат для підвищення точності моделювання евакуаційних процесів і оптимізації евакуаційних маршрутів у будівлях [12].

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

– Виявити ключові фактори, що впливають на накопичення втоми та зміну швидкості руху осіб з протезами під час евакуації на основі аналізу сучасних підходів до оцінювання енерговитрат і моделювання руху осіб з ампутаціями нижніх кінцівок, а також наявних моделей втоми людини;

– Розробити математичну модель, що поєднує оцінку енерговитрат із моделлю накопичення втоми та дозволяє визначати критичний рівень втоми, при якому починається зниження швидкості руху, та відповідну критичну дистанцію.

– Обґрунтувати алгоритмічну реалізацію методу прогнозування динаміки швидкості руху осіб з протезами в умовах евакуації.

**Методи досліджень.** У роботі використано комплекс загальнонаукових і спеціалізованих методів дослідження, що забезпечують формалізацію процесів руху та втоми осіб з протезами нижніх кінцівок у задачах моделювання евакуації.

Теоретичну основу дослідження становлять методи математичного моделювання, які застосовано для побудови моделі енерговитрат і накопичення втоми під час руху. Для опису фізіологічних процесів використано підходи біомеханіки та енергетики руху людини, зокрема залежності між швидкістю пересування, витратами енергії та функціональним станом організму.

Для формалізації процесу накопичення втоми та її впливу на зміну швидкості руху застосовано методи функціонального аналізу та нелінійного моделювання, що дозволили описати залежність швидкості від інтегральних енерговитрат і визначити критичні порогові значення. Алгоритмічна реалізація запропонованого методу здійснена із використанням підходів обчислювальної математики та дискретного моделювання.

У процесі дослідження також використано методи аналізу даних і узагальнення результатів експериментальних і літературних досліджень для визначення параметрів моделі. Для перевірки адекватності та ефективності

запропонованого методу застосовано чисельне моделювання евакуаційних сценаріїв із варіюванням параметрів середовища та характеристик користувачів.

Крім того, використано елементи системного аналізу для оцінювання можливостей інтеграції розробленого методу в сучасні програмні комплекси моделювання евакуації та інформаційно-аналітичні системи підтримки прийняття рішень у сфері пожежної безпеки.

### **Результати дослідження**

Створимо математичну модель, яка дасть можливість не лише прогнозувати момент настання критичної втоми, але й описувати динаміку зниження швидкості користувачів протезів нижніх кінцівок в процесі евакуації. Модель передбачає інтеграцію з наявною моделлю енергозатрат [13], де енергозатрата  $E$  слугує ключовим вхідним параметром для оцінки акумуляції втоми та враховує специфіку роботи з протезами: підвищені метаболічні енергозатрати, асиметрію ходи, компенсаторну роботу м'язів-стабілізаторів та вплив типу протеза. При розробці моделі уникатимемо великої кількості емпіричних коефіцієнтів, які потребують індивідуального калібрування, і базуватимемося на фізіологічних та біомеханічних принципах, що дозволяють використовувати лише вимірювані або добре документовані параметри.

Прогнозування втоми базується на концепції акумуляції метаболічної заборгованості та біомеханічної деградації, адаптованої для користувачів протезів. Вона дозволяє прогнозувати рівень втоми як функцію часу та дистанції, а також динамічне зниження швидкості, що є критичним для оптимізації евакуаційних маршрутів.

Представимо рівень втоми  $F(t)$  як нормалізовану величину ( $F \in [0, 1]$ ), де  $F = 0$ , що відповідає стану відпочинку, а  $F = 1$  — критичний втомі, при якій швидкість руху падає нижче 50% від початкової, і потрібна зупинка. Використаємо диференціальне рівняння акумуляції втоми, подібне до загальної моделі м'язової втоми, але з адаптацією для користувачів протезів.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{P(t) - P_{\text{відн}}}{P_{\text{max}}} \cdot k_{\text{вт}}(1 - F) - r_{\text{відн}} \cdot F, \quad (1)$$

де  $P(t)$  – поточна потужність навантаження (Вт/кг), обчислена як  $P(t) = \frac{E(t)}{t}$ , де  $E(t)$  – акумульована енергозатрата, введена у [13];  $P_{\text{max}}$  – максимальна аеробна потужність (Вт/кг) особи з протезом. Її значення залежить від типу протезу;  $P_{\text{відн}}$  – порогова потужність відновлення (Вт/кг), нижче якої втома не акумулюється ( $P_{\text{відн}} \approx 0,3 - 0,5 \cdot P_{\text{max}}$ );  $k_{\text{вт}}$  – коефіцієнт акумуляції втоми, що залежить від рівня ампутації: вищий для

проксимальних ампутацій ( $k_{\text{вТ}} \approx 0,5 \dots 1,5 \text{ с}^{-1}$ ); значення  $P_0$  і  $P_{\text{max}}$  залежать від типу протезу і коливаються в діапазоні  $P_{\text{max}} = 2,5 \dots 5,0 \text{ Вт/кг}$  і  $P_0 = 1 \dots 3,5 \text{ Вт/кг}$ .  $r_{\text{відн.}}$  – коефіцієнт відновлення, що залежить від типу протезу і є вищим для біонічних протезів завдяки кращій рекуперації енергії ( $r_{\text{відн.}} \approx 0,01 \dots 0,05 \text{ с}^{-1}$ ).

Припустимо, що людина рухається з приблизно постійною початковою потужністю  $P_0$  протягом більшої частини часу до моменту настання критичної втоми (це досить добре працює для коротких сценаріїв).

Тоді рівняння акумуляції втоми спрощується до:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{P_0 - P_{\text{відн.}}}{P_{\text{max}}} (1 - F) \cdot k_{\text{вТ}} - r_{\text{відн.}} \cdot F, \quad (2)$$

Для отримання явного розв'язку рівняння (2) задається початкова умова  $F(0) = 0$ , що відповідає відсутності накопиченої втоми на початку руху. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке має явний розв'язок:

$$F(t) = F_{\infty} (1 - e^{-(k_{\text{вТ}} \cdot \eta + r_{\text{відн.}}) \cdot t}), \quad (3)$$

де  $\eta = \frac{P_0 - P_{\text{відн.}}}{P_{\text{max}}}$ ;  $F_{\infty} = \frac{k_{\text{вТ}} \cdot \eta}{k_{\text{вТ}} \cdot \eta + r_{\text{відн.}}}$

Критична втома настає при  $F \geq 0,8 \dots 0,9$ . Отже,  $t_{\text{кр}} = F(t_{\text{кр}})$ . Таким чином, залежно від виду протеза, можна визначити час настання критичної втоми.

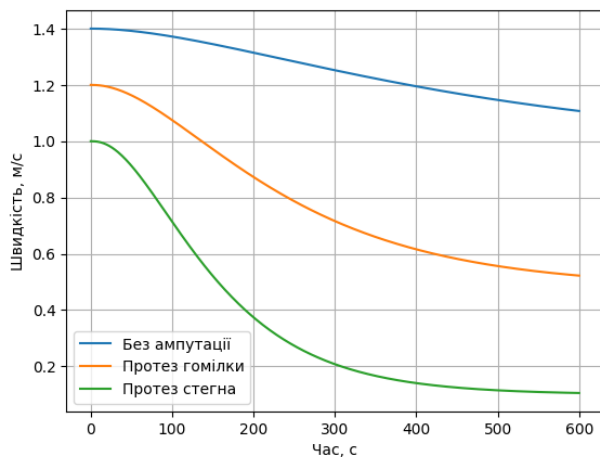
$$t_{\text{кр}} = \frac{1}{k_{\text{вТ}} \cdot \eta + r_{\text{відн.}}} \cdot \ln \left( \frac{F_{\infty}}{F_{\infty} - F_{\text{кр}}} \right), \quad (4)$$

Коли навантаження значно вище порогового відновлення ( $P_0 \gg P_{\text{відн.}}$ ) і відновлення повільне (значення  $r_{\text{відн.}}$  дуже мале), то:

$$F(t) \approx 1 - e^{-k_{\text{вТ}} \cdot \frac{P_0}{P_{\text{max}}} \cdot t}, \quad (5)$$

Звідси

$$t_{\text{кр}} \approx \frac{-\ln(1 - F_{\text{кр}})}{k_{\text{вТ}} \cdot \frac{P_0}{P_{\text{max}}}}, \quad (6)$$



а

де  $-\ln(1 - F_{\text{кр}})$  залежно від значення  $F_{\text{кр}}$  може набувати значень  $1,6 \dots 3$ ;  $P_0 = \frac{E}{\Delta t}$  – середня потужність на початку руху (Вт/кг), розрахована відповідно до [13] для конкретного значення швидкості руху та типу поверхні;  $P_{\text{max}}, k_{\text{вТ}}$  – значення, що можуть змінюватися залежно від рівня ампутації та типу протеза.

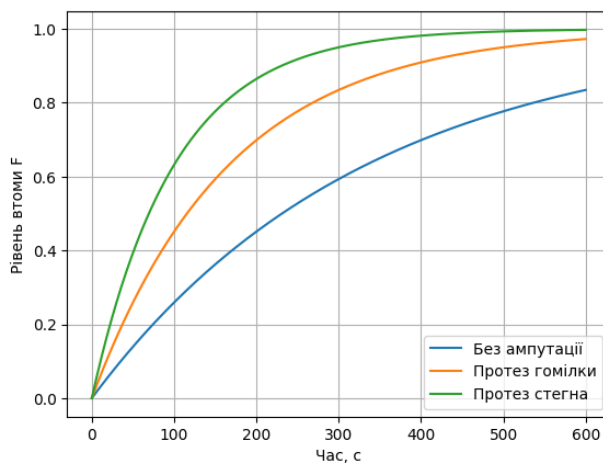
Окрім визначення часу настання критичного рівня втоми доцільно встановити залежність зниження швидкості від часу  $v(t)$ , оскільки зростання рівня втоми  $F(t)$  призводить до зменшення ефективності ходи, зростання ризику падінь та компенсаторного уповільнення. Ми моделюємо  $v(t)$  як функцію початкової швидкості  $v_0$  та рівня втоми:

$$v(t) = v_0 \cdot (1 - \alpha \cdot F^{\beta}(t)), \quad (7)$$

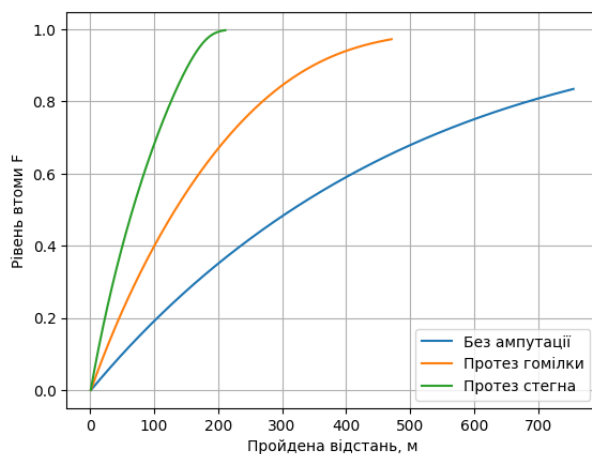
де  $v_0$  – початкова швидкість (м/с), що залежить від типу протеза та поверхні;  $\alpha$  – коефіцієнт чутливості до втоми, який дозволяє врахувати, що особи з високими рівнями ампутації або двобічними ампутаціями є більш чутливими до настання втоми;  $\beta$  – експонента нелінійності, що відображає прискорене зниження швидкості із зростанням втоми.

На основі запропонованої математичної моделі реалізовано чисельне моделювання процесу руху осіб з протезами нижніх кінцівок із урахуванням накопичення втоми. У межах обчислювального експерименту визначено динаміку зміни швидкості руху, рівня втоми та пройденої відстані в часі для різних категорій осіб і умов переміщення.

Результати чисельного моделювання динаміки швидкості руху та накопичення втоми для різних умов переміщення представлено на рисунках 1-3.



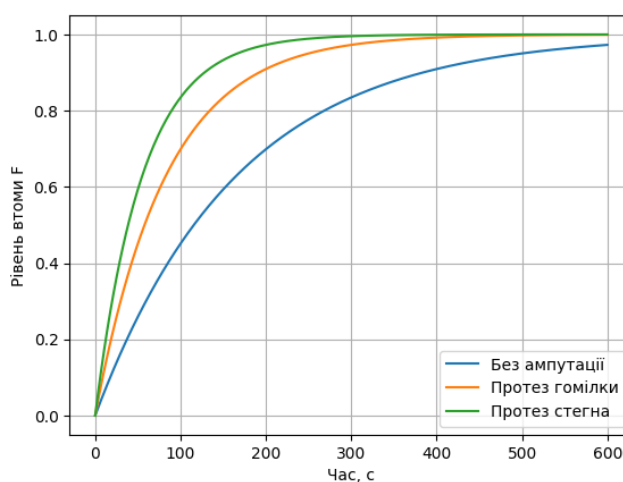
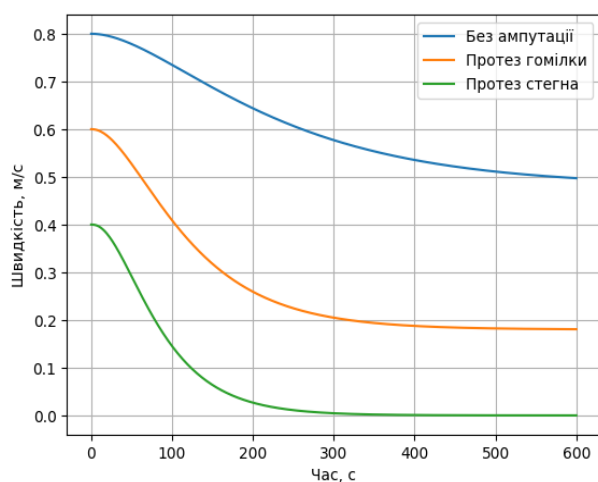
б



6

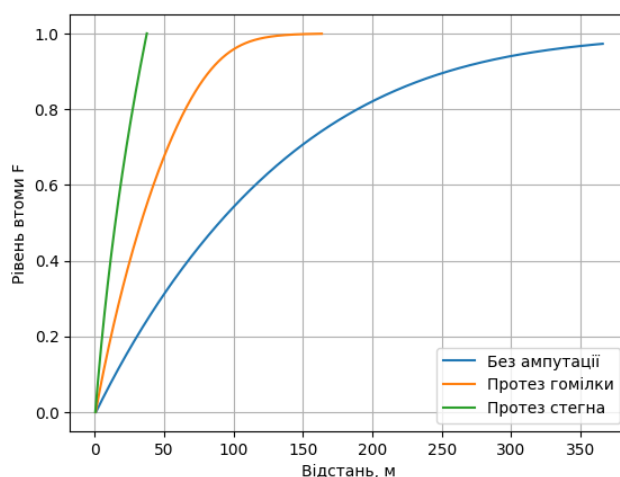
**Рисунок 1** – Залежності швидкості руху та рівня втоми для осіб з протезами нижніх кінцівок на горизонтальних ділянках:

а) швидкість руху від часу; б) рівень втоми від часу; в) рівень втоми від пройденої відстані



а

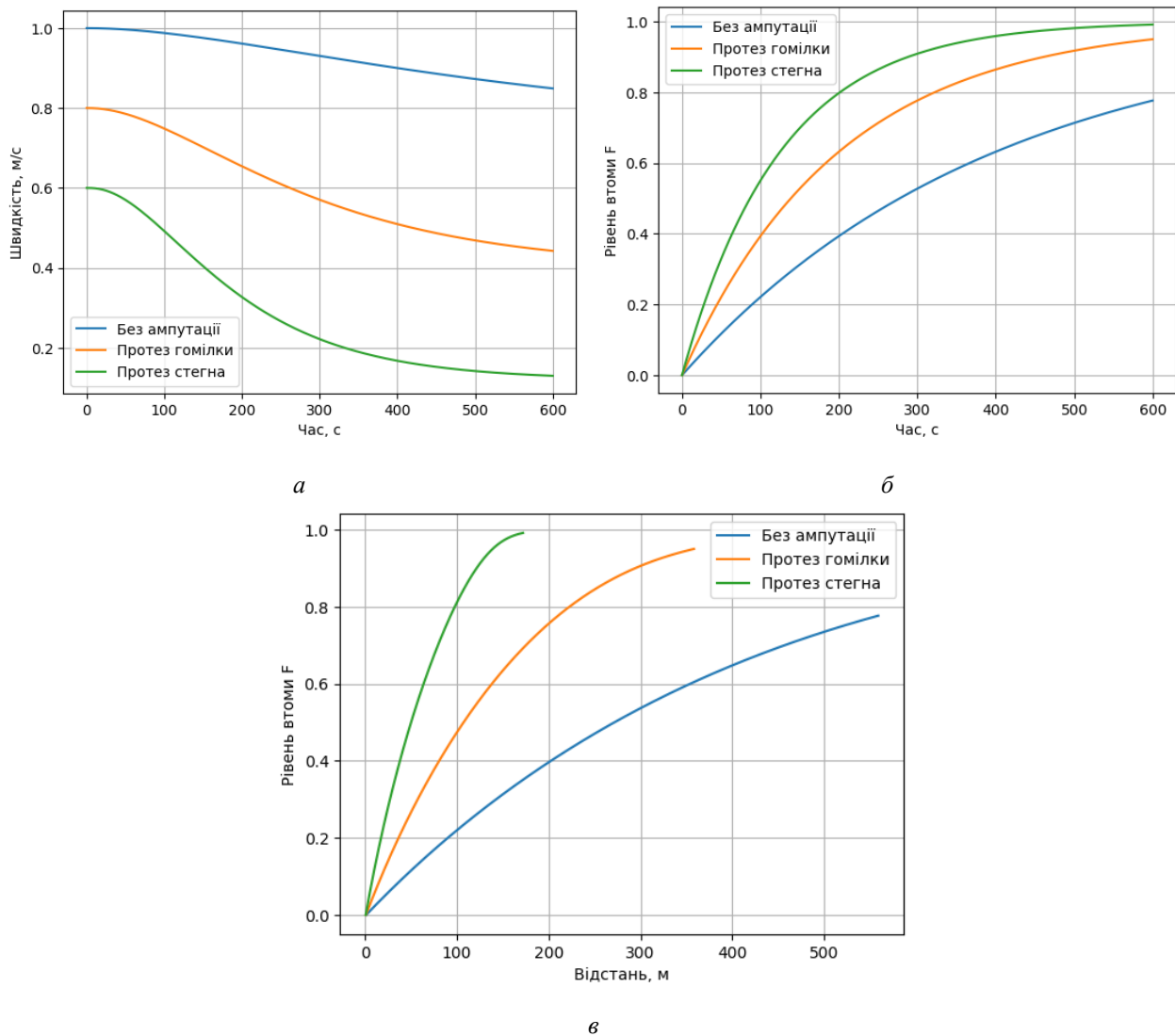
б



6

**Рисунок 2** – Залежності швидкості руху та рівня втоми для осіб з протезами нижніх кінцівок при підйомі сходами:

а) швидкість руху від часу; б) рівень втоми від часу; в) рівень втоми від пройденої відстані



**Рисунок 3** – Залежності швидкості руху та рівня втоми для осіб з протезами нижніх кінцівок при спуску сходами:

а) швидкість руху від часу; б) рівень втоми від часу; в) рівень втоми від пройденої відстані

Отримані результати моделювання дозволяють комплексно оцінити вплив втоми на динаміку руху осіб з протезами нижніх кінцівок у процесі евакуації та сформувати низку принципово важливих висновків як для теорії моделювання, так і для практики забезпечення пожежної безпеки.

Передусім аналіз залежності рівня втоми від часу показав, що для всіх розглянутих категорій осіб характерним є нелінійний характер її накопичення. Водночас інтенсивність цього процесу суттєво відрізняється: для осіб без ампутації втома зростає відносно повільно, тоді як для осіб з протезами, особливо стегнового рівня, спостерігається значно швидше досягнення граничних значень. Це підтверджує, що енергетичні витрати не лише зростають, але й мають кумулятивний ефект, який безпосередньо впливає на функціональну здатність до подальшого руху.

Аналіз графіків швидкості руху дозволив встановити принципово важливу закономірність:

для осіб без ампутацій швидкість протягом більшої частини евакуаційного шляху залишається практично незмінною, що узгоджується з класичними моделями евакуації. Натомість для осіб з протезами спостерігається виражена нелінійність – після досягнення певного порогового рівня втоми відбувається різке зниження швидкості. Така поведінка свідчить про наявність критичного стану системи «людина-протез», після якого ефективність руху суттєво деградує. Важливо, що цей ефект не враховується у більшості сучасних програмних комплексів моделювання евакуації, де швидкість задається сталою або залежить лише від щільності потоку.

Найбільш значущим результатом є встановлення залежності рівня втоми від пройденої відстані, що дозволяє ввести новий інженерний параметр – критичну довжину евакуаційного шляху. Показано, що для кожної категорії осіб існує гранична відстань, після подолання якої відбувається різке зниження

швидкості руху. Для осіб з протезами ця відстань є суттєво меншою, ніж для осіб без ампутацій, причому найбільш критичними є випадки високого рівня ампутації. Таким чином, запропонована модель дозволяє перейти від часових оцінок до просторово орієнтованого аналізу евакуаційних процесів.

Окремий аналіз різних типів ділянок руху показав, що сходи вгору є найбільш критичним елементом евакуаційного маршруту. Саме на цих ділянках спостерігається максимальна інтенсивність накопичення втоми та найшвидше зниження швидкості, що обумовлено необхідністю виконання додаткової роботи проти сили тяжіння. Для руху сходами вниз характерні нижчі енерговитрати, однак зменшення початкової швидкості та підвищені вимоги до координації також обмежують ефективність евакуації. У контексті комп'ютерного моделювання це означає необхідність диференційованого врахування типів ділянок маршруту, а не використання усереднених параметрів.

З точки зору комп'ютерних наук запропонована модель має важливу перевагу – вона є обчислювально ефективною та придатною для інтеграції в агентні та імітаційні моделі евакуації. Використання аналітичного виразу для оцінки втоми та швидкості дозволяє реалізувати динамічну зміну параметрів агентів у реальному часі без значного збільшення обчислювальної складності. Це відкриває можливість створення більш реалістичних симуляцій, які враховують індивідуальні особливості людей, зокрема рівень ампутації та тип протезу.

Таким чином, результати дослідження демонструють, що врахування процесу накопичення втоми є критично важливим для адекватного моделювання евакуації осіб з протезами нижніх кінцівок. Запропонований підхід дозволяє усунути обмеження існуючих моделей, що базуються на припущенні про сталу швидкість руху, та створює підґрунтя для розроблення інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень при проектуванні евакуаційних шляхів. Практичним наслідком є можливість обґрунтованого визначення максимально допустимих довжин маршрутів, оптимізації конфігурації шляхів евакуації та підвищення рівня безпеки маломобільних груп населення.

**Валідація** запропонованої математичної моделі здійснювалася шляхом поєднання аналітичного аналізу, порівняння з відомими експериментальними даними та чисельного моделювання.

На першому етапі було проведено якісну валідацію структури моделі. Отримані залежності накопичення втоми та зміни швидкості

відповідають відомим фізіологічним закономірностям: нелінійному зростанню втоми, її насиченню та наявності порогового ефекту, після досягнення якого швидкість руху різко знижується. Така поведінка узгоджується з результатами досліджень енерговитрат і біомеханіки ходи осіб з ампутаціями, що підтверджує адекватність обраної математичної форми.

На другому етапі виконано порівняння результатів моделювання з даними літератури щодо енерговитрат і швидкості руху осіб з протезами. Зокрема, встановлено, що зниження швидкості руху в межах 5-70% та підвищення енерговитрат на 10-120% відповідають відомим експериментальним оцінкам [2, 3]. Модель коректно відтворює більш швидке настання втоми для осіб з протезами стегна порівняно з протезами гомілки, що є важливим критерієм її адекватності.

Третій етап передбачав чисельну валідацію шляхом аналізу поведінки моделі за різних параметрів. Проведені обчислювальні експерименти показали, що модель є стійкою до варіацій параметрів та не генерує нефізичних результатів, зокрема, від'ємних значень швидкості або неконтрольованого зростання втоми. Крім того, встановлено, що зміна параметрів  $\alpha$  та  $\beta$  призводить до прогнозованих змін у динаміці руху, що свідчить про інтерпретованість моделі.

Окремо було проведено сценарний аналіз для різних типів ділянок евакуаційного шляху. Отримані результати узгоджуються з інженерною практикою та емпіричними спостереженнями: рух сходами вгору є найбільш енерговитратним, що призводить до найшвидшого накопичення втоми, тоді як рух сходами вниз характеризується нижчими швидкостями через необхідність забезпечення стійкості та безпеки.

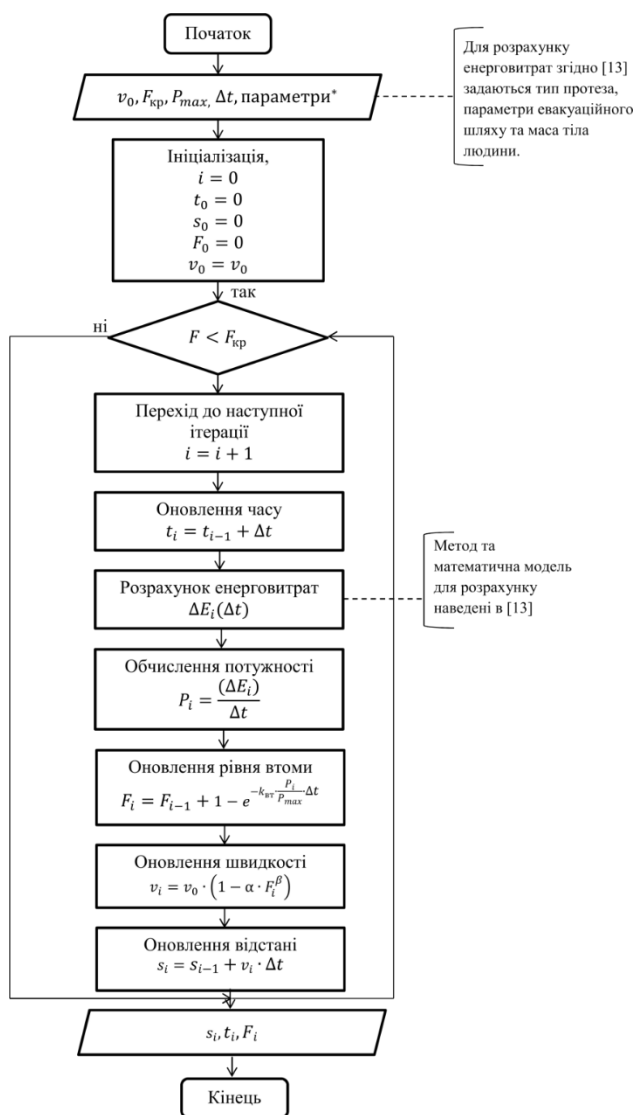
Водночас повноцінна експериментальна валідація запропонованої моделі із залученням осіб з протезами нижніх кінцівок наразі перебуває на етапі підготовки. Надалі планується проведення серії контрольованих експериментів із залученням добровольців різних категорій (за рівнем ампутації та типом протезів) для збору емпіричних даних щодо швидкості руху, енерговитрат і динаміки втоми під час подолання горизонтальних ділянок і сходових маршів, а також низки інших параметрів.

Разом з тим слід відзначити низку обмежень запропонованої моделі. Зокрема, вона базується на узагальнених параметрах і не враховує індивідуальні фізіологічні особливості (вік, рівень фізичної підготовки, супутні захворювання), психологічні фактори (стрес, паніка), а також зовнішні умови евакуації (задимлення, щільність людського потоку, наявність перешкод). Крім

того, параметри моделі наразі визначені на основі літературних даних і чисельного моделювання, що обмежує точність кількісних прогнозів до моменту їх експериментального підтвердження.

Для практичного застосування запропонованої математичної моделі у задачах комп'ютерного моделювання евакуації було розроблено алгоритмічну реалізацію методу прогнозування динаміки швидкості руху осіб з протезами нижніх кінцівок (рисунк 4). Основною метою алгоритму є обчислення зміни швидкості руху в часі з урахуванням накопичення втоми та визначення критичних параметрів евакуації, зокрема моменту досягнення критичного рівня втоми та відповідної пройденої відстані.

Розрахунок у межах запропонованого методу доцільно здійснювати з використанням дискретизації часу з постійним кроком  $\Delta t = 0,5$  с, що забезпечує достатню точність відтворення динаміки втоми при збереженні обчислювальної ефективності.



**Рисунок 4** – Блок-схема алгоритму прогнозування динаміки швидкості руху для осіб з протезами нижніх кінцівок

В основу алгоритму покладено ітераційне чисельне інтегрування рівнянь моделі, що описують накопичення втоми та зміну швидкості руху в дискретні моменти часу. Розрахунок здійснюється з використанням сталого кроку дискретизації  $\Delta t$ , при цьому всі змінні розглядаються як функції номера ітерації  $i$ .

Вхідними даними є індивідуальні параметри особи: початкова швидкість руху [14, 15], початковий рівень втоми, коефіцієнти моделі накопичення втоми та зниження швидкості, а також параметри середовища руху. Початкові умови задаються для нульової ітерації. На кожному кроці ітераційного процесу виконується перехід до наступного моменту часу, після чого визначаються енерговитрати за відповідний інтервал. На їх основі обчислюється потужність фізичного навантаження, яка використовується для оновлення рівня втоми з урахуванням процесів її накопичення та часткового відновлення. Отримане значення втоми визначає поточну швидкість руху, після чого виконується обчислення приросту пройденої відстані. Процес повторюється до перевищення критичного рівня втоми.

З обчислювальної точки зору алгоритм має лінійну складність відносно кількості часових кроків, що робить його придатним для інтеграції в агент-орієнтовані системи моделювання евакуації. Крім того, його структура дозволяє легко масштабувати розрахунки на велику кількість агентів та реалізовувати паралельні обчислення.

Таким чином, розроблений алгоритм забезпечує ефективну реалізацію запропонованого методу прогнозування та створює основу для його використання у сучасних програмних засобах аналізу евакуаційних процесів.

**Висновки.** У результаті виконаного дослідження розв'язано поставлені наукові завдання, що дозволило отримати такі узагальнені результати:

1. Встановлено ключові фактори, що визначають динаміку руху осіб з протезами нижніх кінцівок під час евакуації, серед яких визначальними є підвищені енерговитрати, зумовлені біомеханічними особливостями пересування, а також інтенсивніше накопичення втоми порівняно з особами без ампутацій. Показано, що саме взаємозв'язок між енерговитратами та втомою обумовлює нелінійний характер зміни швидкості руху.

2. Розроблено математичну модель, яка поєднує оцінювання енерговитрат із моделлю накопичення втоми та дозволяє визначати момент досягнення критичного рівня втоми, при якому починається зниження швидкості руху. На основі моделі введено поняття критичної дистанції, що

відповідає граничній довжині евакуаційного шляху до початку деградації швидкості.

3. Обґрунтовано алгоритмічну реалізацію методу прогнозування, яка забезпечує чисельне визначення зміни швидкості, рівня втоми та пройденої відстані в часі. Показано можливість використання розробленого алгоритму для моделювання різних умов руху (горизонтальні ділянки, сходи вгору та вниз) та його інтеграції у програмні комплекси аналізу евакуації.

Отримані результати підтверджують, що для осіб з протезами характерне зниження швидкості після досягнення певної дистанції, тоді як у класичних моделях для осіб без ампутацій швидкість приймається сталою, що може призводити до недооцінки часу евакуації та ризиків.

Наукова новизна роботи полягає у запропонованому підході до моделювання евакуації осіб з протезами нижніх кінцівок, який, на відміну від існуючих рішень, враховує не лише енерговитрати, а й процес накопичення втоми та його вплив на зміну швидкості руху. Це дозволило формалізувати момент настання критичного стану та ввести показник критичної дистанції евакуації, що безпосередньо пов'язує фізіологічні обмеження людини з параметрами евакуаційних шляхів і може бути використаний у комп'ютерному моделюванні для підвищення точності прогнозування.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на експериментальну ідентифікацію параметрів моделі із використанням даних, отриманих у реальних або наближених до реальних умовах евакуації, зокрема із застосуванням носимих сенсорів та систем трекінгу руху. Перспективним є також інтегрування запропонованої моделі в агент-орієнтовані системи моделювання евакуації, що дозволить враховувати індивідуальні характеристики людей і взаємодію в потоці. Окремим напрямком є застосування методів машинного навчання для адаптивного уточнення параметрів моделі на основі накопичених даних. У практичному аспекті подальший розвиток роботи може бути пов'язаний із формуванням рекомендацій щодо проектування евакуаційних шляхів з урахуванням критичних довжин маршрутів для різних категорій маломобільних груп населення.

#### Список літератури:

1. ДСТУ 8828:2019. Пожежна безпека. Загальні положення. [Чинний від 2020-01-01]. Київ: ДП «УкрНДНЦ», 2019. 163 с.
2. Bonnet-Lebrun A., Sedran L., Heidsieck C., Thomas-Pohl M., Pillet H., Bonnet X. Mechanical work and metabolic cost of walking with knee-foot prostheses: a study with a prosthesis simulator. *IRBM*. 2024. Vol. 45, No. 6. <https://doi.org/10.1016/j.irbm.2024.100863>
3. Gailey R. S. та ін. Energy expenditure of trans-tibial amputees... *Prosthetics and Orthotics International*. 1994. Vol. 18. P. 84–91. DOI: <https://doi.org/10.3109/03093649409164389>
4. Narang Y. S., Arelekatti V. N., Winter A. G. The effects of prosthesis inertial properties on prosthetic knee moment and hip energetics required to achieve able-bodied kinematics. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*. 2016. Vol. 24, No. 7. P. 754–763. <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2015.2455054>
5. Schmalz T., Blumentritt S., Jarasch R. Energy expenditure and biomechanical characteristics of lower limb amputee gait: The influence of prosthetic alignment and different prosthetic components. *Gait & Posture*. 2003. Vol. 16. P. 255–263. [https://doi.org/10.1016/S0966-6362\(02\)00008-5](https://doi.org/10.1016/S0966-6362(02)00008-5)
6. Seethapathi N., Jain A., Srinivasan M. Walking for short distances and turning in lower-limb amputees: a study in low-cost prosthesis users. *arXiv*. 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.03139>
7. Enoka R. M., Duchateau J. Translating fatigue to human performance. *Medicine & Science in Sports & Exercise*. 2016. Vol. 48, No. 11. P. 2228–2238. <https://doi.org/10.1249/MSS.0000000000000929>
8. Allen D. G., Lamb G. D., Westerblad H. Skeletal muscle fatigue. *Physiological Reviews*. 2008. Vol. 88, No. 1. P. 287–332. <https://doi.org/10.1152/physrev.00015.2007>
9. Zhang K., de Silva C. W., Fu C. Sensor fusion for predictive control of human-prosthesis-environment dynamics in assistive walking: A survey. *arXiv*. 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.07674>
10. American College of Sports Medicine. ACSM's guidelines for exercise testing and prescription. Philadelphia : Wolters Kluwer, 2018.
11. Tian Y., Wallace D. M., Cederna P. S., Chestek C. A., Kemp S. W. P. Toward natural limb function: A new era in prosthetic innovation. *Annals of Neurology*. 2025. Vol. 98, No. 5. P. 913–928. <https://doi.org/10.1002/ana.27287>
12. Hulida E., Pasmak I., Koval O., Tryhuba A. Determination of the critical time of fire in the building and ensure successful evacuation of people. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. 2019. Vol. 63, No. 1. P. 308–316. DOI: <https://doi.org/10.3311/PPci.12760>
13. Zhezlo-Khlevna N., Khlevnoi O., Karabyn O., Nazar Y., Pylypenko V. Mathematical model of energy expenditure of persons with prostheses in the context of fire evacuation optimization [Рукопис подано до публікації]. *Fire Safety*. 2026. No. 48.
14. Жезло-Хлевна Н., Хлевной О., Назар Ю., Борзов Ю., Довбняк В. Евакуація осіб із модульними протезами нижніх кінцівок при пожежі: сучасний стан, проблеми та перспективи досліджень. *Пожежна безпека*. Львів, 2025. № 46. С. 53–64.

<https://doi.org/10.32447/20786662.46.2025.05>

15. Хлевной О., Жезло-Хлевна Н., Доценко О., Борисова А., Калиновський А. Біомеханічні особливості руху осіб із двосторонніми протезами нижніх кінцівок під час евакуації в умовах пожежі. *Науковий вісник: Цивільний захист та пожежна безпека*. Київ, 2025. № 1(19). С. 120–128. <https://doi.org/10.33269/nvcz.2025>

#### References:

1. State Standard of Ukraine 8828:2019. (2019). *Pozhezhna bezpeka. Zahalni polozhennia* [Fire safety. General provisions]. Kyiv: UkrNDNC [in Ukrainian]

2. Bonnet-Lebrun, A., Sedran, L., Heidsieck, C., Thomas-Pohl, M., Pillet, H., & Bonnet, X. (2024). Mechanical work and metabolic cost of walking with knee-foot prostheses: A study with a prosthesis simulator. *IRBM*, 45(6).

<https://doi.org/10.1016/j.irbm.2024.100863>.

3. Gailey, R. S., Wenger, M. A., Raya, M., et al. (1994). Energy expenditure of trans-tibial amputees. *Prosthetics and Orthotics International*, 18(2), 84–91. <https://doi.org/10.3109/03093649409164389>

4. Narang, Y. S., Arelekatti, V. N., & Winter, A. G. (2016). The effects of prosthesis inertial properties on prosthetic knee moment and hip energetics required to achieve able-bodied kinematics. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 24(7), 754–763. <https://doi.org/10.1109/TNSRE.2015.2455054>

5. Schmalz, Thomas & Blumentritt, s & Jarasch, Rolf. (2003). Energy expenditure and biomechanical characteristics of lower limb amputee gait: The influence of prosthetic alignment and different prosthetic components. *Gait & posture*. 16. 255-63. [10.1016/S0966-6362\(02\)00008-5](https://doi.org/10.1016/S0966-6362(02)00008-5).

6. Seethapathi, Nidhi & Jain, Anil & Srinivasan, Manoj. (2019). Walking for short distances and turning in lower-limb amputees: a study in low-cost prosthesis users. [10.48550/arXiv.1909.03139](https://arxiv.org/abs/1909.03139).

7. Enoka, R. M., & Duchateau, J. (2016). Translating fatigue to human performance. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, 48(11), 2228–2238. <https://doi.org/10.1249/MSS.0000000000000929>

8. Allen, D. G., Lamb, G. D., & Westerblad, H. (2008). Skeletal muscle fatigue. *Physiological Reviews*, 88(1), 287–332.

<https://doi.org/10.1152/physrev.00015.2007>

9. Zhang, Kuangen & de Silva, Clarence & Fu, Chenglong. (2019). Sensor Fusion for Predictive Control of Human-Prosthesis-Environment Dynamics in Assistive Walking: A Survey. [10.48550/arXiv.1903.07674](https://arxiv.org/abs/1903.07674).

10. American College of Sports Medicine. (2018). ACSM's guidelines for exercise testing and prescription.

11. Tian, Y., Wallace, D. M., Cederna, P. S., Chestek, C. A., & Kemp, S. W. P. (2025). Toward Natural Limb Function: A New Era in Prosthetic Innovation. *Annals of neurology*, 98(5), 913–928. <https://doi.org/10.1002/ana.27287>

12. Hulida, E., Pasnak, I., Koval, O., & Tryhuba, A. (2019). Determination of the Critical Time of Fire in the Building and Ensure Successful Evacuation of People. *Periodica polytechnica-civil engineering*, 63(1), 308–316. <https://doi.org/10.3311/PPci.12760>

13. Zhezlo-Khlevna, N., Khlevnoi, O., Karabyn, O., Nazar, Y., & Pylypenko, V. (2026). Mathematical model of energy expenditure of persons with prostheses in the context of fire evacuation optimization [Unpublished manuscript]. *Fire Safety*, (48) [in Ukrainian]

14. Zhezlo-Khlevna, N., Khlevnoi, O., Nazar, Y., Borzov, Y., & Dovbniak, V. (2025). Evakuatsiia osib iz modulnymy protezamy nyzhnikh kintsivok pry pozhezhi: suchasnyi stan, problemy ta perspektyvy doslidzhen [Evacuation of persons with modular lower limb prostheses in case of fire: current state, problems and research prospects]. *Fire Safety*, (46), 53–64. <https://doi.org/10.32447/20786662.46.2025.05>

[in Ukrainian]

15. Khlevnoi, O., Zhezlo-Khlevna, N., Dotsenko, O., Borysova, A., & Kalynovskyi, A. (2025). Biomekhanichni osoblyvosti rukhu osib iz dvostoronnimy protezamy nyzhnikh kintsivok pid chas evakuatsii v umovakh pozhezhi [Biomechanical features of movement of persons with bilateral lower limb prostheses during evacuation in fire conditions]. *Scientific Bulletin: Civil Protection and Fire Safety*, 1(19), 120–128.

<https://doi.org/10.33269/nvcz.2025> [in Ukrainian]

© Н. В. Жезло-Хлевна, О. В. Хлевной,  
Ю. С. Назар, В. М. Пилипенко, В. І. Брошко, 2026.

**Науково-методична стаття.**

Надійшла до редакції 27.03.2026.

Прийнята до друку 29.04.2026.

Опублікована 25.05.2026.