


Д. В. Котелович
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-7031-2500> – Д. В. Котелович
 denys.kotelovych@gmail.com

КЕРУВАННЯ ХОДОЮ РОБОТА-ГУМАНОЇДА З ПРІОРИТЕТОМ ЗАДАЧ У КІНЕМАТИЧНОМУ ТА ДИНАМІЧНОМУ ФОРМУЛЮВАННІ

Проблема. Стійка хода робота-гуманоїда з плаваючою базою потребує узгодженого планування траєкторії центра мас, генерації кроків та розв'язання пріоритетних задач на рівні суглобів. Ключова складність — сформулювати задачу керування так, щоб точка нульового моменту залишалася в многокутнику опори, траєкторії руху відстежувалися, а обмеження суглобів і контактних сил виконувалися. Без вирішення цієї задачі стійка хода недосяжна навіть у симуляції.

Мета. Провести уніфікацію існуючих математичних моделей та формалізувати три моделі для керування ходом робота-гуманоїда Unitree G1: (1) планування траєкторій за розбіжною компонентою руху зі зворотною рекурсією; (2) кінематичний ієрархічний розв'язувач на основі квадратичного програмування із проєкцією нуль-простору через сингулярний розклад матриці; (3) динамічна обернена динаміка у просторі задач із рівняннями руху та лінеаризованими конусами тертя. Провести чисельну перевірку розмірностей задач і розподілу ступенів свободи.

Методи. Планування ґрунтується на моделі лінійного оберненого маятника у формулюванні розбіжної компоненти руху: зворотна рекурсія для стійкого задання початкових умов, пряме інтегрування із від'ємним показником експоненти, кубічна інтерполяція перерозподілу ваги, кубічні сплайни маху стоп з параболічним профілем за висотою. Кінематичний розв'язувач замість каскадного добутку проєкторів визначає базис нуль-простору через сингулярний розклад складеної матриці непроектованих яacobіанів, що усуває накопичення числових похибок. Динамічний розв'язувач оберненої динаміки у просторі задач одночасно оптимізує узагальнені прискорення та контактні сили з урахуванням рівняння руху плаваючої бази та лінеаризованих конусів тертя. Функціонал поєднує зважені задачі відстеження центру мас, стоп, постави, орієнтації бази та регуляризацію контактних сил.

Результати. Чисельна перевірка для Unitree G1 показала, що у режимі ходи ієрархія із 6 рівнів пріоритету має сумарний ранг яacobіанів 17 з 18 ступенів свободи, що підтверджує достатність ступенів свободи для виконання всіх задач. Розв'язувач оберненої динаміки у просторі задач у фазі подвійної опори оперує 30 змінними. Перевірку проведено у середовищі Isaac Sim.

Висновки та пропозиції. Внесок роботи — запропоновано уніфіковану формалізацію трирівневої математичної моделі для конкретної платформи Unitree G1: планування за розбіжною компонентою руху, пріоритетне повнотілесне керування з проєкцією нуль-простору на основі сингулярного розкладу та динамічна обернена динаміка у просторі задач із контактними обмеженнями. Подано алгоритми (псевдокод) для кінематичного та динамічного розв'язувачів. Аналіз розподілу ступенів свободи обґрунтовує вибір позиційних задач стоп замість повних та необхідність сингулярного розкладу для коректного визначення рангу. Розмірнісне порівняння ієрархічного квадратичного програмування та оберненої динаміки у просторі задач кількісно зіставляє обидва формулювання. Обмеження: ієрархічне квадратичне програмування є квазістатичним (не враховує інерційні сили), обернена динаміка у просторі задач лінеаризує конус тертя, відсутня задача кутового моменту. Подальший розвиток: інтеграція модельно-прогнозного керування, задача кутового моменту, реактивне планування через точку захоплення.

Ключові слова: робот-гуманоїд, керування ходом, пріоритет задач, повнотілесне керування, нуль-простір, обернена кінематика, квадратичне програмування.

TASK-PRIORITY WALKING CONTROL OF A HUMANOID ROBOT IN KINEMATIC AND DYNAMIC FORMULATIONS

Problem statement. Stable humanoid walking with a floating base requires simultaneous center-of-mass trajectory planning, footstep generation, and multi-priority task execution at joint level. The challenge lies in formulating a control problem that keeps the zero moment point inside the support polygon, tracks desired motion trajectories, and satisfies joint and contact force constraints. Without solving this problem, the controller cannot achieve stable walking even in simulation.

Purpose. Based on existing mathematical models, to unify and formalize three models for walking control of the Unitree G1 humanoid: (1) trajectory planning via the divergent component of motion with backward recursion; (2) a velocity-level hierarchical solver based on quadratic programming with singular value decomposition-based null-space projection; (3) a dynamics-level task-space inverse dynamics solver with equations of motion and linearized friction cones. The formulations are verified numerically via degrees of freedom budget and dimension analysis.

Methods. Planning is based on the linear inverted pendulum model in divergent component of motion formulation: backward recursion for stable initialization, forward integration with negative exponential decay, cubic weight distribution interpolation, and cubic-spline swing-foot trajectories with a parabolic height profile. The velocity-level solver computes the null-space basis via singular value decomposition of the stacked original Jacobian matrix, eliminating cumulative numerical drift of cascaded projector products. The dynamics-level solver of task-space inverse dynamics simultaneously optimizes generalized accelerations and contact forces subject to the floating-base equations of motion and linearized friction cones. The cost function combines weighted center-of-mass, foot, posture, base orientation, and contact force regularization terms.

Results. Numerical verification for the Unitree G1 shows: the 6-level walking hierarchy has a cumulative Jacobian rank of 17 out of 18 degrees of freedom, confirming sufficient degrees of freedom for all tasks. In double support, the task-space inverse dynamics solver operates on 30 variables. Verification is performed in Isaac Sim simulation.

Conclusions/Recommendations. The contribution is a proposed unified formalization of the three-level mathematical model for the specific Unitree G1 platform: divergent component of motion planning, task-priority whole-body control with singular value decomposition null-space projection, and dynamics-level task-space inverse dynamics with contact constraints. Algorithms (pseudocode) for both the kinematic and dynamic solvers are presented. The degrees of freedom budget analysis justifies positional foot tasks over full-pose tasks and the necessity of singular value decomposition for correct rank determination. A dimensional comparison of hierarchical quadratic programming and task-space inverse dynamics quantitatively contrasts both formulations. Limitations include the quasi-static nature of hierarchical quadratic programming (inertial forces neglected), friction cone linearization in task-space inverse dynamics, and the absence of an angular momentum task. Future work: model predictive control integration, angular momentum task, reactive capture point planning.

Keywords: humanoid robot, gait control, task priority, whole-body control, null space, inverse kinematics, quadratic programming.

Вступ

Для стійкої ходи робота-гуманоїда необхідно узгодити три складові: планування кроків, формування траєкторій центра мас та відпрацювання цих траєкторій на рівні суглобів. Стійкість оцінюють за положенням точка нульового моменту (ZMP) у багатокутнику опори [1; 2]. Ієрархічне керування ґрунтується на принципі пріоритету задач для надлишкових маніпуляторів [3], який у цій роботі розширено проекцією нуль-простору на базі сингулярного розкладу матриці (SVD) [4]. Динамічне формулювання на рівні прискорень і контактних сил розвинуто у працях [5; 6]; керування кутовим моментом у рамках ієрархічної оберненої динаміки продемонстровано для гуманоїда з керуванням крутним моментом у [7].

Останнім часом значного прогресу досягнуто у навчанні з підкріпленням (reinforcement learning) для крокуючих роботів: від чотириногих платформ на складних рельєфах [8; 9] до ходи

гуманоїда у реальному світі [10]. Гібридні підходи поєднують модельне керування та навчання для адаптивної локомоції [11–13]. Огляди стану розвитку подано у [14–16]. Попри ці досягнення, явна математична формалізація ієрархічного керування з аналізом розподілу ступенів свободи для конкретної платформи залишається необхідною для обґрунтованого вибору структури регулятора.

У роботі подано уніфіковану формалізацію трьох математичних моделей для керування ходюю робота-гуманоїда Unitree G1 (18 DOF: 6 DOF плаваючої бази + 12 суглобів ніг), що розвиває попередню роботу зі стабілізації у середовищі Isaac Sim [17]. Кінематику обчислюють через бібліотеку Pinocchio [18]. Внесок роботи:

- Уніфікована тривірнева формалізація (планування за divergent component of motion (DCM), кінематичний – ієрархічне квадратичне програмування (HQP), динамічний – обернена

динаміка у просторі задач (TSID)) з явними ієрархіями задач для Unitree G1: зворотна рекурсія, кубічна інтерполяція перерозподілу ваги, генерація кроків із перевіркою через ІК.

• Аналіз розподілу DOF: обґрунтування вибору позиційних (3-DOF) задач стоп замість повних (6-DOF) та необхідності сингулярного розкладу матриці (SVD) для коректного визначення рангу у кінематичному розв'язувачі.

• Розмірнісне порівняння HQP та TSID: кількісне зіставлення шуканих змінних, обмежень рівності та нерівностей, обчислювальної складності обох формулювань.

• Алгоритми (псевдокод) кінематичного розв'язувача HQP (алг. 1) та динамічного розв'язувача TSID (алг. 2).

1. Методи дослідження

У табл. 1 зведено основні параметри моделі, що використовуються у подальших формулюваннях.

Таблиця 1

Параметри моделі

Символ	Опис	Значення
n_q	Розмірність конфігурації	19
n_v	Розмірність швидкостей	18
n_{fc}	Грані лінеаризованого конуса тертя	4
λ_{reg}	Регуляризація псевдооберненої матриці (HQP)	10^{-6}
ε	Регуляризація Тихонова (TSID)	10^{-9}
α	Коефіцієнт збіжності DCM	0,5
d	Коефіцієнт затухання DCM	—
δ	Запас суглобових обмежень	0,05 rad
μ	Коефіцієнт тертя	—
h_{step}	Висота маху стопи	0,08 m
k_{vx}, k_{vy}, k_{wz}	Масштабні коефіцієнти швидкості	0,5

1.1. Планування траєкторій за DCM

В основі планування лежить модель лінійного оберненого маятника (LIPM) [1; 19]. DCM [20; 21] визначається як

$$\xi = c + \frac{1}{\omega} \dot{c}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{z_c}}, \quad (1)$$

де c – горизонтальна координата центру мас (CoM), z_c – висота центр мас (CoM), g – прискорення вільного падіння, ω – власна частота маятника. Динаміка DCM щодо точки ZMP r :

$$\dot{\xi} = \omega (\xi - r). \quad (2)$$

Початкове значення DCM на i -му кроці визначають зворотним інтегруванням [21]:

$$\xi_i^- = r_i + e^{-\omega T_i} (\xi_{i+1}^- - r_i), \quad (3)$$

де T_i – тривалість i -го кроку, r_i – заплановане положення ZMP. Пряме інтегрування виконують із від'ємним показником експоненти, що забезпечує збіжність DCM до опорної точки:

$$\xi(t + \Delta t) = r + (\xi(t) - r) e^{-\omega \Delta t}. \quad (4)$$

Положення CoM визначають із DCM за допомогою коефіцієнта збіжності α (табл. 1):

$$c = r + \alpha (\xi - r), \quad \dot{c} = \omega (\xi - c). \quad (5)$$

Для врахування командної швидкості v_{cmd} початкове значення DCM зміщують:

$$\xi_0 \leftarrow \xi_0 + \frac{d v_{cmd}}{\omega}, \quad (6)$$

де d – коефіцієнт затухання.

Задану оператором команду лінійної та кутової швидкості руху (v_x, v_y, ω_z) перетворюють на послідовність кроків із чергуванням лівої та правої ніг: $\Delta x = k_{vx} v_x T_{step}$, $\Delta y = k_{vy} v_y T_{step}$, $\Delta \psi = k_{wz} \omega_z T_{step}$, де T_{step} – тривалість кроку, k_{vx}, k_{vy}, k_{wz} – масштабні коефіцієнти (табл. 1). Зміщення обмежують за максимальною довжиною і кутом та обертають відповідно до поточного напрямку руху. Кожен крок перевіряють через обернену кінематику (ІК, метод згасних найменших квадратів, 500 ітерацій, допуск 35 mm).

Під час подвійної опори бічне положення CoM інтерполують до опорної стопи за кубічним профілем Ерміта:

$$s(t) = 3t^2 - 2t^3, \quad t \in [0,1], \quad (7)$$

де $s(t)$ – коефіцієнт змішування для бічного зміщення CoM на опорну стопу. Вздовж осі x застосовують DCM-динаміку (4) для природного руху вперед.

Горизонтальний рух стопи (x, y) задають кубічними сплайнами через початкову, серединну та кінцеву точки із нульовими швидкостями на

межах. Вертикальний профіль – параболічний інтерполятор з піковою висотою h_{step} (табл. 1).

Спрощену модель робота із зазначенням основних величин показано нижче (рис. 1).

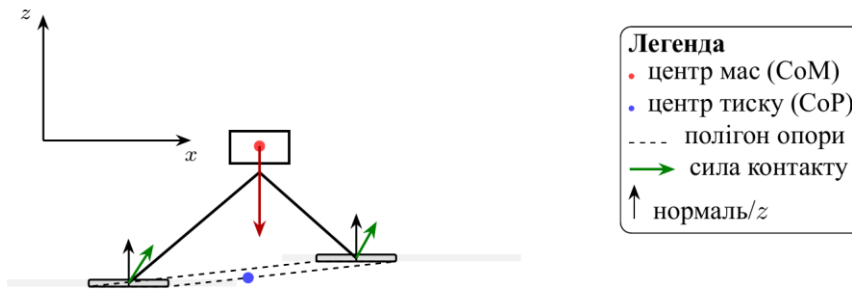


Рисунок 1 – Спрощена модель робота: центр мас, центр тиску і багатокутник опори; сили контакту; локальні нормалі поверхні

1.2. Кінематичний ієрархичний WBC із SVD-проекцією

Нехай $q \in \mathbb{R}^{n_q}$ – вектор узагальнених координат, $\dot{q} \in \mathbb{R}^{n_v}$ – вектор узагальнених швидкостей (табл. 1). Для задачі найвищого пріоритету (наприклад, утримання опорної стопи):

$$\dot{q}_1 = J_1^\dagger v_1, \quad (8)$$

де J_1 – яacobіан задачі, v_1 – бажана швидкість у просторі задачі, J_1^\dagger – регуляризована псевдообернена матриця:

$$J^\dagger = J^\top (JJ^\top + \lambda_{\text{reg}} I)^{-1}. \quad (9)$$

Для наступних задач ($i > 1$) додають лише складову в нуль-просторі:

$$\dot{q}_{\text{cmd}} \leftarrow \dot{q}_{\text{cmd}} + N_{i-1} J_i^\dagger v_i, \quad \bar{J}_i = J_i N_{i-1}. \quad (10)$$

Замість каскадного добутку $N_k = N_{k-1}(I - \bar{J}_k^\dagger \bar{J}_k)$, який накопичує числову похибку, використовують підхід на базі SVD [4]. Після k -го рівня пріоритету формують складену матрицю непровектованих яacobіанів:

$$A_k = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_k \end{bmatrix}, \quad A_k = U_k \Sigma_k V_k^\top. \quad (11)$$

Визначають числовий ранг $r = |\{i: \sigma_i > \sigma_1 \cdot n_v \cdot \varepsilon_{\text{mach}}\}|$, де σ_i – сингулярні значення, σ_1 – найбільше з них, $\varepsilon_{\text{mach}}$ – машинна точність, і беруть останні $n_v - r$ стовпців матриці V_k як ортонормальний базис нуль-простору Z . Проектор:

$$N_k = Z Z^\top, \quad Z = [v_{r+1} \cdots v_{n_v}]. \quad (12)$$

Повний псевдокод наведено в алгоритмі 1.

Algorithm 1: Кінематичний розв’язувач HQP із SVD-проекцією нуль-простору

Вхідні дані: $q_k, \dot{q}_k \in \mathbb{R}^n$, ієрархія задач $\{(J_i, v_i)\}_{i=1}^L$

Результат: q_{k+1}

```

1  $\dot{q}_{\text{cmd}} \leftarrow 0$ ;  $A \leftarrow []$ ;  $N \leftarrow I_n$ 
2 for  $i = 1 \dots L$  do
3    $\bar{J}_i \leftarrow J_i N$ 
4    $\bar{J}_i^\dagger \leftarrow \bar{J}_i^\top (\bar{J}_i \bar{J}_i^\top + \lambda_{\text{reg}} I)^{-1}$ 
5    $\dot{q}_{\text{cmd}} \leftarrow \dot{q}_{\text{cmd}} + N \bar{J}_i^\dagger v_i$ 
6    $A \leftarrow \begin{bmatrix} A \\ J_i \end{bmatrix}$ 
7    $U, \Sigma, V \leftarrow \text{SVD}(A)$ 
8    $r \leftarrow |\{j: \sigma_j > \sigma_1 \cdot n \cdot \varepsilon_{\text{mach}}\}|$ 
9   if  $r \geq n$  then  $N \leftarrow 0$ ; break
10   $Z \leftarrow [v_{r+1} \cdots v_n]$ ;  $N \leftarrow Z Z^\top$ 
11 for  $j = 1 \dots n$  do
12   $\dot{q}_j \leftarrow \text{clamp}(\dot{q}_j, \frac{q_j^{\text{min}} + \delta - q_j}{\Delta t}, \frac{q_j^{\text{max}} - \delta - q_j}{\Delta t})$ 
13   $\dot{q}_j \leftarrow \text{clamp}(\dot{q}_j, -\dot{q}_j^{\text{max}}, \dot{q}_j^{\text{max}})$ 
14  $q_{k+1} \leftarrow q_k + \dot{q}_{\text{cmd}} \Delta t$ 
15 return  $q_{k+1}$ 

```

Система підтримує два режими з різними пріоритетами (табл. 2 і 3).

Таблиця 2

Ієрархія задач у режимі статичної рівноваги

Пріоритет	Задача	K_p	K_d
1	Гомілковостопна стратегія (PID)	30	40
2	ZMP	10	—
3	Регуляризація постави	2	0,3

Гомілковостопна стратегія не використовує якобіан CoM, який зменшує внесок гомілковостопного суглоба до $\sim 2\%$ загальної корекції, а натомість застосовує розріджений якобіан розміру 4×18 (ненульові лише стовпці, що відповідають суглобам гомілковостопів), який безпосередньо впливає на суглоби pitch і roll обох гомілковостопів. Кут нахилу визначають через проєкцію вектора гравітації у систему координат тіла:

$$g_b = R^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\theta_p = \text{atan2}(g_{b,x}, -g_{b,z}),$$

$$\dot{q}_{\text{ankle}} = k_p \theta_p + k_i \int \theta_p dt + k_d \omega_y, \quad (13)$$

де R – матриця обертання тулуба, $g_{b,x}$, $g_{b,z}$ – компоненти вектора гравітації у системі координат тіла, θ_p – кут нахилу pitch, ω_y – кутова швидкість за віссю pitch, k_p , k_i , k_d – коефіцієнти ПД-регулятора ($k_i = 0,5$), із зоною нечутливості $0,005 \text{ rad}$ та обмеженням інтегральної складової $|\int \theta_p dt| \leq 0,05 \text{ rad} \cdot \text{s}$. Корекцію за roll обчислюють аналогічно.

Таблиця 3

Ієрархія задач у режимі ходи

Пріоритет	Задача	K_p	K_d	DOF
1	Опорні стопи (позиція)	50	10	3
2	CoM (імпедансне керування)	500	50	3
3	Баланс тулуба	20	20	3
4	ZMP	10	—	2
5	Махова стопа	50	10	3
6	Регуляризація постави	2	0,3	12

Баланс тулуба перетворює кути pitch та roll з інерціального вимірювального блоку (IMU) у поздовжню та бічну корекцію CoM через лінеаризовану модель оберненого маятника: $\Delta x = -h_{\text{com}} \sin \theta_p$, $v_x = k_p \Delta x - k_d \omega_y$, де h_{com} – висота CoM.

Після обчислення \dot{q} накладають обмеження:

$$\dot{q}_j \leftarrow \text{clamp} \left(\dot{q}_j, \frac{q_j^{\min} + \delta - q_j}{\Delta t}, \frac{q_j^{\max} - \delta - q_j}{\Delta t} \right), \quad (14)$$

де δ – запас безпеки (табл. 1), Δt – крок інтегрування. Додатково обмежують абсолютну

швидкість суглобів (гомілковостоп: $\leq 6,0 \text{ rad/s}$; стегно/коліно: $\leq 0,8 \text{ rad/s}$) та, за потреби, прискорення суглобів. Позицію інтегрують методом Ейлера: $q_{k+1} = q_k + \dot{q} \Delta t$.

1.3. Динамічна постановка TSID

Кінематичний розв'язувач (§2.2) не враховує масу, гравітацію та контактні сили; це обмежує бічний рух CoM під час ходи. Альтернативний динамічний розв'язувач (TSID) [5; 6] оптимізує одночасно прискорення суглобів і контактні сили.

Нехай $x = [\dot{q}; f] \in \mathbb{R}^{n_v+n_f}$, де $\dot{q} \in \mathbb{R}^{n_v}$ – узагальнені прискорення, $f \in \mathbb{R}^{n_f}$ – контактні сили ($n_f = 6 \times n_c$: 3 сили + 3 моменти на контакт, де n_c – кількість активних контактів).

Повне рівняння руху:

$$M \ddot{q} + h = S^T \tau + J_c^T f, \quad (15)$$

де M – матриця мас (Pinocchio, алгоритм CRBA), h – нелінійні ефекти (сили Кориоліса і гравітації), S – матриця вибору приводів, J_c – складений контактний якобіан, τ – крутні моменти суглобів. Оскільки τ не є шуканою змінною, обмеження накладають лише на рядки плаваючої бази, для яких $S_u = 0$:

$$[M_u \quad -J_{c,u}^T] \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ f \end{bmatrix} = -h_u, \quad (16)$$

де індекс u позначає перші 6 рядків.

Задачу оптимізації формулюють як квадратичне програмування (QP):

$$\min_x \frac{1}{2} x^T H x + p^T x, \quad (17)$$

де матрицю H і вектор p формують із зважених задач:

$$H = w_{\text{com}} J_{\text{com}}^T J_{\text{com}} + w_{\text{foot}} J_{\text{foot}}^T J_{\text{foot}} + w_{\text{post}} S_j^T W_j S_j + w_{\text{ori}} S_{\text{ang}}^T S_{\text{ang}} + w_{\text{f,reg}} I_f + \varepsilon I, \quad (18)$$

де J_{com} , J_{foot} – якобіани задач (у світовій системі координат), S_j – матриця вибору суглобів, W_j – суглобові ваги (суглоби сагітальної площини $w = 0,1$; суглоби фронтальної та трансверсальної площин $w = 1,0$), S_{ang} – матриця вибору кутових прискорень бази, $I_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ – одинична матриця у просторі контактних сил, ε – регуляризація Тихонова. Вектор p формують аналогічно:

$$p = - \sum_i w_i J_i^T \ddot{x}_{\text{ref},i}. \quad (19)$$

Бажане прискорення кожної задачі обчислюють за ПД-регулятором:

$$\ddot{x}_{\text{ref}} = K_p (x_{\text{des}} - x) - K_d \dot{x} - \dot{J} \dot{q}. \quad (20)$$

Для кожного контакту конус тертя лінеаризують n_{fc} гранями:

$$\cos \theta_i f_x + \sin \theta_i f_y \leq \mu f_z, \quad \theta_i = \frac{2\pi i}{n_{fc}}, \quad (21)$$

де μ – коефіцієнт тертя; додатково обмежують нормальну силу: $f_z^{\min} \leq f_z \leq f_z^{\max}$.

Отриману задачу QP із обмеженнями рівності (16) та нерівностями (21) розв'язують стандартним розв'язувачем QP. Умови оптимальності Каруша–Куна–Таккера (ККТ) для задачі з обмеженнями рівності:

$$\begin{bmatrix} H & C_{\text{eq}}^T \\ C_{\text{eq}} & -\varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ d_{\text{eq}} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

де λ – вектор множників Лагранжа. Результат інтегрують: $\dot{q}_{\text{new}} = \dot{q} + \ddot{q} \Delta t$. Повний псевдокод наведено в алгоритмі 2.

Algorithm 1: Динамічний розв'язувач TSID

Вхідні дані: $q_k, \dot{q}_k \in \mathbb{R}^n$, зважені задачі $\{(J_i, \ddot{x}_{\text{ref},i}, w_i)\}$, стан контактів

Результат: q_{k+1}

- 1 $M, h \leftarrow \text{CRBA}(q_k), \text{NLE}(q_k, \dot{q}_k)$
 - 2 $J_c \leftarrow \text{ContactJacobians}(q_k)$
 - 3 Скласти H, p із зважених задач (??)
 - 4 $C_{\text{eq}} \leftarrow [M_u \quad -J_{c,u}^T]; \quad d_{\text{eq}} \leftarrow -h_u$ // (??)
 - 5 Скласти $C_{\text{iq}}, d_{\text{iq}}$ з конусів тертя (??)
 - 6 $[\dot{q}; f] \leftarrow \text{SolveQP}(H, p, C_{\text{eq}}, d_{\text{eq}}, C_{\text{iq}}, d_{\text{iq}})$
 - 7 $\dot{q}_{\text{cmd}} \leftarrow \dot{q}_k + \ddot{q} \Delta t$
 - 8 **for** $j = 1 \dots n$ **do**
 - 9 $\dot{q}_j \leftarrow \text{clamp}(\dot{q}_j, \frac{q_j^{\text{min}} + \delta - q_j}{\Delta t}, \frac{q_j^{\text{max}} - \delta - q_j}{\Delta t})$
 - 10 $\dot{q}_j \leftarrow \text{clamp}(\dot{q}_j, -\dot{q}_j^{\text{max}}, \dot{q}_j^{\text{max}})$
 - 11 $q_{k+1} \leftarrow q_k + \dot{q}_{\text{cmd}} \Delta t$
 - 12 **return** q_{k+1}
-

2. Результати

Формулювання перевірено для робота Unitree G1 (29 повних DOF, 12 активних суглобів ніг) у середовищі Isaac Sim [22]. Кінематична модель із плаваючою базою має розмірність конфігурації n_q та швидкості n_v (табл. 1).

2.1. Розподіл ступенів свободи (HQP)

У табл. 4 показано, як кожний рівень ієрархії ходи використовує DOF. Якобіан кожної задачі додає рядки до складеної матриці A_k ; SVD визначає дійсний ранг (може бути меншим за кількість рядків через лінійну залежність).

Таблиця 4

Розподіл DOF у режимі ходи (одна опорна стопа)

Пр.	Задача	Рядків J	$\text{rank}(A_k)^*$	Нуль-пр.
1	Опорна стопа (L)	3	3	15
2	СоМ	3	6	12
3	Баланс тулуба	3	≤ 9	≥ 9
4	ZMP	2	≤ 11	≥ 7
5	Махова стопа (R)	3	≤ 14	≥ 4
6	Постава	12	≤ 18	≥ 0

*Верхня межа; дійсний ранг залежить від конфігурації і лінійної залежності.

У подвійній опорі (обидві стопи на пріоритеті 1) задача стоп використовує 6 рядків, $\text{rank}(A_1) = 6$, $\dim N_1 = 12$. Задача СоМ додає ще 3 рядки; $\text{rank}(A_2) \leq 9$, нуль-простір ≥ 9 .

Загалом 6 задач додають 26 рядків якобіанів, проте дійсний ранг складеної матриці A_6 не

перевищує n_v ; через лінійну залежність задач сумарний ранг становить ≤ 17 , залишаючи ≥ 1 DOF для регуляризації постави.

Позиційні (3-DOF) задачі стоп обрано замість повних (6-DOF), оскільки 12 обмежень двох 6-DOF стоп вичерпують усі DOF, $\dim N_1 = 0$, що унеможлиблює задачу СоМ. SVD коректно це виявляє: $\text{rank}(A_1) = 12$.

2.2. Розмірності задач QP (TSID)

У табл. 5 порівняно розмірності QP для HQP та TSID.

Таблиця 5

Порівняння розмірностей розв'язувачів

Параметр	HQP	TSID (SS)	TSID (DS)
Шукані змінні	18	24	30
Обмеження рівності	—	6	6
Обмеження нерівності	—	6	12
Метод розв'язання	6 SVD	1 KKT	1 KKT
Складність	$O(mn_v^2)$	$O(n_x^3)$	$O(n_x^3)$

HQP розв'язує 6 послідовних SVD-задач розміру $\leq 26 \times 18$ (складена A_k зростає). TSID розв'язує одну KKT-систему розміру 24×24 (SS) або 36×36 (DS, із множниками Лагранжа). Обидва формулювання обчислюються за частки мілісекунди для n_v .

3. Обговорення

Кінематичне формулювання HQP є простішим: шукана змінна — лише \dot{q} , задачі

мають строгий пріоритет, немає потреби в матриці мас. Однак воно не враховує динаміку: якщо задача стопи найвищого пріоритету займає ступені свободи гомілковостопних суглобів, задача CoM не може зсунути CoM бічно через ті самі суглоби. TSID усуває це обмеження, оскільки контакти формулюють як силові обмеження, а не позиційні задачі: усі суглоби залишаються доступними для руху CoM.

Каскадний добуток $N_k = N_{k-1}(I - \bar{J}_k^+ \bar{J}_k)$ втрачає ортонормальність із кожним рівнем через числові похибки інверсії. SVD-метод перераховує базис нуль-простору заново на кожному рівні з машинною точністю; порогове значення рангу $\sigma_1 n_v \varepsilon_{\text{mach}}$ автоматично адаптується до масштабу якобіанів.

HQP є квазістатичним: без рівняння руху він не може передбачити вплив гравітації на прискорення. TSID лінеаризує конус тертя n_{fc} гранями, що вносить похибку апроксимації до $\sim 29\%$ між гранями. Обидва формулювання не містять задачі кутового моменту [7], що обмежує балансування при швидких рухах.

Порівняно з підходами на базі навчання з підкріпленням, які досягли значних результатів [9; 10], модельне керування забезпечує прозорість: кожна задача має фізичну інтерпретацію, а аналіз розподілу DOF дає змогу діагностувати конфлікти між задачами до запуску регулятора. Гібридні схеми [11; 12] є перспективним напрямом, де подана формалізація може слугувати базовою моделлю для додавання навченої залишкової корекції.

Висновки

У роботі подано уніфіковану формалізацію трьох математичних моделей для керування ходом робота-гуманоїда Unitree G1: (1) DCM-планування зі зворотною рекурсією, кубічною інтерполяцією перерозподілу ваги та генерацією кроків; (2) кінематичний HQP із SVD-базисною проекцією нуль-простору та 6-рівневою ієрархією задач; (3) динамічний TSID з рівнянням руху, зваженими задачами та лінеаризованими конусами тертя. Аналіз розподілу ступенів свободи показав, що сумарний ранг якобіанів ієрархії ходи становить 17 із 18 DOF, обґрунтовуючи вибір 3-DOF задач стоп та необхідність SVD для коректного визначення рангу. Розмірнісне порівняння HQP та TSID кількісно зіставляє два формулювання: 6 послідовних SVD-задач проти однієї ККТ-системи з 30 змінними у подвійній опорі. Подано алгоритми (у вигляді псевдокоду) для кінематичного та динамічного розв'язувачів. Подальша робота: інтеграція модельно-прогнозне керування (MPC) з горизонтом прогнозу, задача

кутового моменту [7] та реактивне планування через точку захоплення (capture point).

Список літератури:

1. Kajita S., Kanehiro F., Kaneko K., et al. The 3D Linear Inverted Pendulum Mode: A Simple Modeling for a Biped Walking Pattern Generation. *Proc. IEEE/RSJ IROS*(2001). DOI:10.1109/IROS.2001.973365. P. 239–246.
2. Pratt J., Carff J., Drakunov S., et al. Capture Point: A Step toward Humanoid Push Recovery. *Proc. IEEE-RAS Humanoids*(2006). DOI:10.1109/ICHR.2006.321385. P. 200–207.
3. Nakamura Y., Hanafusa H., Yoshikawa T. Task-Priority Based Redundancy Control of Robot Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*. Vol. 6, Issue 2. P. 3–15. DOI:10.1177/027836498700600201.
4. Escande A., Mansard N., Wieber P.-B. Hierarchical Quadratic Programming: Fast Online Humanoid-Robot Motion Generation. *The International Journal of Robotics Research*. Vol. 33, Issue 7. P. 1006–1028. DOI:10.1177/0278364914521306.
5. Sentis L., Khatib O. Synthesis of Whole-Body Behaviors through Hierarchical Control of Behavioral Primitives. *International Journal of Humanoid Robotics*. Vol. 2, Issue 4. P. 505–518. DOI:10.1142/S0219843605000594.
6. Kuindersma S., Deits R., Fallon M., et al. Optimization-based Locomotion Planning, Estimation, and Control Design for the Atlas Humanoid Robot. *Autonomous Robots*. Vol. 40, Issue 3. P. 429–455. DOI:10.1007/s10514-015-9479-3.
7. Herzog A., Rotella N., Mason S., et al. Momentum Control with Hierarchical Inverse Dynamics on a Torque-Controlled Humanoid. *Autonomous Robots*. Vol. 40, Issue 3. P. 473–491. DOI:10.1007/s10514-015-9476-6.
8. Hwangbo J., Lee J., Dosovitskiy A., et al. Learning Agile and Dynamic Motor Skills for Legged Robots. *Science Robotics*. Vol. 4, Issue 26. DOI:10.1126/scirobotics.aau5872.
9. Lee J., Hwangbo J., Wellhausen L., et al. Learning Quadrupedal Locomotion over Challenging Terrain. *Science Robotics*. Vol. 5, Issue 47. DOI:10.1126/scirobotics.abc5986.
10. Radosavovic I., Xiao T., Zhang B., et al. Real-World Humanoid Locomotion with Reinforcement Learning. *Science Robotics*. Vol. 9, Issue 89. P. eadi9579. DOI:10.1126/scirobotics.adi9579.
11. Kang D., Cheng J., Zamora M., et al. RL + Model-Based Control: Using On-Demand Optimal Control to Learn Versatile Legged Locomotion. *IEEE Robotics and Automation Letters*. Vol. 8, Issue 10. P. 6619–6626. DOI:10.1109/LRA.2023.3307008.

12. Kasaei M., Abreu M., Lau N., et al. Learning Hybrid Locomotion Skills — Learn to Exploit Residual Actions and Modulate Model-Based Gait Control. *Frontiers in Robotics and AI*. Vol. 10, 2023. DOI:10.3389/frobt.2023.1004490.
13. Kumar A., Fu Z., Pathak D., et al. RMA: Rapid Motor Adaptation for Legged Robots. *Robotics: Science and Systems (RSS)*(2021). DOI:10.15607/RSS.2021.XVII.011.
14. Tong Y., Liu H., Zhang Z. Advancements in Humanoid Robots: A Comprehensive Review and Future Prospects. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*. Vol. 11, Issue 2. P. 301–328. DOI:10.1109/JAS.2023.124140.
15. Gu Z., Li J., Shen W., et al. Humanoid Locomotion and Manipulation: Current Progress and Challenges in Control, Planning, and Learning. (2025). URL: <https://arxiv.org/abs/2501.02116> 2025.
16. Kotelovych D. V., Borzov Yu. O., Burak N. Ye. Dynamic Stability in Legged Robotics: Advances and Challenges. *Bulletin of Lviv State University of Life Safety*. Issue 32. DOI:10.32447/20784643.32.2025.06.
17. Kotelovych D., Borzov Y., Malets I. Stabilization of a Quintuple Inverted Pendulum System in Isaac Sim. *Lecture Notes in Data Engineering, Computational Intelligence, and Decision-Making, Volume 1*(2024). Cham : Springer Nature Switzerland, 2024. DOI:10.1007/978-3-031-70959-3_9. P. 178–193.
18. Carpentier J., Saurel G., Buondonno G., et al. The Pinocchio C++ Library: A Fast and Flexible Implementation of Rigid Body Dynamics Algorithms and Their Analytical Derivatives. *IEEE International Symposium on System Integration (SII)*(2019). DOI:10.1109/SII.2019.8700380. P. 614–619.
19. Vukobratović M., Jurčić D. Contribution to the Synthesis of Biped Gait. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. Vol. BME-16, Issue 1. P. 1–6. DOI:10.1109/TBME.1969.4502596.
20. Takenaka T., Matsumoto T., Yoshiike T. Real Time Motion Generation and Control for Biped Robot — 1st Report: Walking Gait Pattern Generation. *Proc. IEEE/RSJ IROS*(2009). DOI:10.1109/IROS.2009.5353935. P. 1084–1091.
21. Englsberger J., Ott C., Albu-Schäffer A. Three-Dimensional Bipedal Walking Control Based on Divergent Component of Motion. *IEEE Transactions on Robotics*. Vol. 31, Issue 2. P. 355–368. DOI:10.1109/TRO.2015.2405592.
22. NVIDIA Isaac Sim: Robotics Simulation Platform. 2025. URL: <https://developer.nvidia.com/isaac/sim>

References:

1. Kajita, S., Kanehiro, F., Kaneko, K., Yokoi, K., Hirukawa, H. (2001). The 3D Linear Inverted Pendulum Mode: A Simple Modeling for a Biped Walking Pattern Generation. In (pp. 239–246). DOI: <https://doi.org/10.1109/IROS.2001.973365>
2. Pratt, J., Carff, J., Drakunov, S., Goswami, A. (2006). Capture Point: A Step toward Humanoid Push Recovery. In (pp. 200–207). DOI: <https://doi.org/10.1109/ICHR.2006.321385>
3. Nakamura, Y., Hanafusa, H., Yoshikawa, T. (1987). Task-Priority Based Redundancy Control of Robot Manipulators. (2), 3–15. DOI: <https://doi.org/10.1177/027836498700600201>
4. Escande, A., Mansard, N., Wieber, P. (2014). Hierarchical Quadratic Programming: Fast Online Humanoid-Robot Motion Generation. (7), 1006–1028. DOI: <https://doi.org/10.1177/0278364914521306>
5. Sentis, L., Khatib, O. (2005). Synthesis of Whole-Body Behaviors through Hierarchical Control of Behavioral Primitives. (4), 505–518. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219843605000594>
6. Kuindersma, S., Deits, R., Fallon, M., et al. (2016). Optimization-based Locomotion Planning, Estimation, and Control Design for the Atlas Humanoid Robot. (3), 429–455. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10514-015-9479-3>
7. Herzog, A., Rotella, N., Mason, S., Grimminger, F., Schaal, S., Righetti, L. (2016). Momentum Control with Hierarchical Inverse Dynamics on a Torque-Controlled Humanoid. (3), 473–491. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10514-015-9476-6>
8. Hwangbo, J., Lee, J., Dosovitskiy, A., Bellicoso, D., Tsounis, V., Koltun, V., Hutter, M. (2019). Learning Agile and Dynamic Motor Skills for Legged Robots. (26). DOI: <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aau5872>
9. Lee, J., Hwangbo, J., Wellhausen, L., Koltun, V., Hutter, M. (2020). Learning Quadrupedal Locomotion over Challenging Terrain. (47). DOI: <https://doi.org/10.1126/scirobotics.abc5986>
10. Radosavovic, I., Xiao, T., Zhang, B., Darrell, T., Malik, J., Sreenath, K. (2024). Real-World Humanoid Locomotion with Reinforcement Learning. (89), eadi 9579. DOI: <https://doi.org/10.1126/scirobotics.adi9579>
11. Kang, D., Cheng, J., Zamora, M., Zargarbashi, F., Coros, S. (2023). RL + Model-Based Control: Using On-Demand Optimal Control to Learn Versatile Legged Locomotion. (10), 6619–6626. DOI: <https://doi.org/10.1109/LRA.2023.3307008>
12. Kasaei, M., Abreu, M., Lau, N., Pereira, A., Reis, L. P., Li, Z. (2023). Learning Hybrid Locomotion Skills — Learn to Exploit Residual Actions and Modulate Model-Based Gait Control. DOI: <https://doi.org/10.3389/frobt.2023.1004490>
13. Kumar, A., Fu, Z., Pathak, D., Malik, J. (2021). RMA: Rapid Motor Adaptation for Legged Robots. In DOI: <https://doi.org/10.15607/RSS.2021.XVII.011>
14. Tong, Y., Liu, H., Zhang, Z. (2024). Advancements in Humanoid Robots: A

- Comprehensive Review and Future Prospects. (2), 301–328. DOI: <https://doi.org/10.1109/JAS.2023.124140>
15. Gu, Z., Li, J., Shen, W., Yu, W., Xie, Z., et al. (2025). arXiv:2501.02116
16. Kotelovych, D. V., Borzov, Y. O., Burak, N. Y. (2025). Dynamic Stability in Legged Robotics: Advances and Challenges. (32). DOI: <https://doi.org/10.32447/20784643.32.2025.06>
17. Kotelovych, D., Borzov, Y., Malets, I. (2024). Stabilization of a Quintuple Inverted Pendulum System in Isaac Sim. In (pp. 178–193). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-70959-3_9
18. Carpentier, J., Saurel, G., Buondonno, G., Mirabel, J., Lamiroux, F., Stasse, O., Mansard, N. (2019). The Pinocchio C++ Library: A Fast and Flexible Implementation of Rigid Body Dynamics Algorithms and Their Analytical Derivatives. In (pp. 614–619). DOI: <https://doi.org/10.1109/SII.2019.8700380>
19. Vukobratović, M., Jurčić, D. (1969). Contribution to the Synthesis of Biped Gait. (1), 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/TBME.1969.4502596>
20. Takenaka, T., Matsumoto, T., Yoshiike, T. (2009). Real Time Motion Generation and Control for Biped Robot – 1st Report: Walking Gait Pattern Generation. In (pp. 1084–1091). DOI: <https://doi.org/10.1109/IROS.2009.5353935>
21. Engelsberger, J., Ott, C., Albu-Schaffer, A. (2015). Three-Dimensional Bipedal Walking Control Based on Divergent Component of Motion. (2), 355–368. DOI: <https://doi.org/10.1109/TRO.2015.2405592>
22. NVIDIA (2025). . URL: <https://developer.nvidia.com/isaac/sim>

© Д. В. Котелович, 2026.

Науково-методична стаття.

Надійшла до редакції 25.03.2026.

Прийнята до друку 29.04.2026.

Опублікована 25.05.2026.