

*О. А. Кузик, А. Д. Кузик*

*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-8151-2581> – О. А. Кузик

<https://orcid.org/0000-0003-0118-9493> – А. Д. Кузик



[andrij\\_k@yahoo.com](mailto:andrij_k@yahoo.com)

## АНАЛІЗ ЗОБРАЖЕНЬ, ОТРИМАНИХ ЛАЗЕРНИМ СКАНУВАННЯМ ПРОСТОРУ В УМОВАХ НЕДОСТАТНЬОЇ ВИДИМОСТІ, З ВИКОРИСТАННЯМ ДІАГРАМ ВОРОНОГО

**Проблема.** Обробка даних сканування простору лідаром має особливості, зумовлені принципом роботи пристрою. Розміщені ближче об'єкти затіняють розташовані за ними. Це відбувається і у випадку наявності перешкод у вигляді диму та інших подібних явищ. Зафіксовані внаслідок відбиття від диму точки створюють завади у вигляді шумів та погіршують чіткість зображень на задньому плані. Прибирання їх внаслідок звуження діапазонів відстаней може призвести до втрати зображень реальних об'єктів, розташованих на передньому плані. Використання традиційних методів кластеризації має як позитивні сторони, так і недоліки, зумовлені потребою вибору методу та підбору вхідних параметрів. Тому актуальним є використання інших простих і ефективних методів аналізу та покращення зображення для ідентифікації реальних об'єктів та прибирання шумів в умовах задимлення, зокрема методу діаграм Вороного.

**Мета.** Метою роботи є удосконалення аналізу зображень, отриманих лідаром, з використанням методу визначення локальної щільності точок, що базується на застосуванні діаграм Вороного.

**Методи дослідження.** Методи аналізу дискретних 3D зображень, отриманих з допомогою лідара Intel RealSense L515 у звичайних умовах та за недостатньої видимості (задимлення), з використанням діаграм Вороного. Реалізацію методу здійснено у Python. Для аналізу використано інтервальні статистичні розподіли.

**Основні результати.** За діаграмами Вороного можна визначити локальну щільність в комірці Вороного кожної точки набору даних. Для уникнення загромождження зображення та кращого розрізнення за локальною щільністю під час візуалізації доцільно цей показник відображати кольором точок у логарифмічній шкалі. Реалізовано метод у Python для двох наборів точок: у звичайних умовах та за задимлення. У проранжованих за локальною щільністю множинах точок відкинуто ті, що мають найбільші та найменші ці показники. Виявлено очищення від шумів, зокрема спричинених задимленням, після відкидання точок з найменшою локальною щільністю та покращення зображень реальних об'єктів, відкинувши точки з найбільшою локальною щільністю. Оскільки реальний просторовий об'єкт невеликого розміру після такої процедури може бути втрачений, тому є потреба вибору оптимальної частки точок, які відкидають. Порівняння інтервальних розподілів за локальною щільністю для обох наборів даних виявило зростання кількостей точок на інтервалі, близькому до максимальної щільності, та спадання на інтервалі, що йому передує.

**Висновки.** Метод діаграм Вороного дає можливість виявити точки скупчення, що відповідають реальним об'єктам, та зменшити зашумленість відкиданням точок з найменшою щільністю. Невеликі за розмірами реальні об'єкти у задимленому середовищі виявити складніше з причин відображення меншою кількістю точок та меншими локальними щільностями для межових точок, що потребує вибору частки відкидання.

**Ключові слова:** аналіз зображень, покращення зображень, сканування простору лідар, задимлене середовище, діаграми Вороного, Python.

## **ANALYSIS OF IMAGES OBTAINED BY LASER SCANNING OF SPACE IN LOW VISIBILITY CONDITIONS USING VORONOI DIAGRAMS**

**Introduction.** Processing of space scanning data by lidar has features due to the principle of operation of the device. Objects located closer shade those located behind them. This also happens in the case of obstacles in the form of smoke and other similar phenomena. Points recorded as a result of reflection from smoke create noise interference and worsen the clarity of images in the background. Removing them due to narrowing the distance ranges can lead to the loss of images of real objects located in the foreground. The use of traditional clustering methods has both positive aspects and disadvantages, due to the need to choose a method and select input parameters. Therefore, it is relevant to use other methods of analysis and image improvement for identifying real objects and removing noise in smoke conditions, in particular the Voronoi diagram method.

**Purpose.** The purpose of the work is to improve the analysis of images obtained by lidar using the method of determining the local density of points, which is based on the use of Voronoi diagrams.

**Methods.** Methods for analyzing discrete 3D images obtained with the Intel RealSense L515 lidar in normal conditions and in low visibility (smoke), using Voronoi diagrams. The method is implemented in Python. Interval statistical distributions are used for analysis.

**Results.** Using Voronoi diagrams, it is possible to determine the local density in the Voronoi cell of each point of the data set. To avoid image clutter and better distinguish local density during visualization, it is advisable to display this indicator by the color of the points on a logarithmic scale. The method is implemented in Python for two sets of points: in normal conditions and in smoke. In the sets of points ranked by local density, those with the largest and smallest of these indicators are discarded. It was found that noise was removed, in particular caused by smoke, after discarding points with the lowest local density and images of real objects were improved by discarding points with the highest local density. Since a real small object in 3D space may be lost after a such procedure, there is a need to choose the optimal proportion of points to discard. Comparison of interval distributions by local density for both data sets revealed an increase in the number of points on the interval close to the maximum density and a decrease on the interval preceding it.

**Conclusions.** The Voronoi diagram method makes it possible to detect cluster points corresponding to real objects and reduce noise by discarding points with the lowest density. Small real objects in a smoky environment are more difficult to detect due to the fact that they are reflected by a smaller number of points and lower local densities for boundary points, which requires the selection of the proportion to discard.

**Keywords:** image analysis, image enhancement, spatial lidar scanning, smoky environment, Voronoi diagrams, Python.

### **Вступ**

Використання різноманітних методів, пов'язаних з обробкою масивів даних та покращенням якості зображення, дає змогу провести аналіз зображень, виявлення особливостей, пов'язаних з розпізнаванням деталей. Найбільш поширеними є методи обробки зображень, пов'язані з розбиттям на кластери, що відповідають окремим об'єктам чи їх фрагментам, які містяться у зображеннях. Зображення, побудовані лідаром, є рельєфними та відображають відстані від камери до об'єктів в зоні сканування. Можемо вважати, що в результаті сканування простору лідаром отримуємо тривимірний масив точок. Якщо сканування проводиться в умовах недостатньої видимості, зокрема в тумані, задимленому середовищі, зокрема зумовленого пожежами у природних екосистемах, під час опадів, запилення середовища, тоді лазерний промінь може потрапляти не на поверхню сканування, а зупинятися на частках диму, пилу та інших подібних перешкодах і відбиватися від них. Це призведе до появи на зображенні точок, що не

відносяться до реальних об'єктів та перешкоджають їх ідентифікації. Прибирання чи виокремлення зайвих точок є актуальним завданням у процесі аналізу таких зображень.

Виділення груп точок, що відносяться до різних об'єктів з метою їх розпізнавання здійснюється переважно методами кластерного аналізу. Більшість методів кластеризації є напівавтоматичними і потребують коригування вхідних параметрів для отримання найкращого результату.

Найпоширенішими з них є методи k-середніх та їх різновиди, DBSCAN та GMM. У [1] проведено дослідження, яке оцінює чотири методи кластеризації – k-середніх, агломеративну кластеризацію, спектральну кластеризацію та модель гаусової суміші – на основі фотограмметричних параметрів, похибки повторної проекції, точності проекції, кутів перетину, відстані та кількості камер, що використовуються в розрахунках сполучних точок. Результатом є значне покращення якості побудови 3D-моделей, причому метод k-середніх значно перевершує інші методи кластеризації на

основі трьох показників оцінки. Запропоновано перехід до меншої розмірності за допомогою нейронної мережі VAE.

У роботі [2] встановлено, що мережа PointNet не придатна для виокремлення зображень у тривимірному просторі. Тому побудовано ієрархічну нейронну мережу, яка рекурсивно застосовує PointNet до вкладеного розбиття вхідного набору точок. Створена мережа PointNet++ здатна ефективно та надійно вивчати глибинні ознаки наборів точок, використовуючи відстані в метричному просторі. Зокрема, результати, значно кращі за існуючі, були отримані на складних тестах 3D-хмар точок. Загалом нейронні мережі можуть давати непогані результати, проте потребують відповідного навчання.

Підвищення роздільної здатності зображень на основі навчання описано і в [3]. Воно базується на навчанні нейронних структур та придатне до обробки відеопотоку або окремих зображень. Наведений метод визначає вагові коефіцієнти синаптичних зв'язків. Навчання проводиться на парі зображень низької та високої роздільної здатності. Ці дослідження продовжено у роботі [4], де застосовано матрицю дивергенції з автоматичним виявом кросовера та його коефіцієнтів. Це дає змогу покращити роздільну здатність зображень та їх масштабування.

Статистичне видалення викидів або Statistical Outlier Removal (SOR) є одним із широко застосованих методів фільтрації зображення. Він базується на оцінці статистичних даних для точок у заданому околі. Алгоритм, що базується на цьому методі, наведений у [5] та входить до Point Cloud Library (<http://pointclouds.org>). Надалі цей метод вдосконалений на основі врахування інтенсивності та відстані для хмар точок [6]. Він є адаптивним до методу фільтрації та враховує інтенсивність і розрідженість сусідніх зон, що дозволяє ефективно відкинути виявлені лідаром шуми, що спричинені несприятливими погодними умовами, зокрема снігопадом. Ще одним удосконаленням методу статистичного видалення викидів є адаптивна фільтрація, що враховує поріг інтенсивності, видаляє викиди та зберігає значну кількість точок, що належать до об'єктів [7].

Для зменшення шумів під час сканування простору лідаром використовують також інші методи. Одним із методів видалення викидів є аналіз послідовних результатів сканування сенсором лідара, запропонований у [8]. Побудований на його основі алгоритм дає можливість прискорити процес видалення шумів у порівнянні з динамічним видаленням за радіусом та динамічним статистичним видаленням.

Використання традиційних методів кластерного аналізу потребує підбору відповідних параметрів, які залежать від набору даних. До них належать, зокрема, вибір кількості кластерів, вибір відстані до точок, які відкидаються від кластерів, вибір метрики та інші проблеми, які пов'язані із складністю інтерпретації та потребують участі людини у цьому процесі. Зокрема про проблеми масштабованості та чутливості до шуму йдеться у роботі [9]. Стаття аналізує сильні сторони різних методів кластеризації, а також недоліки методів k-середніх, ієрархічної кластеризації, DBSCAN, GMM та спектральної кластеризації. У цій статті для аналізу недоліків методу k-середніх використано метод діаграм Вороного на площині.

Метод діаграм Вороного загалом не відноситься до кластерного аналізу. Він використовується у багатьох практичних задачах для побудови зон близькості до набору точок. Розроблений українським вченим Г. Вороним цей метод, а також сферу його застосування описано у [10].

Сучасні праці, присвячені застосуванню діаграм Вороного, стосуються розв'язання багатьох задач. У [11] для покращення локалізації у вузлах бездротової сенсорної мережі за обмеженими даними пропонується двоетапний метод, який базується на застосуванні діаграм Вороного у 3D для офлайн навчання та подальшої обробки з використанням гібридної регресії та методу k-середніх. Результатом є покращення орієнтування у просторі.

Розпізнавання процесів поведінки у натовпі, зокрема штовхання, за відеозображенням досліджено у [12]. Запропонований метод базується на використанні діаграм Вороного, за допомогою якого визначають локальні області, пов'язані з кожною людиною у натовпі. Це дає змогу на мікрорівні кожної людини дослідити потік людей та покращити управління ним. Після застосування методу Вороного отримані області обробляються у нейронній мережі EfficientNetV1B0.

Діаграми Вороного у просторі використовують для досліджень та моделювання пористих структур. У роботі [13] наведено дослідження з проектування штучної пористої кістки для імплантації з використанням діаграм Вороного. За випадково згенерованим набором точок у просторі формується просторова структура у вигляді тривимірної діаграми Вороного. Далі розв'язується практична задача визначення напружень у просторовій структурі.

Актуальною є проблема покриття зони безпілотними літальними апаратами, яка описана у [14] та використовується у сільськогосподарському

моніторингу, збереженні лісового господарства та міському плануванні. Вона розв'язується на основі побудови діаграм Вороного.

Дослідження фізичних систем як сукупності часток у тривимірному просторі та часі є важливим завданням фізики та техніки. Для вирішення питань щодо впорядкованості таких сукупностей у [15] запропоновано застосовувати метод теселяції Вороного. Він дасть змогу охарактеризувати фізичну систему та її структуру. Ця задача стосується фізичних систем і може бути актуальною для аналізу систем точок, отриманих скануванням простору лідаром.

У завданнях геодезії та картографії виникає також проблема просторового аналізу. Її розв'язання можливе на основі діаграм Вороного та пропонується у [16]. Для аналізу будується модель поверхні, яка не лише працює статично, але і дає можливість відображати динамічні процеси на поверхні.

Використовують діаграми Вороного під час роботи з зображеннями і у медичній сфері. Зменшення зашумлення зображень очного дна при діабетичній ретинопатії з використанням діаграм Вороного проведено у [17]. Для аналізу побудовано триангуляцію Делоне та діаграми Вороного на площині. Сегментація ядер під час діагностики онкологічних захворювань за плоскими зображеннями застосовує на одному з етапів поєднання методів k-середніх, діаграм Вороного та суперпіксельних міток для навчання нейронної мережі [18].

Деякі роботи, присвячені комп'ютерному зору та розпізнаванню зображень, використовують не лише класичні діаграми Вороного, а і їх модифікації. Зокрема у [19] описано використання методів аналізу множин точок на площині на основі діаграм Вороного як алгоритму пошуку найближчих сусідів, кластерно-індукованих діаграм Вороного, що враховують взаємний вплив точок, та Діаграм Лагерра-Вороного, що враховують ваги, зосереджені у точках.

В процесі вирішення завдання покращення якості зображення в умовах недостатньої видимості звернуто увагу на той факт, що щільність точок, які формують зображення об'єктів, та відбитих від перешкоди у вигляді диму, туману чи пилу, є неоднаковою. Точки перешкод розміщені менш щільно, ніж об'єктів на поверхні сканування. Тому визначення локальної щільності та виділення точок з більшою локальною щільністю дасть змогу зосередитися на поверхні сканування та реальних об'єктах. Метод DBSCAN дає можливість відфільтрувати зображення, відкидаючи точки, які розташовані на певній відстані від груп точок. Але для цього методу потрібно наперед задавати

параметри, вибір яких не завжди є однозначним і може призводити до різних результатів поділу на кластери. Те ж стосується і методу k-середніх. Статистичне видалення шумів теж не завжди ефективно, потребує послідовності наборів даних і постійно удосконалюється. З урахуванням наведеного актуальним завданням, що пропонується для більш ефективного аналізу зображень і розрізнення об'єктів та перешкод у вигляді аерозолі чи диму, є визначення локальної щільності за діаграмами Вороного, побудованими у тривимірному просторі за результатом його сканування лідаром.

**Метою роботи** є удосконалення аналізу зображень, отриманих лідаром, з використанням методу визначення локальної щільності точок, що базується на застосуванні діаграм Вороного у 3D-просторі.

#### **Методи дослідження**

У роботі використано методи аналізу дискретних 3D-зображень, отриманих з допомогою лідара Intel RealSense L515 у звичайних умовах та за недостатньої видимості (затуманення), з використанням діаграм Вороного. Реалізацію методу здійснено у Python.

#### **Результати**

Діаграми Вороного широко застосовують у різних галузях для вирішення завдань поділу двовимірного та тривимірного просторів, у яких задано набори точок, на зони близькості. Відстань між кожною точкою комірки Вороного та відповідною точкою всередині, що належить до заданої множини точок є меншою, ніж до такої ж точки іншої комірки.

Будують діаграми Вороного на основі триангуляції Делоне. На площині комірки мають вигляд многокутників, всередині яких містяться відповідні точки заданого набору. Діаграми Вороного можна використати для визначення локальної щільності точок, застосувавши формулу

$$\rho = \frac{1}{S}, \quad (1)$$

де  $S$  – площа комірки Вороного. Ця величина буде локальною щільністю в комірці на площині.

Діаграми Вороного використовують не лише на площині, але й у просторі. Тоді комірки будуть мати вигляд многогранників, з відповідними точками всередині. У цьому випадку локальна щільність буде визначатися формулою

$$\rho = \frac{1}{V}, \quad (2)$$

де  $V$  – об'єм комірки Вороного.

Для реалізації методу потрібно за даним набором точок, які виявив лідар, здійснити побудову триангуляції Делоне у просторі та провести розбиття на комірки Вороного. Далі потрібно обчислити об'єм кожної з комірок і за формулою (2) знайти локальну щільність.

Використання діаграм Вороного дає можливість за набором точок, отриманим в результаті сканування лідаром, оцінити зони їх скупчення, які ймовірно будуть відповідати реальним об'єктам, та зони розрідження, які відповідатимуть середовищу з недостатньою видимістю. У цьому випадку точки в комірках з низькою локальною щільністю можна відкинути, що буде аналогом застосування фільтрації зображення згаданими раніше методами кластерного аналізу. Точки, в комірках яких висока локальна щільність, є точками скупчення. Утворені ними групи можна наступним етапом аналізувати на присутність об'єктів, які виявив лідар.

Застосування діаграм Вороного для аналізу зображень лідара має певні особливості, які слід враховувати. Інформація, яка виводиться з лідара, має вигляд матриці, у яку записані відстані, визначені лідаром до об'єктів зони сканування

$$M = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & \dots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z_{m1} & z_{m2} & z_{m3} & \dots & z_{mn} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де  $m$  та  $n$  – кількості точок, які сканує лідар по вертикалі та горизонталі. Якщо їх розглядати у тривимірному просторі безпосередньо, тоді відстані між проекціями сусідніх точок по горизонталі (вісь  $Ox$ ) та вертикалі (вісь  $Oy$ ) дорівнюють 1 (у вузлах сітки з розміром комірок  $1 \times 1$ ), а по осі  $Oz$  буде відкладено відстані від лідара до виявлених точок. Якщо якоїсь точки не виявлено у діапазоні сканування, тоді відповідне значення  $z_{ij}$  у матриці буде невизначеним. Якщо ж лідар виявив точку та виміряв відстань до неї, тоді у матриці на перетині відповідних рядка і стовпчика буде наведено це значення.

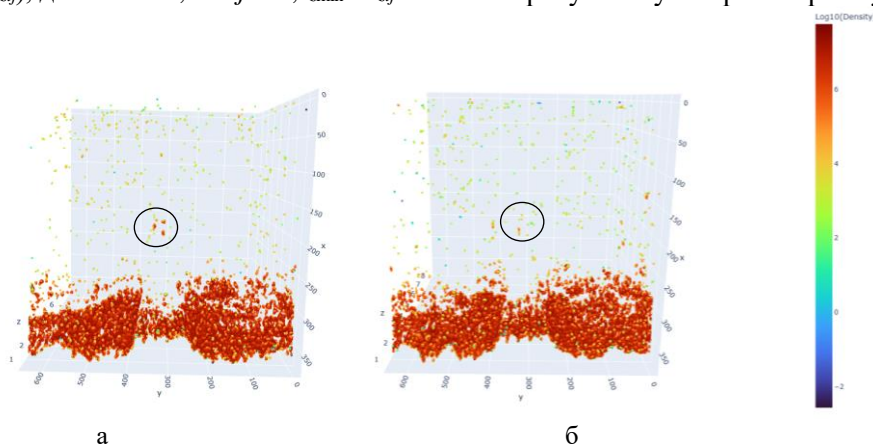
Для аналізу методом діаграм Вороного за матрицею  $M$  побудуємо набір точок у просторі  $Oxyz$  таким чином, що кожна виявлена лідаром точка має координати  $(i, j, z_{ij})$ , де  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $z_{\min} \leq z_{ij} \leq$

$z_{\max}$ , а  $z_{\min}$  і  $z_{\max}$  – мінімальна та максимальна відстань сканування. Їх кількість  $p$  буде дорівнювати кількості точок, виявлених лідаром,  $p \leq n \cdot m$ . За отриманим набором точок здійсимо розбиття простору на комірки – опуклі многогранники. Обчислимо об'єми отриманих комірок, перенумерувавши їх:  $V_s$ ,  $1 \leq s \leq p$ , та визначимо локальну щільність у кожній з них за формулою (2). Результати подамо у вигляді матриці

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & \dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & \dots & V_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ V_{m1} & V_{m2} & V_{m3} & \dots & V_{mn} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

елементами у якій є  $V_{ij} = V_s$  для виявлених лідаром точок і  $V_{ij}$  не визначені для відсутніх в області сканування точок з абсцисою  $i$  та ординатою  $j$ . Для більш точного аналізу відкинемо також точки, які є поруч з межею області та для яких неможливо побудувати повноцінні комірки Вороного, а тому об'єми відповідних многогранників можуть бути дуже великими та не будуть відповідати реальній локальній щільності.

Для побудови діаграм Вороного, визначення локальної щільності в околах точок простору та подальшого аналізу зображень розроблено відповідний алгоритм та його реалізацію в Python. З метою уникнення захаращення діаграми Вороного не відобразимо, а зобразимо тільки точки у просторі та їх локальні щільності. За результатами роботи алгоритму для подальшого аналізу отримано 3D зображення результатів роботи лідара у звичайних умовах за відсутності оптичних перешкод та у задимленому середовищі (рис. 1). Для відображення локальної щільності на рисунках обчислено логарифми локальних щільностей точок  $(i, j, z_{ij})$ , які були виявлені лідаром, а саме  $\lg V_{ij} = \lg V_s$  та використано кольорову шкалу на тривимірному графіку.

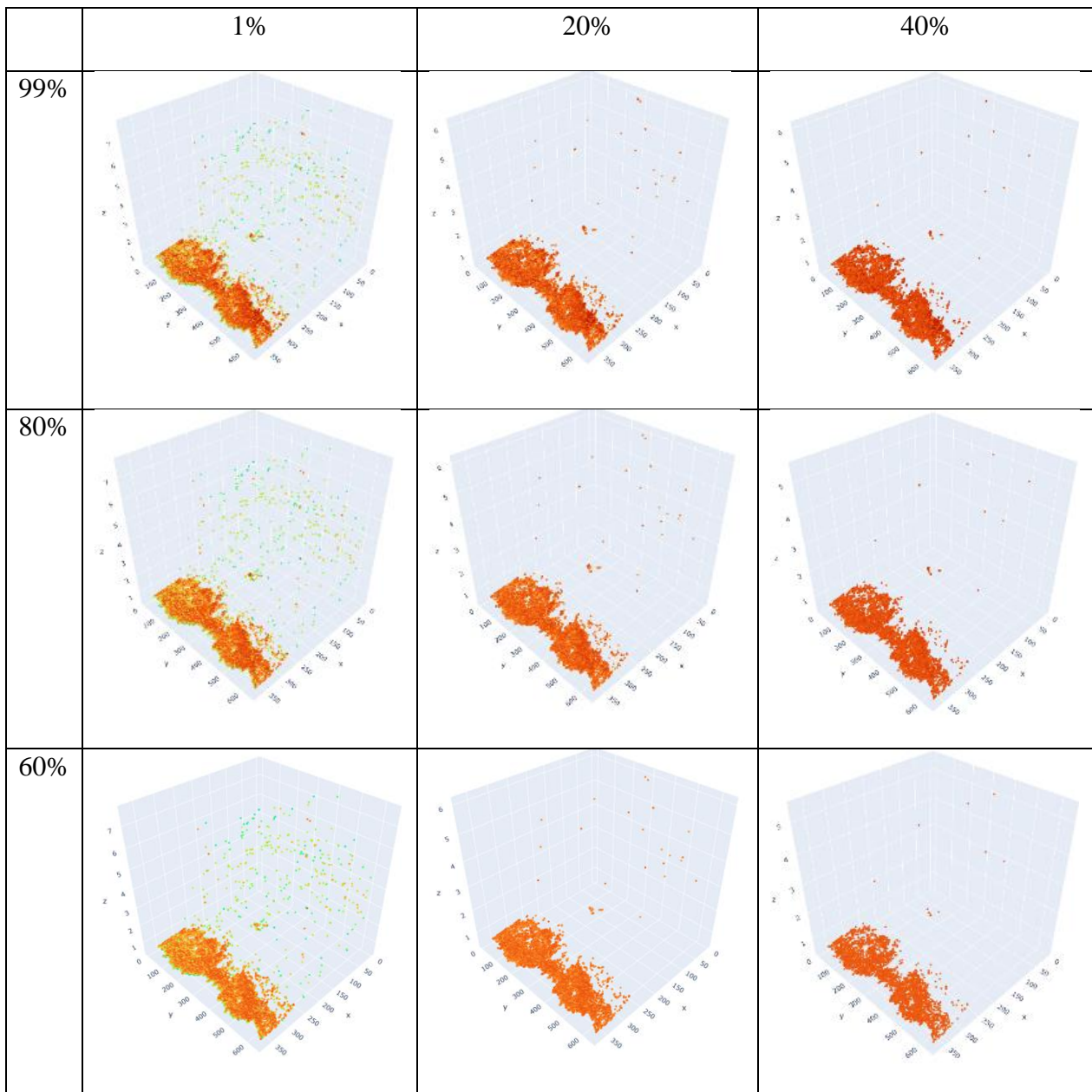


**Рисунок 1** – Локальні щільності точок, відображені кольором у логарифмічній шкалі, отримані методом діаграм Вороного за даними з лідара Intel RealSense L515 (виділено тестовий об'єкт на відстані 2,1-2,2 м): а – у звичайних умовах; б – у задимленому середовищі

Зображення у звичайних умовах містить 32117 точок, а у задимленому середовищі – 37133 точки, що зумовлено наявністю перешкод у вигляді часток диму, до яких виміряно відстані, які відкладені на осі  $Oz$  (на рис 1 ця вісь у горизонтальній площині).

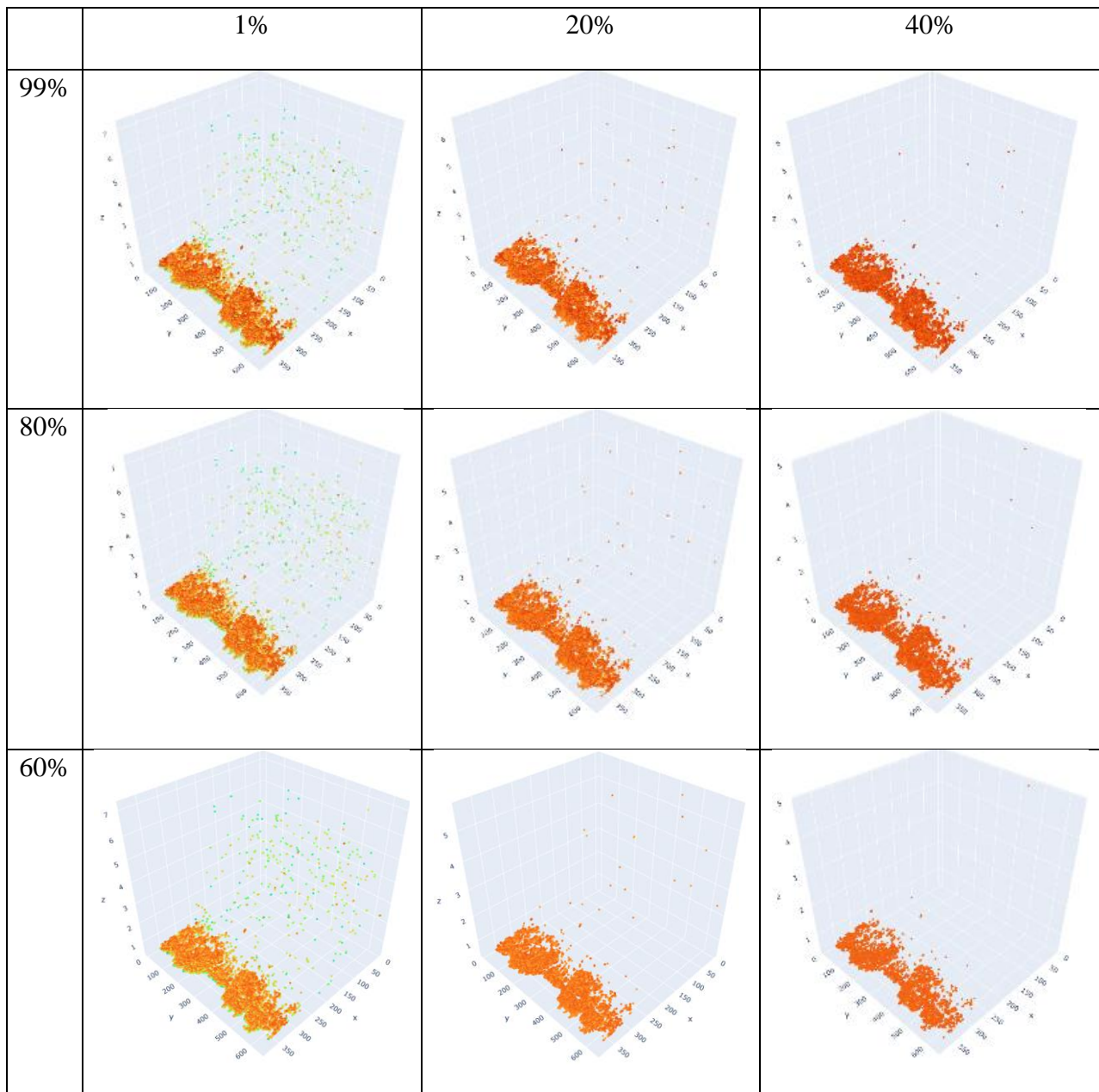
З метою аналізу та покращення зображення видалимо точки з найбільшим і найменшими щільностями. Для цього впорядкуємо точки за

зростанням щільності та послідовно відкидатимемо точки з щільністю меншою за 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 та 40% і вищою за 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90 та 99%. Як приклад, відобразимо точки, які залишилися після відкидання точок із щільностями, меншими за 1, 20% і 30%, і вищими за 60, 80 і 99%, а локальну щільність відобразимо кольором у логарифмічній шкалі, вісь  $Oz$  – вертикальна (рис. 2).



а

**Рисунок 2** – Локальні щільності, визначені з використанням діаграм Вороного за даними, отриманими з лідара Intel RealSense L515 після відкидання впорядкованих за локальною щільністю 1, 20, 40% найрідших точок та 60, 80, 99% найгустіших точок: а – у звичайних умовах; б – у задимленому середовищі



б

**Продовження рисунка 2** – Локальні щільності, визначені з використанням діаграм Вороного за даними, отриманими з лідара Intel RealSense L515 після відкидання впорядкованих за локальною щільністю 1, 20, 40% найрідших точок та 60, 80, 99% найгустіших точок: а – у звичайних умовах; б – у задимленому середовищі

У кожному з випадків на рис. 2 зображення утворює відповідний набір точок, які залишилися після відкидання. Кількості точок, які залишилися після відкидання точок з найменшими локальними щільностями (меншими за 1, 10, 20, 30 та 40%), і точок з найбільшими локальними щільностями (більшими за 60, 70, 80, 90 та 99%), наведені в таблиці 1.

**Таблиця 1**

Кількість точок, яка залишилася після відкидання точок з найбільшими і найменшими локальними щільностями

		Відсоток відкинутих точок з найменшими локальними щільностями				
		1%	10%	20%	30%	40%
		У звичайних умовах				
Відсоток відкинутих точок з найбільшими локальними щільностями	99%	30258	27479	24392	21304	18217
	90%	27479	24700	21613	18525	15438
	80%	24392	21613	18526	15438	12351
	70%	21304	18525	15438	12350	9263
	60%	18217	15438	12351	9263	6176

Продовження таблиці 1

Відсоток відкинутих точок з найбільшими локальними щільностями	Відсоток відкинутих точок з найменшими локальними щільностями				
	1%	10%	20%	30%	40%
	У задимленому середовищі				
99%	29898	27153	24102	21051	18000
90%	27153	24408	21357	18306	15255
80%	24102	21357	18306	15255	12204
70%	21051	18306	15255	12204	9153
60%	18000	15255	12204	9153	6102

Для пошуку відмінностей у наборах даних за щільностями у звичайних умовах та за недостатньої видимості побудуємо інтервальні розподіли значень цієї величини (рис. 3).

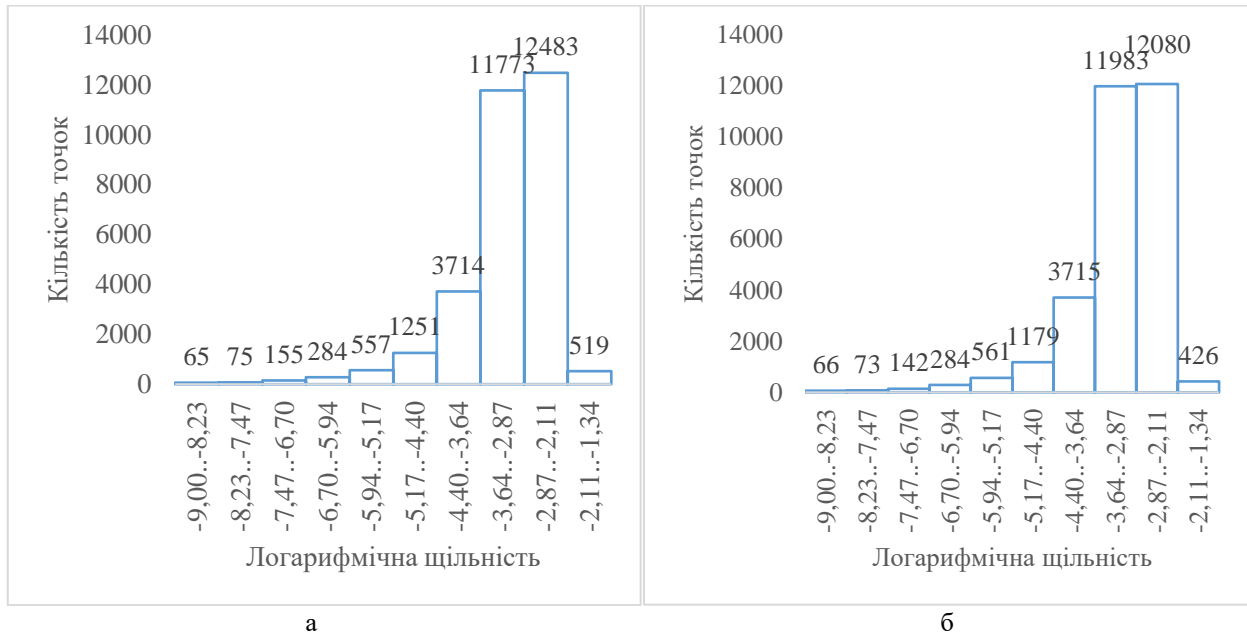


Рисунок 3 – Інтервальний розподіл локальної щільності точок: а – у звичайних умовах; б – у задимленому середовищі

Для аналізу розглянемо розподіл різниць цих значень (рис. 4).

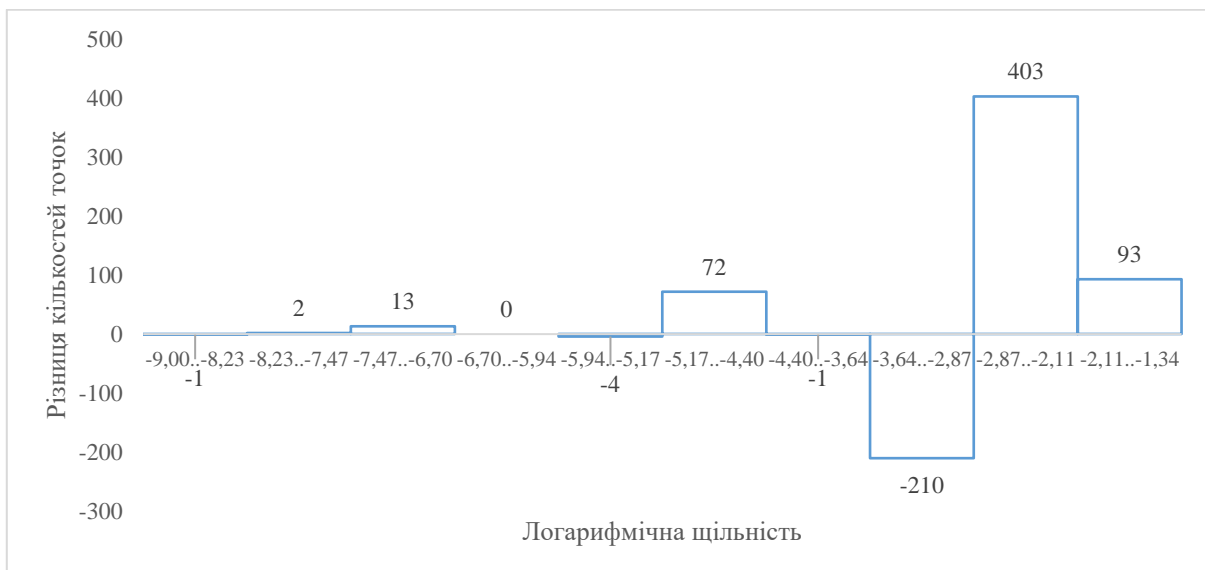
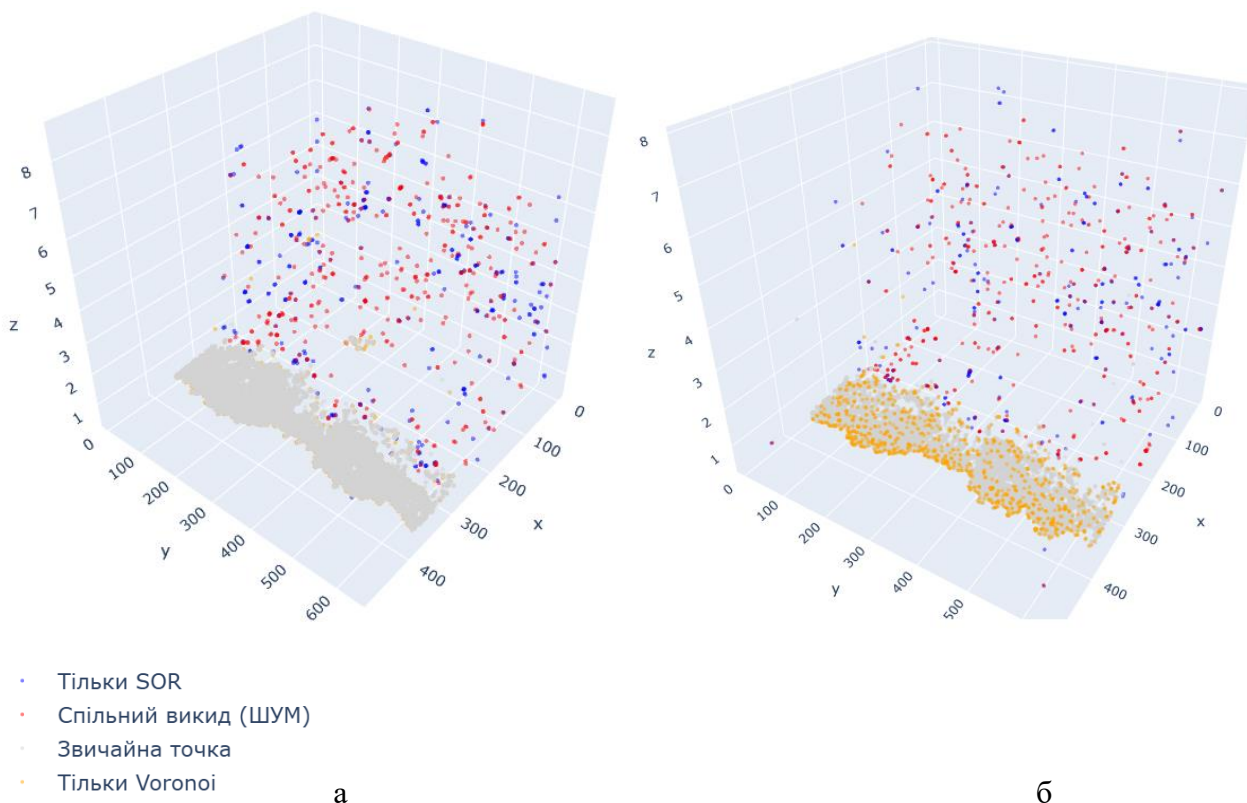


Рисунок 4 – Інтервальний розподіл різниць кількостей точок у звичайних умовах та в задимленому середовищі

Для порівняння ефективності методу діаграм Вороного з відомими методами, зокрема статистичним SOR, відкинута 5% точок з найменшими локальними щільностями, що

визначені за методом діаграм Вороного, та розглянуто відстані до 20 найближчих сусідів у алгоритмі SOR. Результати порівняння наведено на рис. 5.



**Рисунок 5** – Порівняння результатів відкидання точок з метою фільтрації зображення методами статистичного видалення викидів SOR, визначення локальних щільностей із застосуванням діаграм Вороного та обома методами: а – для звичайних умов, б – у задимленому середовищі

На рис. 5 сірим кольором зображено точки, які залишилися після обох методів, червоним – які відкинуті як шум обома методами, синім кольором – відкинуті тільки SOR і помаранчевим

– відкинуті тільки методом діаграм Вороного. Кількості викидів, відкинутих обидвома методами та кожним зокрема, наведені в табл. 2

**Таблиця 2**

Кількість точок, які відкинуті в результаті фільтрації зображення методом SOR, методом діаграм Вороного та обома методами в нормальних умовах та у задимленому просторі

Умови середовища	Усього точок	Кількість відкинутих точок			Коефіцієнти кореляції між методами
		тільки методом SOR	тільки діаграмами Вороного	обома методами	
Нормальні умови	30876	661	1544	411	0,404
Задимленість	30510	654	1526	421	0,409

### Обговорення

Діаграми Вороного дають змогу виокремити об'єкти з різною локальною щільністю, що може бути альтернативою кластеризації традиційними методами. Як видно з рис. 1, об'єкти на передньому плані внизу зображено майже суцільною сукупністю точок, тому локальні щільності в комірках, що відповідають цим точкам, є високими. На інших частинах простору

локальні щільності є значно меншими, окрім тестового об'єкта, розташованого на відстані 2,1-2,2 м від лідара. Це дає змогу його ідентифікувати. Дещо більшими є локальні щільності у задимленому середовищі (рис. 1б). У деяких частинах простору, заповненого димом, вони можуть перевищувати щільності в околах точок тестового об'єкта, що погіршує його ідентифікацію.

Як у звичайних умовах, так і в задимленому середовищі кількість точок, які є результатами відображення поза реальними об'єктами, зменшується одночасно з відкиданням точок з найменшими локальними щільностями (рис. 2). Відкидання точок з найбільшими локальними щільностями призводить до покращення чіткості зображення великих реальних об'єктів, зокрема їх поверхні. Після відкидання найгустіших і найрідших точок виявлено, що у незадимленому середовищі тестовий об'єкт спостерігається за всіх розглянутих комбінацій відсотків найгустіших та найрідших точок. А у середовищі з димом після відкидання 40% найгустіших точок відповідно до ранжування за цим показником, були відкинуті ті, що відповідають тестовому об'єкту та він перестав відображатися. Відкидання меншого відсотка найрідших точок залишає тестовий об'єкт, проте він представлений у вигляді однієї точки. Для випадків відкидання 10% найрідших точок тестовий об'єкт представлений двома точками. Для випадків, коли відкинуто 20 та 30% найрідших точок, об'єкт відображається лише однією точкою.

Відкидання найрідших точок зображення після його обробки за допомогою діаграм Вороного дає змогу виявити реальні об'єкти та відфільтрувати зайві точки, зумовлені задимленістю або наявністю інших перешкод, проте до певної межі. При цьому відкидання навіть 1 % точок з найменшою та 1% з найбільшими щільностями (таблиця 1) у випадку задимленості значно зменшує кількість точок у порівнянні з початковим набором, а саме від 37133 до 29898. У випадку звичайних умов видимості початковий набір містить 32117 точок, а після відкидання 1 % з найменшими щільностями – 30258.

Інтервальні розподіли локальних щільностей для звичайних умов та за недостатньої видимості (рис. 3) загалом є схожими та корелюються між собою з високим коефіцієнтом кореляції 0,9995, для проаналізованих наборів точок. Найбільше точок в обох випадках належить інтервалам з логарифмічною локальною щільністю  $-2,87...-2,11$ . Дещо меншими, проте високими є кількості точок на інтервалах  $-3,64...-2,87$ . Точки з високою локальною щільністю, як уже зазначалося, відповідають реальним об'єктам. Найменші кількості точок відповідають інтервалам найменшої щільності  $-9,00...-8,23$ , а далі зростають до передостанніх інтервалів. На останньому інтервалі  $-2,11...-1,34$  кількості точок знову значно зменшуються.

Для пошуку різниць між випадками звичайних умов та недостатньої видимості побудуємо інтервальний розподіл різниць

кількостей точок (рис. 4). Найбільшими додатними різницями кількостей точок є значення 403, яке відповідає інтервалу з досить високою локальною щільністю у логарифмічній шкалі  $-2,87...-2,11$ . Дещо меншими, проте істотними є додатні різниці кількостей на інтервалах  $-2,11...-1,34$  (93 точки) та  $-5,17...-4,40$  (72 точки). Найбільші від'ємні різниці є на інтервалах  $-3,64...-2,87$  (210 точок). Більші кількості точок із логарифмічною щільністю  $-2,87...-2,11$  у реальних умовах в порівнянні з задимленим середовищем свідчать про те, що вони переважно відображають реальні об'єкти, із зображень яких у разі задимлення можуть деякі точки не відобразитися, а замість них за відповідним напрямком реєструватися точки диму. А збільшення кількостей точок у задимленому середовищі на інтервалах з дещо меншою щільністю  $-3,64...-2,87$  можна пояснити тим, що вони відображають частки диму.

Порівняння роботи методів діаграм Вороного та статистичного видалення викидів SOR зокрема для звичайних умов і задимленого середовища (рис. 5, табл. 2), свідчить про певні відмінності в результатах їх роботи.

Більша кількість точок відкинута в результаті роботи методу діаграм Вороного як у нормальних умовах, так і в задимленому середовищі. Багато з таких відкинутих точок розміщені по краях реальних об'єктів, які межують з відкритим простором, а тому їхні комірки Вороного не є повноцінними, мають великі площі і для відповідних точок локальні щільності будуть малими.

Коефіцієнти кореляції між результатами роботи обох методів у нормальних умовах та внаслідок задимлення є помірними, близькими за значеннями та становлять відповідно 0,404 і 0,409.

У звичайних умовах частина точок, які відповідають тестовому об'єкту, була відкинута методом діаграм Вороного та обома методами, проте частина залишилася та дозволяє ідентифікувати цей об'єкт. Метод SOR, окрім відкинутих разом з методом діаграм Вороного, не відкинув жодної з точок тестового об'єкта.

Для задимленого середовища застосування окремо методу SOR та обох методів призвели до відкидання точок тестового об'єкта. При цьому метод діаграм Вороного, окрім як у поєднанні з SOR, не призвів до відкидання точок, що відповідають цьому об'єкту.

Для інших реальних об'єктів кількість відкинутих методом діаграм Вороного точок є значною, що зумовлене не лише межуванням з відкритим простором і відсутністю можливості побудови повноцінних комірок Вороного для цих точок, але й особливостями цих об'єктів, а саме

тим, що вони – це трав'яний покрив, якому властива неоднорідність структури.

Як уже зазначалося, безпосередню побудову діаграм Вороного здійснювати недоцільно, оскільки по осі  $Oz$  координати точок значно різняться між собою та між розміром комірок сітки на площині  $Oxy$ . Це спричинить видовженість комірок Вороного вздовж осі  $Oz$ . Усунути цю проблему можна здійснивши нормування відстаней на цій осі введенням деякого коефіцієнта, який зменшить різницю між відстанями по осях  $Ox$ ,  $Oy$  та  $Oz$ . Іншою відомою проблемою методу діаграм Вороного як на площині, так і у просторі є відсутність можливості побудувати повноцінні комірки Вороного, розташовані поблизу межі. Це пов'язане з відсутністю точок поза областю побудови. Вирішити цю проблему можна, отримавши додаткові точки за межами області, що розглядається, або зменшенням з усіх сторін цієї області, щоб у ній залишилися точки з повноцінними комірками Вороного, а відповідні фрагменти комірок лежали як в області, так і поза нею.

#### Висновки

Метод діаграм Вороного дає можливість за локальною щільністю виявити точки скупчення, що відповідають реальним об'єктам, та провести аналіз зображення, отриманого після сканування лідаром простору. У тривимірному просторі недоцільно безпосередньо відобразити діаграми Вороного через захащення зображення та їх можливу видовженість у разі значного розкиду відстаней, а замість них кольорами точок відобразити локальні щільності. У задимленому середовищі та інших подібних випадках для покращення розрізнення за цим показником доцільно використати логарифмічну шкалу щільностей.

Під час сканування лідаром невеликих за розмірами об'єктів у задимленому середовищі їх виявити складніше з причин відображення меншою кількістю точок з меншими локальними щільностями, оскільки замість окремих точок виявляються частки диму, розташовані на шляху лазерного променя.

Інтервальний розподіл дає змогу виявити зменшення чи збільшення кількостей точок у задимленому середовищі у порівнянні із звичайними умовами та може свідчити про покращення виявлення реальних об'єктів та фільтрацію зображень від диму.

Дія методу діаграм Вороного відрізняється від відомого статистичного видалення викидів (SOR) більшою кількістю видалених точок, проте кількість точок, видалених одночасно обома методами, становить як у нормальних умовах, так

і в задимленому середовищі, близькі за значенням частки, а саме: близько 21% відкинутих методом діаграм Вороного та 38-39% відкинутих методом SOR. В умовах задимлення обидва методи спричинили відкидання точок тестового об'єкта, що свідчить про необхідність підбору параметрів обох методів (відсотка відкинутих точок з найменшою щільністю для методу діаграм Вороного і кількості найближчих сусідів, до яких вимірюють відстані в алгоритмі SOR).

Під час сканування простору лідаром та використання для обробки інформації методу діаграм Вороного доцільно дещо зменшувати область для аналізу, щоб у цій області відображалися лише повноцінні комірки Вороного, для яких можна визначити реальні локальні щільності.

#### Список літератури

1. Emadi S., Limongiello M. Optimizing 3D Point Cloud Reconstruction Through Integrating Deep Learning and Clustering Models. *Electronics*. 2025. Vol. 14, No 2. Pp. 399. <https://doi.org/10.3390/electronics14020399>.
2. Qi C. R., Yi L., Su H., Guibas L. J. Pointnet++: Deep hierarchical feature learning on point sets in a metric space. *Advances in neural information processing systems*. 2017. No 30. [https://papers.nips.cc/paper\\_files/paper/2017/hash/d8bf84be3800d12f74d8b05e9b89836f-Abstract.html](https://papers.nips.cc/paper_files/paper/2017/hash/d8bf84be3800d12f74d8b05e9b89836f-Abstract.html)
3. Izonin I., Tkachenko R., Peleshko D., Rak T., Batyuk D. Learning-based image super-resolution using weight coefficients of synaptic connections. *Computer Sciences and Information Technologies. CSIT 2015: proceedings of the Xth International Scientific and Technical Conference, Lviv, Ukraine, September 14-15. Lviv, 2015. Pp. 25-29.* <https://doi.org/10.1109/STC-CSIT.2015.7325423>.
4. Peleshko D., Rak T., Izonin, I. Image Superresolution via Divergence Matrix and Automatic Detection of Crossover. *I.J. Intelligent Systems and Applications*. 2016. No 12. Pp. 1–8. <https://doi.org/10.5815/ijisa.2016.12.01>.
5. Rusu R. B., Cousins S. 3D is here: Point Cloud Library (PCL). *2011 IEEE international conference on robotics and automation*. IEEE. 2011. Pp. 1-4. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2011.5980567>.
6. Yan C., Bengtsson M. IDSOR: Intensity-and Distance-Aware Statistical Outlier Removal for Weather-Robust LiDAR Point Clouds. *arXiv preprint*. 2026. arXiv:2602.05876. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2602.05876>.
7. Le M.-H., Cheng C.-H., Liu D.-G., Nguyen T.-T. An Adaptive Group of Density Outlier Removal Filter: Snow Particle Removal from LiDAR Data. *Electronics*. 2022. Vol. 11, No 19. 2993. <https://doi.org/10.3390/electronics11192993>.

8. Byun Y. -S. Jeong R. -G. High-Speed Outlier Removal Filter for LiDAR Sensor Point Cloud Data. In *IEEE Access*. 2024. Vol. 12. 192467-192481. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3517750>.
9. Wani A. A. Comprehensive analysis of clustering algorithms: exploring limitations and innovative solutions. *PeerJ. Computer science*. 2024. 10. e2286. <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.2286>
10. Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. with a foreword by D.G. Kendal. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2020. 658 P.
11. Hasan M. K., Khapre S., Dhasarathan C., Islam S., Ahmed F. R. A., Ahmed T. E. ... & Ghazal T. M. 3D Voronoi Diagram Division-Based Hybrid Weighted Regression Localization Algorithm. *Tsinghua Science and Technology*. 2025. Vol. 30, No 6. Pp. 1-24. <https://doi.org/10.26599/TST.2024.9010126>.
12. Alia A., Maree M., Chraibi M., Seyfried A. A novel Voronoi-based convolutional neural network framework for pushing person detection in crowd videos. *Complex & Intelligent Systems*. 2024. Vol. 10, No 4. Pp. 5005-5031. <https://doi.org/10.1007/s40747-024-01422-2>.
13. Chao L., He Y., Gu J., Xie D., Yang Y., Shen L., ... Liang H. Design of porous structure based on the Voronoi diagram and stress line for better stress shielding relief and permeability. *Journal of Materials Research and Technology*. 2023. No 25. Pp. 1719-1734. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.05.282>.
14. Wang J., Wang R. Multi-UAV area coverage track planning based on the Voronoi graph and attention mechanism. *Applied sciences*. 2024. Vol. 14, No 17. 7844. <https://doi.org/10.3390/app14177844>.
15. Lazar E. A., Lu J., Rycroft C. H. Voronoi cell analysis: The shapes of particle systems. *American Journal of Physics*. 2022. Vol. 90, No 6. Pp. 469-480. <https://doi.org/10.1119/5.0087591>.
16. Duan X., Li L., Ge Y., Liu B. Exact Voronoi diagram for topographic spatial analysis. *GIScience & Remote Sensing*. 2023. Vol. 60, No 1. 2171703. <https://doi.org/10.1080/15481603.2023.2171703>.
17. Nirmala K., Saruladha K. Denoising Fundus Images of Diabetic Retinopathy Using Natural Neighborhood Kriging. In: Abraham A., Bajaj A., Gandhi N., Madureira A.M., Kahraman C. (eds) *Innovations in Bio-Inspired Computing and Applications. IBICA 2022*. Lecture Notes in Networks and Systems. Springer, Cham, 2022. 649. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-27499-2\\_83](https://doi.org/10.1007/978-3-031-27499-2_83).
18. Pan X., Hou F., Liu Z., Feng S., Lan R. (2024). Eofd-net: Edge optimization and feature denoising for weakly supervised deep nuclei segmentation with point annotations. *2024 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP): Proceedings*. Seoul, Korea Republic, 2024. Pp. 2180-2184. <https://doi.org/10.1109/ICASSP48485.2024.10448142>.
19. Lei, M., Ma, C., Ding, M., Zhou, Y., Huang, Z., & Xu, J. (2025). TTVD: Towards a Geometric Framework for Test-Time Adaptation Based on Voronoi Diagram. *The Thirteenth International Conference on Learning Representations: Proceedings*. <https://openreview.net/forum?id=5sU32OCxgZ>.

## References

- Emadi, S., & Limongiello, M. (2025). Optimizing 3D Point Cloud Reconstruction Through Integrating Deep Learning and Clustering Models. *Electronics*, 14(2), 399. <https://doi.org/10.3390/electronics14020399>].
- Qi, C. R., Yi, L., Su, H., & Guibas, L. J. (2017). Pointnet++: Deep hierarchical feature learning on point sets in a metric space. *Advances in neural information processing systems*, 30. [https://papers.nips.cc/paper\\_files/paper/2017/hash/d8bf84be3800d12f74d8b05e9b89836f-Abstract.html](https://papers.nips.cc/paper_files/paper/2017/hash/d8bf84be3800d12f74d8b05e9b89836f-Abstract.html)
- Izonin, I., Tkachenko, R., Peleshko, D., Rak, T., & Batyuk, D. (2015). Learning-based image super-resolution using weight coefficients of synaptic connections. In *Computer Sciences and Information Technologies. CSIT 2015: proceedings of the Xth International Scientific and Technical Conference* (pp. 25-29). September 14-15, Lviv, Ukraine. <https://doi.org/10.1109/STC-CSIT.2015.7325423>
- Peleshko, D., Rak, T., & Izonin, I. (2016). Image Superresolution via Divergence Matrix and Automatic Detection of Crossover. *I.J. Intelligent Systems and Applications*, 12, 1-8. <https://doi.org/10.5815/ijisa.2016.12.01>.
- Rusu, R. B., & Cousins, S. (2011). 3D is here: Point Cloud Library (PCL). In *2011 IEEE international conference on robotics and automation* (pp. 1-4). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2011.5980567>.
- Yan, C., & Bengtsson, M. (2026). IDSOR: Intensity-and Distance-Aware Statistical Outlier Removal for Weather-Robust LiDAR Point Clouds. arXiv preprint arXiv:2602.05876. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2602.05876>.
- Le, M.-H., Cheng, C.-H., Liu, D.-G., & Nguyen, T.-T. (2022). An Adaptive Group of Density Outlier Removal Filter: Snow Particle Removal from LiDAR Data. *Electronics*, 11(19), 2993. <https://doi.org/10.3390/electronics11192993>.
- Byun, Y. -S. & Jeong, R. -G. (2024). High-Speed Outlier Removal Filter for LiDAR Sensor Point Cloud Data. In *IEEE Access*, 12, 192467-192481. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3517750>.

9. Wani, A. A. (2024). Comprehensive analysis of clustering algorithms: exploring limitations and innovative solutions. *PeerJ. Computer science*, 10, e2286. <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.2286>
10. Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., & Chiu, S. N. (2000). *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. with a foreword by D.G. Kendal. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
11. Hasan, M. K., Khapre, S., Dhasarathan, C., Islam, S., Ahmed, F. R. A., Ahmed, T. E., ... & Ghazal, T. M. (2025). 3D Voronoi Diagram Division-Based Hybrid Weighted Regression Localization Algorithm. *Tsinghua Science and Technology*, 30(6), 1-24. <https://doi.org/10.26599/TST.2024.9010126>.
12. Alia, A., Maree, M., Chraibi, M., & Seyfried, A. (2024). A novel Voronoi-based convolutional neural network framework for pushing person detection in crowd videos. *Complex & Intelligent Systems*, 10(4), 5005-5031. <https://doi.org/10.1007/s40747-024-01422-2>.
13. Chao, L., He, Y., Gu, J., Xie, D., Yang, Y., Shen, L., ... & Liang, H. (2023). Design of porous structure based on the Voronoi diagram and stress line for better stress shielding relief and permeability. *Journal of Materials Research and Technology*, 25, 1719-1734. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.05.282>.
14. Wang, J., & Wang, R. (2024). Multi-UAV area coverage track planning based on the Voronoi graph and attention mechanism. *Applied sciences*, 14(17), 7844. <https://doi.org/10.3390/app14177844>.
15. Lazar, E. A., Lu, J., & Rycroft, C. H. (2022). Voronoi cell analysis: The shapes of particle systems. *American Journal of Physics*, 90(6), 469-480. <https://doi.org/10.1119/5.0087591>.
16. Duan, X., Li, L., Ge, Y., & Liu, B. (2023). Exact Voronoi diagram for topographic spatial analysis. *GIScience & Remote Sensing*, 60(1), 2171703. <https://doi.org/10.1080/15481603.2023.2171703>.
17. Nirmala, K., & Saruladha, K. (2022). Denoising Fundus Images of Diabetic Retinopathy Using Natural Neighborhood Kriging. In: Abraham, A., Bajaj, A., Gandhi, N., Madureira, A.M., Kahraman, C. (eds) *Innovations in Bio-Inspired Computing and Applications. IBICA 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*, 649. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-27499-2\\_83](https://doi.org/10.1007/978-3-031-27499-2_83).
18. Pan, X., Hou, F., Liu, Z., Feng, S., & Lan, R. (2024). Eofd-net: Edge optimization and feature denoising for weakly supervised deep nuclei segmentation with point annotations. In *ICASSP 2024-2024 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)* (pp. 2180-2184). Seoul, Korea, Republic, IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICASSP48485.2024.10448142>.
19. Lei, M., Ma, C., Ding, M., Zhou, Y., Huang, Z., & Xu, J. (2025). TTVD: Towards a Geometric Framework for Test-Time Adaptation Based on Voronoi Diagram. In *The Thirteenth International Conference on Learning Representations*. <https://openreview.net/forum?id=5sU32OCxgZ>.

© О. А. Кузик, А. Д. Кузик, 2026.  
**Науково-методична стаття.**  
 Надійшла до редакції 03.03.2026.  
 Прийнята до друку 29.04.2026.  
 Опублікована 25.05.2026.