УДК 504.05:51.7:534.18

***В. Ф. Кондрат**, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співр., доцент*
(Національна Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного),
***Я. Й. Лопушанський**, канд.фіз.-мат. наук, доцент,*
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНОСУ ЗАБРУДНЕНЬ В ГРУНТАХ ЗА СТИМУЛЮЮЧОЇ ДІЇ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Розглянуто перенос домішкових речовин в пористих середовищах (грунтах) шляхом дифузії та фільтрації в умовах механічних коливань. Механізм дії коливань пов'язаний з вібраційною зміною стану зв'язаної води в околі стінок пор середовища. Для моделі гетеропористого тіла отримано співвідношення для ефективних коефіцієнтів дифузійного та фільтраційного перенесення і проведено їх кількісне дослідження залежно від параметрів коливань та характеристик середовища. Воно показало добре якісне узгодження з експериментальними даними.

Ключові слова: пористе середовище; забруднення; зв'язана вода; механічні коливання; фільтрація; дифузія.

V. F. Kondrat, Ya. Y. Lopushanskyy

MATHEMATICAL MODELING OF TRANSFER OF POLLUTANTS IN SOIL UNDER MECHANICAL VIBRATIONS

We study the transfer of impurities in porous media (soils) by means of diffusion and filtration under mechanical vibrations. These vibrations change the state of bound water in the vicinity of pore walls. For a model of hetero-porous bodies, we have obtained the expressions for effective coefficients of filtration and diffusional transfer. Their dependence on the characteristics of vibrations and porous medium has been conducted, and showed a good qualitative agreement with the experimental data.

***Key words**:* porous medium; pollution; bound water; mechanical vibrations; filtration; diffusion.

В.Ф. Кондрат, Я.И. Лопушанский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЕНИЙ В ГРУНТАХ ПРИ СТИМУЛИРУЮЩЕМ ДЕЙСТВИИ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрено перенос примесных веществ в пористых средах (грунтах) путем диффузии и фильтрации в условиях механических колебаний. Механизм действия колебаний связан с вибрационным изменением состояния связанной воды в окрестности стенок пор среды. Для модели гетеропористого тела получено соотношения для эффективных коэффициентов диффузионного и фильтрационного переноса и проведено их количественное исследование в зависимости от параметров колебаний и характеристик среды. Оно показало хорошее качественное согласование с экспериментальными данными.

Ключевые слова: пористая среда; загрязнения; связанная вода; механические колебания; фильтрация; диффузия.

Вступ. Актуальність проблеми. Мета роботи

Шкідливі речовини, попадаючи в грунти, поширюються в них шляхом дифузії чи переносячись фільтраційними потоками грунтових вод. Їх поширення приводить до збільшення площі забруднення. Всмоктуючись корінням сільськогосподарських рослин та дерев ці речовини в кінцевому результаті забруднюють сільськогосподарську продукцію, овочі, фрукти. Попадання у відкриті водойми може створювати значні проблеми для здоров'я не лише людей чи свійських тварин, а й диких тварин і птахів. Швидкість перенесення забруднень залежить від різних факторів, як от температури, перепаду тиску, наявності механічних коливань грунту. Якщо перші два фактори пов'язані, як правило, з кліматичними умовами та рельєфом поверхні, то механічні коливання можуть мати техногенне походження. Після Чорнобильської аварії неоднократно спостерігалося вібраційне прискорення переносу радіоактивних забруднень, спричинене, нааприклад, роботою погано віброізольованих двигунів чи рухом машин. Тому вивчення механізмів вібраційного прискорення руху забруднень в грунтах є важливою науковою проблемою. Зауважимо при цьому, що врахування інтенсифікуючого впливу механічних коливань на процеси переносу маси в пористих насичених середовищах є важливим також для практики нафтовидобутку, насичення матеріалів спеціальними розчинами, у медицині тощо [1, 2]. Вплив цього явища може спостерігатися і при військових діях, коли хвильові процеси, спричинені, наприклад, бомбуванням чи артилерійськими обстрілами, можуть пришвидшувати проникання шкідливих речовин в грунти, забруднення грунтових вод та розширення ареалу забруднення. Цілеспрямоване забруднення поверхні землі певними шкідливими речовинами в поєднанні з такою "вібраційною обробкою" може спричинити тривалі в часі впливи на здоров'я населення уже у післявоєнний період.

Механізми інтенсифікуючого впливу механічних коливань на явища масоперенесення можуть бути пов'язані з виникненням нелінійних сил, які стимулюють перенос внутріпорової рідини чи домішкових частинок, зі зміною величини енергії активації дифузії під впливом коливань [3], вібраційною зміною фізичних властивостей порової рідини [1, 4, 5]. У роботі розглянута ситуація, коли цей останній механізм є визначальним. Враховано, що внаслідок взаємодії рідини з твердофазовим скелетом в околі поверхні контакту з ним виникає шар структурованої рідини, яку називають також зв'язаною. За постійної температури вона утворює пристінкову плівку товщиною h. Зв'язана рідина характеризується зсувною жорсткістю, більшою густиною маси, меншими коефіцієнтами дифузії домішок тощо [6, 7, 8]. За певних умов, наприклад, за нагріву, під впливом механічних коливань, може відбуватися деструктурування зв'язаної рідини та набування властивостей вільної (гравітаційно рухомої), яку будемо вважати ньютонівською в'язкою рідиною. Для механічних коливань умовою такого переходу є те, що максимальні зсувні напруження у зв'язаній рідині стають більшими чи рівними деякому критичному значенню. Якщо максимальні зсувні напруження стають меншими за критичні, відбувається зворотній перехід вільної рідини у зв'язану. Однак, якщо руйнування структури пристінкового шару відбувається практично миттєво, то відновлення потребує значного часу. Зміна стану пристінкової рідини приводить до зміни фільтраційних та дифузійних властивостей пористого середовища, остільки при цьому змінюється ефективна пористість та проникність середовища, коефіцієнти дифузії домішок.

Дослідження впливу механічних коливань на процеси фільтрації порової рідини та дифузії домішкової речовини проводилося для моделі гетеропористого шару, на поверхнях якого підтримується різниця тисків або різниця концентрації домішкової речовини та генерується поздовжня пружна плоска хвиля, яка поширюється перпендикулярно до поверхонь шару. Під моделлю гетеропористого середовища розуміємо сукупність паралельних між собою каналів (плоских щілин або круглих пор) у твердій фазі. Поперечні розміри каналів є випадковими величинами. Канали перпендикулярні до поверхонь шару. Довжина пружної хвилі вибиралася значно більшою за середній поперечний розмір каналів. Хвиля генерувалася постійно, отже механічні коливання були стаціонарними.

Метою роботи є вивчення в рамках цієї моделі впливу механічних поздовжніх коливань на фільтраційні та дифузійні процеси в пористому насиченому тілі, що дасть змогу провести кількісні оцінки вібраційної інтенсифікації фільтраційного та дифузійного переносу забруднень у грунтах та виконати відповідний прогноз поширення таких забруднень за умови дії механічних коливань.

Фізична модель середовища.

Об'єктом розгляду є пружне тверде тіло, яке містить сукупність паралельно орієнтованих каналів – щілин або круглих пор, заповнених рідиною (рис. 1). Поперечні розміри таких каналів є випадковою величиною. Вода в приконтактній з твердою фазою області завдяки поверхневій взаємодії набуває нових властивостей і характеризується зсувною жорсткістю, більшою густиною маси тощо [6, 7, 8]. Таку воду називають зв'язаною і при постійній температурі вона утворює пристінкову плівку товщини h. В деяких моделях [6, 7] також виділяють шар міцнозв'язаної води, товщина якого $\Delta h << h$. Решту води, будемо називати її вільною (гравітаційно рухомою), будемо описувати моделлю ньютонівської рідини.

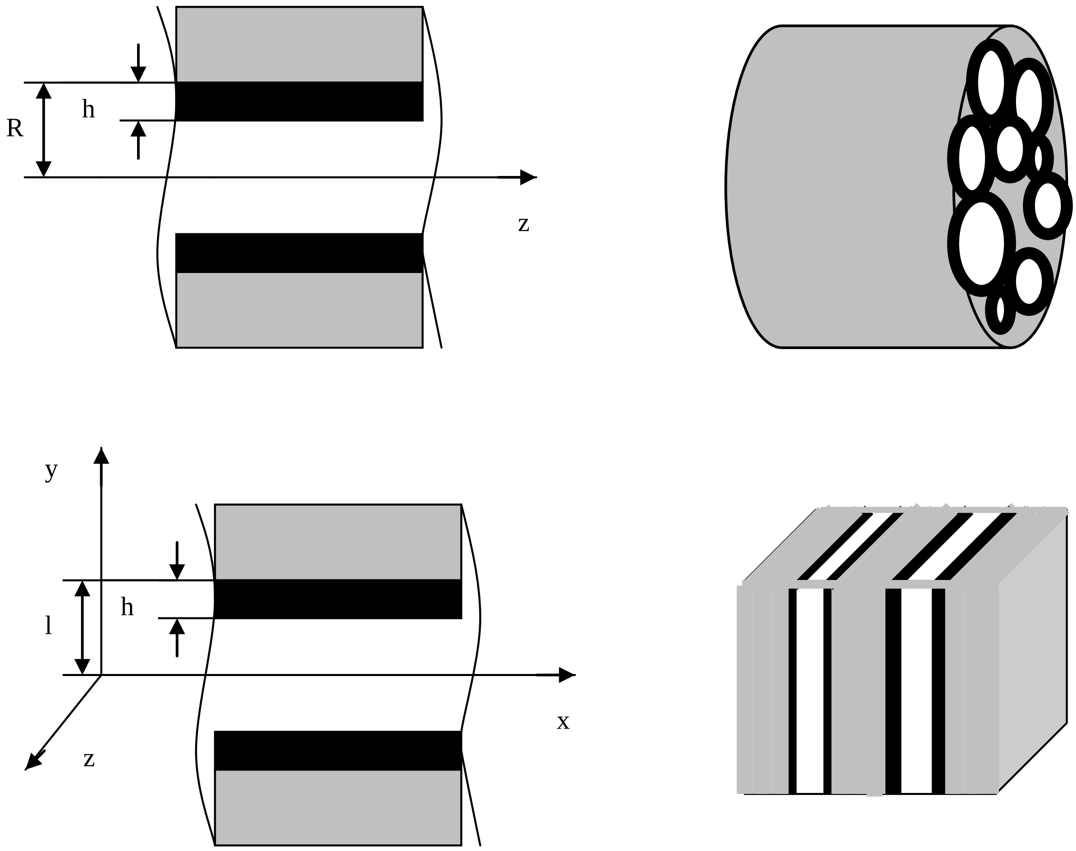

Рис. 1

Зв'язана вода є структурованою [7-10]. За певних умов, наприклад під дією механічних коливань, може відбуватися її деструктурування і вона набуватиме властивостей вільної рідини. Умовою такого переходу [1, 7, 9] є нерівність $\tau \geq \tau_*$, яка виконується, коли максимальні зсувні напруження τ стають більшими чи дорівнюють критичному значенню τ_*. Якщо напруження τ стають меншими за τ_*, то знову відбувається утворення зв'язаної води. Експерименти [1] показують, що характерний час такого утворення, звичайно, набагато більший за характерний час руйнування. Надалі руйнування структурованого стану будемо вважати миттєвим.

Руйнування пристінкового шару зв'язаної рідини приводить до збільшення ефективної пористості середовища та його коефіцієнта проникності, а значить до зростання фільтраційного потоку. З іншого боку, для певних типів домішкових частинок їх концентрація у шарі зв'язаної рідини може бути значно більшою, а рухливість – на декілька порядків меншою, ніж у вільній поровій рідині [11]. Перехід зв'язаної рідини у вільну приводить до збільшення числа рухливих частинок в поровій рідині, тобто до збільшення середнього коефіцієнта дифузії частинок у шарі та середнього потоку маси.

Таким чином надалі вплив механічних коливань на фільтраційний та дифузійний процеси масоперенесення будемо пов'язувати лише зі зміною стану зв'язаної рідини, нехтуючи також доданками, які забезпечують взаємозв'язок механічних та дифузійних процесів у кожній з фаз.

При дослідженні впливу механічних коливань на фільтраційний масоперенос приймемо, що в кожній внутрішній області тіла за заданих зовнішніх дій на його поверхні створено вздовж кожного з каналів сталий градієнт тиску, який викликає ламінарний фільтраційний потік рідини, а також викликано поширення поздовжньої пружної хвилі, довжина якої значно більша за можливий поперечний розмір каналів, який значно менший за товщину примежового шару [12, 13]. За таких умов нехтуємо рухом рідини перпендикулярно до поверхонь каналу [14], стінки яких гармонічно коливаються з певною швидкістю.

При дослідженні вібраційного впливу на дифузійний масоперенос абстрагуємося від можливої фільтрації рідини, взявши, що ґрадієнт тиску у порах відсутній, а зовнішньою дією створено у них тільки градієнт концентрації домішки та викликано поширення поздовжньої пружної хвилі.

Вихідні співвідношення

При описі руху рідини чи дифузії домішкової речовини в каналах щілину будемо відносити до декартової системи координат (*x,y,z*), вісь *OZ* якої збігається з напрямом руху рідини, а вісь *OY* перпендикулярна до її стінок (щілина займає область $y \in (-l, l)$, де l – її півширина), круглу пору – до циліндричної системи координат (r, φ, z), вісь *OZ* якої теж спрямована за напрямом фільтрації (пора займає область $r \in [0, R)$). Шар зв'язаної води товщини $h < l,\ h < R$ займає область $y \in (-l, -l+h) \bigcup (l-h, l)$ у щілині і $r \in (R-h, R)$ у порі. Зв'язана вода при $h \geq l,\ h \geq R$ займають всю область каналу.

Фільтраційний масоперенос. Зупинимось на випадку щілини. За умови ламінарності потоку води в щілині рівняння її руху можна записати у вигляді

$$\rho_j \frac{\partial v_z^j}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{zz}^j}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zy}^j}{\partial y} \ ; \tag{1}$$

$$\sigma_{zz}^f = -p + (\eta_1 + 2\eta_2)\frac{\partial v_z^f}{\partial z}, \quad \sigma_{zy}^f = 2\eta_2 \frac{\partial v_z^f}{\partial y}; \tag{2}$$

$$\sigma_{zz}^b = \left(K_b + \frac{4}{3}G_b\right)\frac{\partial u_z^b}{\partial z}, \quad \sigma_{zy}^b = 2G_b \frac{\partial u_z^b}{\partial y}, \tag{3}$$

де $\sigma_{zz}^j, \sigma_{zy}^j$ – компоненти тензорів напружень; p – тиск; v_z^j, u_z^j – компоненти векторів швидкостей та переміщень відповідно; ρ_j - густина; $j = f$ для вільної води, яка займає область $y \in (-l+h, 0) \bigcup (0, l-h)$, $j = b$ для зв'язаної води, яка займає область $y \in (-l, -l+h,) \bigcup (l-h, l)$; η_1, η_2 - коефіцієнти в'язкості вільної, K_b, G_b - модулі стиску і зсуву зв'язаної води. Співвідношення (3) записані без врахування ефектів повзучості зв'язаної води.

Крайові умови на поверхні щілини

$$v_z^b = v_z^s \qquad \text{при} \qquad y = \pm l, \tag{4}$$

а на поверхні розділу структурованої та вільної води

$$v_z^f = v_z^b, \quad \sigma_{zy}^f = \sigma_{zy}^b \qquad \text{при} \qquad y = \pm(l-h). \tag{5}$$

При цьому з умов симетрії маємо, що

$$\sigma_{zy}^f = 0 \qquad \text{при} \qquad y = 0, \tag{6}$$

де $v_z^s(t) = v_0^s \exp(i\omega t)$ - z – компонента вектора $\vec{v}^s = (0, 0, v_z^s)$ коливної швидкості стінок щілини, v_0^s – амплітуда, ω – циклічна частота.

Дифузійний масоперенос. Вважаємо порову рідину слабим розчином і для хімічного потенціалу $\mu^{(j)}$ домішки в області *j* приймаємо лінійне рівняння стану

$$\mu^{(j)} = \mu_0^{(j)} + d^{(j)} c^{(j)}, \tag{7}$$

де $\mu_0^{(j)}$ - початкове значення хімічного потенціалу, $d^{(j)}$ - коефіцієнт його концентраційної залежності, $c^{(j)} = C_d^{(j)} - C_d^{(j)0}$ - збурення концентрації $C_d^{(j)} = \rho_d^{(j)} / \rho^{(j)}$, $\rho_d^{(j)}$ - густина домішки, $\rho^{(j)}$ - густина розчину в області *j*, $C_d^{(j)0}$ - початкове значення концентрації, значення параметра $j = 1,2,3$ відповідають вільній та зв'язаній рідині і адсорбованому шару. Адсорбований шар треба враховувати, остільки в ньому можуть накопичуватися домішкові частинки, впливаючи таким чином на процес масопереносу.

Рівняння дифузії та вираз для потоку $\vec{J}^{(j)}$ маси для кожної з областей *j* запишемо так

$$\rho^{(j)} \frac{\partial c^{(j)}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}^{(j)}, \qquad \vec{J}^{(j)} = -\rho^{(j)} D^{(j)} \vec{\nabla} c^{(j)}, \tag{8}$$

де $D^{(j)}$ – коефіцієнт дифузії, $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \, \partial/\partial x + \vec{e}_y \, \partial/\partial y$ – оператор Гамільтона, $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ – орти осей *OX* та *OY*.

Умови спряження розв’язків на границях розділу фаз є:
при $y = \pm(l - h)$,

$$\mu^{(1)} = \mu^{(2)}, \qquad \rho^{(1)} D^{(1)} \frac{\partial c^{(1)}}{\partial y} = \rho^{(2)} D^{(2)} \frac{\partial c^{(2)}}{\partial y},$$

а при $y = \pm l$

$$\mu^{(2)} = \mu^{(3)}, \qquad \rho^{(2)} D^{(2)} \frac{\partial c^{(2)}}{\partial y} = \rho^{(3)} D^{(3)} \frac{\partial c^{(3)}}{\partial y}. \tag{9}$$

Надалі будемо нехтувати дифузією домішок в твердій фазі та їх переходом у каркас, покладаючи $\rho^{(3)} D^{(3)} \frac{\partial c^{(3)}}{\partial y} = 0$ при $y = \pm l$.

Вплив механічних коливань

Надалі для врахування впливу механічних коливань на стан води в каналах умову $\tau \ge \tau_*$ зручно записати через критичний розмір каналу. Розглянемо спочатку середовище зі щілинами. Розглянемо окремо щілини, в яких є лише зв’язана вода ($l \le h$), і щілини, в яких є зв’язана і вільна вода ($l > h$). Представимо зсувні напруження у зв’язаній воді сумою осередненої по періоду *T* коливань ($\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau$) та коливної ($\tilde{f} = f - \bar{f}$) складових

$$\sigma_{zy}^{j} = \bar{\sigma}_{zy}^{j} + \tilde{\sigma}_{zy}^{j}, \quad (j = f, b). \tag{10}$$

З умов рівноваги для води у щілині, які полягають у зрівноваженні сил тиску та сил, зумовлених зсувними напруженнямим на поверхнях $y = \pm l$, випливає, що для обох типів щілин

$$\bar{\sigma}_{zy}^{b}(l) = l \bar{p}_{,z}, \qquad \bar{p}_{,z} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}. \tag{11}$$

Коливний рух води в щілині відбувається під дією поздовжніх коливань її стінок. За взятої умови малості товщини щілин по відношенню до довжини поздовжньої хвилі та товщини примежового шару можна знехтувати несинфазністю коливань води та стінок щілини і записати, що

$$\tilde{\sigma}_{zy}^{b}(l)=l\rho^{b}\frac{\partial\tilde{v}_{z}^{s}}{\partial t}\quad \text{при}\quad l\le h;\quad \tilde{\sigma}_{zy}^{b}(l)=l\rho^{f}\frac{\partial\tilde{v}_{z}^{s}}{\partial t}+h\left(\rho^{b}-\rho^{f}\right)\frac{\partial\tilde{v}_{z}^{s}}{\partial t}\quad \text{при}\quad l>h. \tag{12}$$

Позначаючи $\tau=\sup\limits_{t}\sigma_{zy}^{b}(l)$, зі співвідношень (3.69), (8.57)-(8.59) отримуємо умову деструктуризації зв'язаної води, записану відносно поперечних розмірів щілин, яку подамо у вигляді

$$l\ge l_{*}^{(n)}\quad (n=1,2), \tag{13}$$

де

$$l_{*}^{(1)}=\frac{\tau_{*}}{P_{bs}}\quad (l\le h),\qquad l_{*}^{(2)}=\frac{T_{*}}{P_{fs}}\quad (l>h),\qquad P_{js}=\left|\bar{p}_{,z}\right|+W_{js}\kappa\nu\sqrt{I},\ \ W_{js}=\rho^{j}/\rho^{s}\quad (j=f,b),$$

$$W_{\Delta s}=\left(\rho^{b}-\rho^{f}\right)/\rho^{s},\quad T_{*}=\tau_{*}-hW_{\Delta s}\kappa\nu\sqrt{I},\ \kappa=2\pi\sqrt{2\rho^{s}/c},$$

c – швидкість хвилі у твердій фазі, $I=0{,}5\rho^{s}\omega^{2}(u_{a}^{s})^{2}c$ - інтенсивність хвилі, ν - частота.

Аналогічним чином для круглих пор, заповнених водою, отримуємо

$$R\ge R_{*}^{(n)}\quad (n=1,2), \tag{14}$$

де

$$R_{*}^{(1)}=\frac{\tau_{*}}{P_{bs}}\quad (R\le h),\qquad R_{*}^{(2)}=\frac{T_{*}+\sqrt{T_{*}^{2}+2h^{2}W_{\Delta s}\kappa\nu\sqrt{I}P_{fs}}}{P_{fs}}\quad (R>h).$$

При розгляді дифузійних процесів у приведених формулах ґрадієнт тиску треба покласти рівним нулеві.

Макроскопічні кінетичні фільтраційні та дифузійні характеристики

Фільтраційний масоперенос. При встановленні макроскопічних виразів для швидкості фільтрації, коефіцієнта проникності середовища, концентрації домішки, потоку маси, коефіцієнта дифузії будемо проводити послідовне усереднення рівнянь, які описують рух рідини у порах та дифузію домішки, по періоду коливань, по перерізу пори та по розподілу пор за поперечними розмірами. Наприклад, для швидкості v_{z}^{f} руху рідини вздовж щілини будемо мати такі три осереднені величини

$$\bar{v}_{z}^{f}=\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}v_{z}^{f}(\tau)d\tau,\qquad \bar{\bar{v}}_{z}^{f}=l^{-1}\int_{0}^{l}\bar{v}_{z}^{f}(y)dy,\qquad \left\langle v_{z}^{f}\right\rangle=\int_{0}^{\infty}\bar{\bar{v}}_{z}^{f}(l)f(l)dl, \tag{15}$$

де $f(l)$ – густина розподілу ймовірності поперечних розмірів щілин.

За використання операції часового усереднення (15) із рівнянь (1)-(6) для однієї щілини частково заповненою зв'язаною та вільною водою ($l>h$) отримуємо

$$\bar{v}_{z}^{f}=-\frac{1}{2\eta_{2}}\bar{p}_{,z}\left[y^{2}-(l-h)^{2}\right]\qquad \text{для}\qquad y\in(0,l-h). \tag{16}$$

Осереднюючи швидкість $\bar{v}_{z}^{f}$ по перерізу щілини $\left(\bar{\bar{v}}_{z}^{f}=l^{-1}\int_{0}^{l}\bar{v}_{z}^{f}(y)dy\right)$, отримаємо вираз для середньої швидкості води у щілині

$$\bar{\bar{v}}_{z}^{f}=\frac{(l-h)^{2}}{3\eta_{2}}\bar{p}_{,z}\qquad \text{для}\qquad y\in(0,l-h). \tag{17}$$

Якщо виконується умова (13) (n=*1*) декструктуризації зв'язаної води, швидкість $\bar{v}_{z}^{f}$ стає рівною

$$\bar{\bar{v}}_{z}^{f}=\frac{l^{2}}{3\eta_{2}}\bar{p}_{,z}\qquad \text{для}\qquad y\in(0,l). \tag{18}$$

Для щілин, заповнених зв'язаною водою ($l \le h$), за невиконання умови (13) (*n=2*) швидкість рідини дорівнює нулеві, а за виконання - визначається за формулою (18).

Середня швидкість $\bar{\bar{v}}_z^f$ залежить від ширини щілини *l*. Тому для знаходження середньої швидкості $\left\langle v_z^f \right\rangle$ фільтрації води в середовищі проведемо осереднення $\bar{\bar{v}}_z^f\left(l\right)$ за розмірами щілин за третьою формулою (15). В результаті, враховуючи сталість ґрадієнта тиску, отримуємо узагальнений закон фільтрації Дарсі

$$\left\langle v_z^f \right\rangle = -\frac{k}{\alpha \eta_2} \bar{p}_{,z}, \tag{19}$$

де α - абсолютна пористість, k – коефіцієнт проникності середовища, який визначається виразом

$$k = \frac{1}{3}\left\{\theta\left(h - l_*^{(1)}\right)\int_{l_*^{(1)}}^{h} f(l) l^2 dl + \theta(l_*^{(2)} - h)\left[\int_{h}^{l_*^{(2)}} f(l)(l-h)^2 dl + \int_{l_*^{(2)}}^{\infty} f(l) l^2 dl\right] + \right.$$
$$\left. + \theta\left(h - l_*^{(2)}\right)\int_{h}^{\infty} f\left(l\right) l^2 dl\right\}. \tag{20}$$

Оскільки параметри $l_*^{(1)}, l_*^{(2)}$, як видно з (13), залежать від характеристик середовища і параметрів вібрації, то таку ж залежність буде мати і коефіцієнт проникності. Характерним параметром впливу вібрації, як видно з (13), є параметр $g = \nu\sqrt{I}$.

У випадку круглих пор для коефіцієнта проникності води отримуємо

$$k = \frac{1}{8}\left\{\theta\left(h - R_*^{(1)}\right)\int_{R_*^{(1)}}^{h} f\left(R\right) R^2 dR + \theta(R_*^{(2)} - h)\left[\int_{h}^{R_*^{(2)}} f(R)(R-h)^2 dR + \int_{R_*^{(2)}}^{\infty} f(R) R^2 dR\right] + \right.$$
$$\left. + \theta\left(h - R_*^{(2)}\right)\int_{h}^{\infty} f\left(R\right) R^2 dR\right\}, \tag{21}$$

де параметри $R_*^{(1)}, R_*^{(2)}$ задаються формулою (14).

Дифузійний масоперенос. У цьому випадку вважаємо, що градієнт тиску в поровій рідині вздовж каналів відсутній, а на поверхнях гетеропористого шару товщини *H* підтримуються різні концентрації C^I *і* C^{II} домішкової речовини. Врахуємо також, що півтовщина водного шару *L* дорівнює $L = l + \Delta h$, де Δh - товщина адсорбованого шару, а *l* дорівнює сумі півтовщин зв'язаної та вільної води або ж тільки зв'язаної.

Проведемо осереднення рівняння (8) по перерізу щілини, ввівши осереднені функції

$$\bar{f}^{(j)} = \frac{1}{\xi_j}\int_{y_1^{(j)}}^{y_2^{(j)}} f^{(j)}(y) dy, \quad \bar{f} = \frac{1}{2H}\int_{-H}^{H} f(\xi) d\xi = \frac{1}{H}\sum_{j=1}^{3} \xi_j \bar{f}^{(j)},$$

де $\xi_1 = l - h$, $\xi_2 = h$, $\xi_3 = \Delta h$ - товщини відповідних шарів рідини,

$y_1^{(1)} = 0$, $y_2^{(1)} = y_1^{(2)} = l - h$, $y_2^{(2)} = y_1^{(3)} = l$, $y_2^{(3)} = L$ - їх координати для щілин з гравітаційно рухомим розчином ($l > h$),

$\xi_2 = l$, $\xi_3 = \Delta h$, $y_1^{(2)} = 0$, $y_2^{(2)} = y_1^{(3)} = l$, $y_2^{(3)} = L$ - аналогічні величини для другого типу щілин ($l \le h$).

Після осереднення отримуємо

$$\xi_j \rho^{(j)} \frac{\partial \bar{c}^{(j)}}{\partial t} = -\xi_j \frac{\partial \bar{J}_x^{(j)}}{\partial x} - \delta J_y^{(j)},$$

$$\xi_j \bar{J}_x^{(j)} = -\xi_j \rho^{(j)} D^{(j)} \frac{\partial \bar{c}^{(j)}}{\partial x}, \quad \xi_j \bar{J}_y^{(j)} = \rho^{(j)} D^{(j)} \delta c^{(j)}$$

і відповідно

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -\frac{\partial \left(\overline{J_x / \rho}\right)}{\partial x}, \qquad \bar{J}_x = -\overline{\rho D \frac{\partial c}{\partial x}}, \qquad \bar{J}_y = 0, \tag{22}$$

де $\delta J_y^{(j)} = J_y^{(j)}\left(y_2^{(j)}\right) - J_y^{(j)}\left(y_1^{(j)}\right)$ - зміна потоку на координатних поверхнях, $\delta c^{(j)} = c^{(j)}\left(y_2^{(j)}\right) - c^{(j)}\left(y_1^{(j)}\right)$ - зміна концентрацій на координатних поверхнях.

При записі останнього рівняння в (22) враховано, що y-компонента потоку маси дорівнює нулеві на поверхні $y = 0$.

За умови $H >> L$ характерний час масопереносу поперек щілин набагато менший за характерний час масопереносу вздовж щілин. Це дозволяє розглядати процес масопереносу поперек щілини стаціонарним за часом і взяти $\bar{c}^{(j)} = c^{(j)}$, $\bar{J}_x^{(j)} = J_x^{(j)}$, $\delta c^{(j)} = 0$. З умов спряження (9) тоді отримуємо такі співвідношення між концентраціями $c^{(j)}$ в областях j:
при $h < l$

$$c^{(2)} = \mu_0^{(12)} + d^{(12)} c^{(1)}, \; c^{(3)} = \mu_0^{(13)} + d^{(13)} c^{(1)}$$

і при $h \ge l$

$$c^{(3)} = \mu_0^{(23)} + d^{(23)} c^{(2)}, \tag{23}$$

де $\mu_0^{(12)} = \left(\mu_0^{(1)} - \mu_0^{(2)}\right) \Big/ d^{(2)}$, $\mu_0^{(13)} = \left(\mu_0^{(1)} - \mu_0^{(3)}\right) \Big/ d^{(3)}$, $\mu_0^{(12)} = \left(\mu_0^{(2)} - \mu_0^{(3)}\right) \Big/ d^{(3)}$, $d^{(13)} = d^{(1)} \big/ d^{(3)}$, $d^{(12)} = d^{(1)} \big/ d^{(2)}$, $d^{(23)} = d^{(2)} \big/ d^{(3)}$.

Осереднену концентрацію $\bar{c}$ з урахуванням (23) подамо виразами

$$\bar{c} = \theta(l-h)\bar{c}_1 + \theta(h-l)\bar{c}_2,$$

$$\bar{c}_1 = \frac{1}{l + \Delta h} \left\{ \left[l - h\left(1 - d^{(12)}\right) + \Delta h d^{(13)} \right] c^{(1)} + h\mu_0^{(12)} + \Delta h \mu_0^{(13)} \right\},$$

$$\bar{c}_2 = \frac{1}{l + \Delta h} \left[\left(l + \Delta h d^{(23)}\right) c^{(2)} + \Delta h \mu_0^{(23)} \right], \tag{24}$$

де $\theta(z)$ – функція Гевісайда.

Використавши співвідношення (23), (24), рівняння (22) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{D} \frac{\partial c}{\partial x} \right), \qquad \overline{\bar{J}}_x = \rho^{ef}\, \overline{D} \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{25}$$

де

$$c = \theta(l-h)c^{(1)} + \theta(h-l)c^{(2)}, \; \overline{D} = \theta(l-h)\overline{D}_1 + \theta(h-l)\overline{D}_2, \; \rho^{ef} = \theta(l-h)\rho_1^{ef} + \theta(h-l)\rho_2^{ef},$$

$$\overline{D}_1 = \frac{(l-h)D^{(1)} + hD^{(2)} d^{(12)} + \Delta h D^{(3)} d^{(13)}}{l - h\left(1 - d^{(12)}\right) + \Delta h d^{(13)}}, \quad \overline{D}_2 = \frac{l\, D^{(2)} + \Delta h D^{(3)} d^{(23)}}{l + \Delta h d^{(23)}},$$

$$\rho_k^{ef} = \overline{(\rho D)}_k / \overline{D}_k, \;\; (k = 1{,}2), \;\; \overline{(\rho D)}_1 = \frac{(l-h)\rho^{(1)} D^{(1)} + h\rho^{(2)} D^{(2)} d^{(12)} + \Delta h \rho^{(3)} D^{(3)} d^{(13)}}{l + \Delta h},$$

$$\overline{(\rho D)}_2 = \frac{l\, \rho^{(2)} D^{(2)} + \Delta h \rho^{(3)} D^{(3)} d^{(23)}}{l + \Delta h}. \tag{26}$$

До рівняння дифузії (25) необхідно додати краєві умови, які у розглядуваному випадку можна записати

$$c = C^I \quad \text{при } x = 0, \quad c = C^{II} \quad \text{при } x = H, \quad c = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{27}$$

Розв’язок задачі (25)-(27) буде залежати від параметра l ширини щілини, який є випадковою величиною. Середні концентрацію $C \equiv \langle c \rangle$ і коефіцієнт дифузії $D \equiv \langle \bar{D} \rangle$ в поровій рідині та потік $J = \alpha \langle \bar{J}_x \rangle$ домішки через шар (α – загальна пористість шару) визначимо виразами

$$C = \int_0^\infty c(l) f(l) dl, \qquad D = \int_0^\infty \bar{D}(l) f(l) dl, \qquad J = \alpha \int_0^\infty \bar{J}_x(l) f(l) dl. \tag{28}$$

Якщо $l < l_*^{(j)}$, то стан рідини в щілинах залишається таким самим, як і за відсутності коливань. За умови $l \ge l_*^{(j)}$ виникає новий тип щілин, в яких є лише вільна рідина та адсорбований шар. Концентрацію домішки в них позначимо $c^{(11)}$ та $c^{(31)}$ відповідно. В загальному випадку при дії вібрації формули (24), (26) набувають вигляду

$$\bar{c} = \theta(h - l)\left[\theta\left(l - l_*^{(1)}\right)\bar{c}_3 + \theta\left(l_*^{(1)} - l\right)\bar{c}_2\right] + \theta(l - h)\left[\theta\left(l - l_*^{(2)}\right)\bar{c}_3 + \theta\left(l_*^{(2)} - l\right)\bar{c}_1\right],$$

$$\bar{c}_3 = \frac{1}{l + \Delta h}\left\{\left[l + \Delta h d^{(23)}\right]c^{(1)} + \Delta h \mu_0^{(13)}\right\}; \tag{29}$$

$$c = \theta(h - l)\left[\theta\left(l - l_*^{(1)}\right)c^{(11)} + \theta\left(l_*^{(1)} - l\right)c^{(2)}\right] + \theta(l - h)\left[\theta\left(l - l_*^{(2)}\right)c^{(11)} + \theta\left(l_*^{(2)} - l\right)c^{(1)}\right],$$

$$\bar{D} = \theta(h - l)\left[\theta\left(l - l_*^{(1)}\right)\bar{D}_3 + \theta\left(l_*^{(1)} - l\right)\bar{D}_2\right] + \theta(l - h)\left[\theta\left(l - l_*^{(2)}\right)\bar{D}_3 + \theta\left(l_*^{(2)} - l\right)\bar{D}_1\right],$$

$$\bar{D}_3 = \frac{l D^{(1)} + \Delta h D^{(3)} d^{(13)}}{l + \Delta h d^{(13)}};$$

$$\rho^{ef} = \theta(h - l)\left[\theta\left(l - l_*^{(1)}\right)\rho_3^{ef} + \theta\left(l_*^{(1)} - l\right)\rho_2^{ef}\right] + \theta(l - h)\left[\theta\left(l - l_*^{(2)}\right)\rho_3^{ef} + \theta\left(l_*^{(2)} - l\right)\rho_1^{ef}\right],$$

$$\rho_3^{ef} = \overline{(\rho D)}_3 / \bar{D}_3, \qquad \overline{(\rho D)}_3 = \frac{l \rho^{(1)} D^{(1)} + \Delta h \rho^{(3)} D^{(3)} d^{(13)}}{l + \Delta h}. \tag{30}$$

Результати кількісних досліджень

Проведемо кількісний аналіз отриманих результатів. Густину розподілу ймовірності виберемо у вигляді

$$f(\xi) = B \exp\left[-\left(\xi - \bar{\xi}\right)^2 / \left(2\zeta^2\right)\right]\theta(\xi), \tag{31}$$

де $\theta(\xi)$ - функція Гевісайда, $\bar{\xi}$ - середнє значення, ζ^2 - дисперсія, $B = \left\{\sqrt{2}\zeta F\left(\bar{\xi} / \sqrt{2}\zeta\right)\right\}^{-1}$, $F(z) = \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-u^2\right) du$. Густину скелету та швидкість поздовжньої хвилі у ньому візьмемо відповідно $\rho^s = 2{,}5 \cdot 10^3 \, кг/м^3$ і $c = 5 \cdot 10^3 \, м/с$.

Фільтраційний масоперенос. Досліджуватимемо залежність відносного коефіцієнта проникності k/k_0 від параметра $g = \nu\sqrt{I}$, де k_0 — коефіцієнт проникності при $g = 0$, для різних значень відносної товщини h пристінкового шару зв’язаної води, дисперсії ζ^2 розподілу поперечних розмірів каналів, градієнта тиску. Результати обчислень для середовища зі щілинами наведені на рис. 2, 3.

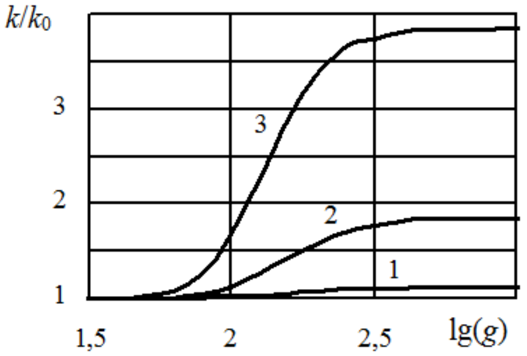

***Рисунок 2** – Залежність відносного коефіцієнта проникності від параметра g при* $\left|\bar{p}_{,z}\right| = 100$ Па/м, $\tau_* = 10^{-3}$ Па, $\zeta = \bar{\xi}$, $\bar{\xi} = 10^{-6}$ м, $h = 0{,}1\,\bar{\xi};\ 0{,}5\,\bar{\xi};\ \bar{\xi}$ (криві 1-3)

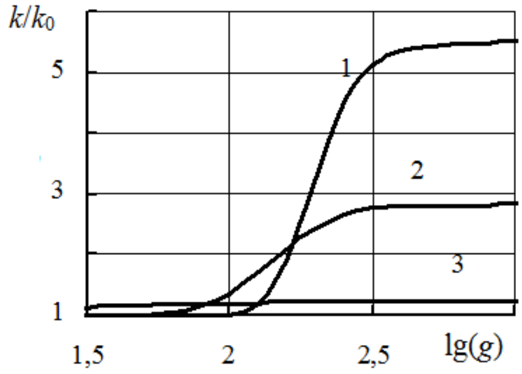

***Рисунок 3** – Залежність відносного коефіцієнта проникності від параметра g при* $\left|\bar{p}_{,z}\right| = 250$ Па/м, $\tau_* = 10^{-3}$ Па, $\bar{\xi} = 10^{-6}$ м, $h = 0{,}8\bar{\xi}$, $\zeta = 0{,}5\bar{\xi};\ \bar{\xi};\ 5\bar{\xi}$ (криві 1-3)

Бачимо, що віброфільтраційний ефект чутливий до відносної товщини верстви зв'язаної води (рис. 2) та дисперсії розмірів пор (рис. 3). Він збільшується з ростом відносної товщини шару зв'язаної води (тобто, зі зменшенням середнього розміру каналів за незмінного h) (рис. 2) та зі зменшенням дисперсії розподілу каналів за розмірами (рис. 3). Кількісні дослідження показують також, що вібраційний ефект зменшується з ростом градієнта тиску. Відносне збільшення коефіцієнта проникності середовища може досягати десятків разів, що підтверджується експериментальними даними [2]. Коефіцієнт проникності пористого середовища (для прийнятих умов за відсутності резонансних ефектів) зростає як зі збільшенням частоти коливань, так і їх інтенсивності. Ця залежність суттєво проявляється в певній області зміни параметра g, ширина якої збільшується з ростом дисперсії розмірів каналів, а розташування визначається, в основному, градієнтом тиску, критичним напруженням для зв'язаної рідини та середніми розмірами пор. Поза цією областю вплив вібрації на зміну коефіцієнта проникності є незначним. Для середовища з круглими порами відзначені закономірності є аналогічними за більш суттєвої залежності коефіцієнта проникності від параметра $g = \nu\sqrt{I}$.

Таким чином проведене модельне дослідження як і експеримент показує, вагомий вплив механічних коливань на швидкість фільтрації рідини в пористих матеріалах (напр. грунтах), а значить і суттєве збільшення швидкості поширення грунтових забруднень. Місця активних коливань (скажемо, в околі транспортних ліній) можуть служити своєрідним "вікном" проникнення забруднень в грунтові води.

Дифузійний масоперенос. Дослідження впливу коливань на розподіл домішок та потік маси через шар проведемо для стаціонарної ситуації. Розглянемо дію вібрації у випадку, коли товщина шару l мала порівняно з довжиною хвилі $\lambda - l << \lambda$ ("тонкий" шар) , і коли ці величини порівняні, так що можуть виникнути умови резонансних коливань. Для першого випадку можна знехтувати залежністю амплітуди коливань від координати x, для другого ця залежність суттєва.

Тонкий шар. У цьому випадку, як видно з рівнянь (25), (27), градієнт концентрації є постійною величиною, так що збурення концентрації є лінійною функцією x, тобто $c = C^I - \left(x/l\right)\Delta c$, $\Delta c = C^I - C^{II}$. Тоді середній потік J_i домішки через шар, згідно (25), (26), (28), (30), визначається за формулою

$$J = \alpha\left(\Delta c / H\right)\int_0^\infty \rho^{ef}\,\overline{D} f(l)dl\,. \tag{32}$$

Проводився кількісний аналіз середнього потоку домішок. При цьому приймалося, що

$$D^{(2)}/D^{(1)} = 10^{-2},\ \ D^{(3)}/D^{(1)} = 10^{-3},\ \ D^{(3)}/D^{(2)} = 10^{-1},\ \ d^{(12)} = 10,\ \ d^{(13)} = 10^2,\ \ d^{(23)} = 10,$$
$$\rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 1{,}56,\quad \rho^{(3)}/\rho^{(1)} = 2,\quad \rho^{(3)}/\rho^{(2)} = 1{,}28,\quad \Delta h = 0{,}01\bar{l}\,. \tag{33}$$

Результати розрахунків подані на рис. 4, 5, на яких представлена залежність відносного потоку *J/J0*, де *J0* – потік за відсутності коливань, від параметра коливань $g = \nu\sqrt{I^s} = \omega^2 u_a^s / \left(2\pi\sqrt{2/\rho^s \nu}\right)$, при $\zeta = \bar{l}$, $h = 0{,}1\bar{l}; 0{,}5\bar{l}; \bar{l}$ – відповідно суцільні, пунктирні та штрихові лінії (рис. 4); $h = 0{,}5\bar{l}$; $\zeta = 0{,}5\bar{l}; \bar{l}; 2\bar{l}$ – відповідно суцільні, пунктирні та штрихові лінії (рис. 5).

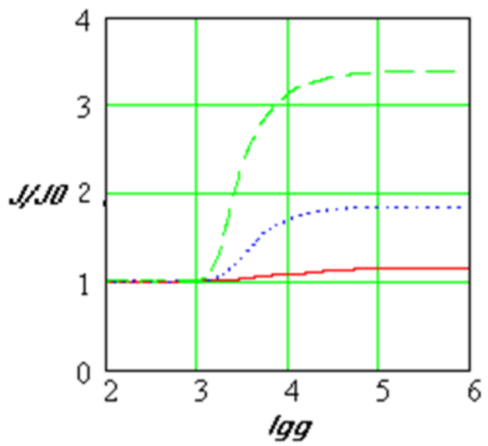

Рисунок 4 *–Залежність відносного потоку домішок від параметра* ***g*** *для різних відносних товщин плівки зв'язаної рідини*

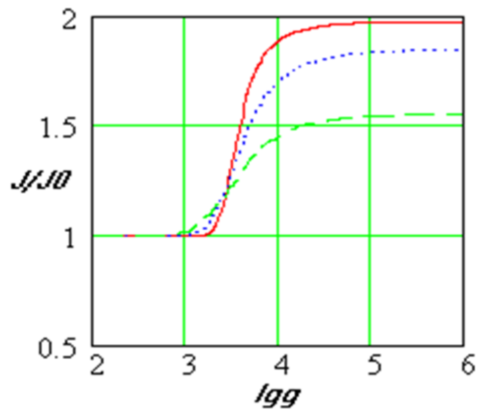

Рисунок 5 *– Залежність відносного потоку домішок від параметра* ***g*** *для різних величин дисперсії поперечних розмірів щілин*

Бачимо, що при розрахункових параметрах вібрація може спричинювати зростання потоку маси більш ніж у три рази; збільшення потоку більше для меншої дисперсії розмірів щілин та більшої відносної товщини плівки зв'язаної рідини; ефект є, фактично, пороговим і проявляється практично лише на певному інтервалі зміни параметра *g*, який ширшає з ростом середнього квадратичного відхилення ζ (дисперсії ζ^2 розподілу щілин за товщиною).

Резонансні коливання. Якщо дифузія проходить у шаруватому середовищі, то механічні коливання можуть спричинювати резонансні коливання окремих шарів. Розглянемо особливості дифузії доміщкових речовин через шар за умови його резонансних коливань. У цьому випадку амплітуду коливань задамо виразом

$$u_a^s(x) = u_{a0}^s \frac{\cos[k(l-x)]}{\cos(kl)},$$

$k = \dfrac{\omega}{v} + i\gamma$, де γ – коефіцієнт загасання хвилі. Таке представлення відповідає заданню гармонічно змінного за часом переміщення поверхні $x = 0$ перпендикулярно собі з амплітудою u_{a0}^s і ненавантаженості поверхні $x = l$ шару за нехтуванням дисперсії швидкості хвилі. Оскільки тепер критичні розміри щілин залежать від координати *x*, $a_*^{(j)} = a_*^{(j)}(x)$, $(j = 1,2)$, то осереднений коефіцієнт дифузії теж буде залежати від *x*: $\bar{D} = \bar{D}(x)$. З рівняння (25) знаходимо такі вирази для збурення концентрації *c* та потоку $\bar{J}_x$

$$c(x) = C^I - \Delta c \int_0^x \bar{D}^{-1}(x)\,dx \Big/ \int_0^l \bar{D}^{-1}(x)\,dx, \qquad \bar{J}_x == \Delta c \Big/ \int_0^l \bar{D}^{-1}(x)\,dx. \tag{34}$$

Середні концентрація *C*, коефіцієнт дифузії *D* та потік *J* домішок у шарі визначаються за формулами (28). Результати їх кількісного дослідження показали, що величина коефіцієнта дифузії за резонансу стає неоднорідною функцією товщинної координати шару, кількість максимумів та мінімумів якої зростає з порядком резонансу; характер залежності потоку маси від параметрів коливань та структурних характеристик тіла зберігається; розподіл усередненої концентрації по товщині шару стає нелінійним. При числових даних (33), $v = 5 \cdot 10^3 \, м/с$, $\gamma = 10^{-3} м^{-1}$, $C^{II} = 0$, $\zeta = \bar{l}$ такий розподіл ілюструють графіки, наведені на рис. 6, де показано розподіл осередненої концентрації *C*, віднесеної до концентрації *C0* за відсутності коливань, при $h = \bar{l}$, $g = 1$ (суцільна лінія), $g = 0{,}1$ (штрихова лінія), $g = 0{,}01$ (штрих-пунктирна лінія), $g = 10^{-3}, 10, 10^2, 10^3$ (пунктирна лінія) для першого резонансу. Бачимо, що лінійний розподіл концентрації реалізується або при малих значеннях параметра *g*,, коли впливом коливань на дифузію нехтуємо або при настільки великих, що коефіцієнт дифузії максимально зріс практично по всій товщині шару. При проміжних значеннях параметра *g* розподіл концентрації нелінійний, що пов'язано з суттєвою змінністю коефіцієнта дифузії по товщині шару.

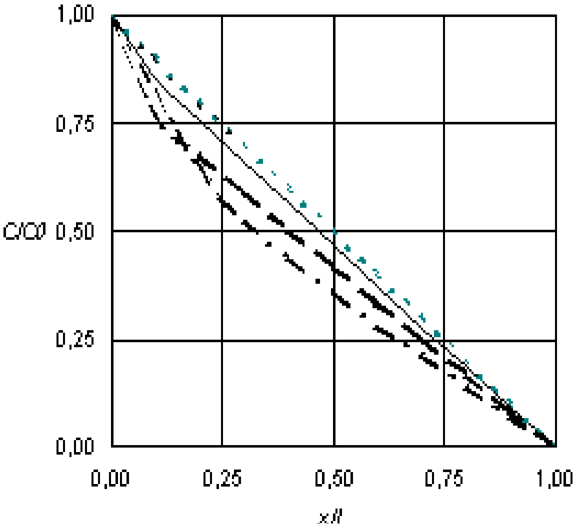

Рисунок 6** – Розподіл відносної осередненої концентрації по товщині шару для різних значень параметра **g

Висновки

Дослідження впливу механічних коливань на фільтраційний та дифузійний масоперенос, проведене для моделі гетеропористого шару, показало, що ефект вібраційної інтенсифікації масопереносу є пороговим, проявляється в певній області зміни інтенсивності та частоти коливань, суттєво залежить від середнього розміру пор, дисперсії їх розмірів, величини осередненої складової градієнта тиску. Кількісно може спостерігатися кількакратне вібраційне зростання коефіцієнта дифузії та кількадесятикратне зростання коефіцієнта фільтрації. Отримані теоретичні результати якісно узгоджуються зі спостережуваними експериментально. Сформульовані макроскопічні рівняння фільтраційного та дифузійного масоперенесення можуть бути використані для прогнозних оцінок поширення забруднень у грунтах в умовах вібраційної дії природного чи техногенного походження. Записані в роботі рівняння також можуть бути корисними при розробці режимів ефективного впливу коливань на процеси масоперенесення в пористих матеріалах.

Список літератури

1. **Кузнецов О.Л.** Преобразование и взаимодействие геофизических полей в литосфере / О.Л.Кузнецов, Э.М.Симкин – Москва: Недра. – 1990. – 269 с.
2. **Physical Principles of Medical Ultrasonics** / Ed. C.R.Hill. – Ellis Harwood Limited Publishers, Chichester, 1986. – 398 p.
3. **Кондрат В.Ф.** Вплив механічних коливань на перенос домішок в твердому розчині / В.Ф.Кондрат, Є.Я.Чапля, М.І.Васюник // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2007, т.50, №2. – С. 147-159.
4. **Дерягин Б.В.** Основные свойства жидкостей / Б.В.Дерягин, Н.В.Чураев – Москва: Наука. – 1971. – 175 с.
5. **Kubik J.** Modeling of diffusive transport of chemicals in porous media accounting for solid matrix vibrations / J.Kubik, Y.Chapla, V.Kondrat // Studia Geotechnica et Mechanika. – 1999, v. XXI, No 3-4. – P. 21-29.

6. **Дерягин Б.В**. Поверхностные силы / Б.В.Дерягин, Н.В.Чураев, В.М.Муллер – Москва: Наука, 1985. – 398 с.

7. **Грунтоведение** / Под ред акад. Е.С. Сергеева / Москва: Изд-во Московского ун-та, 1983. – 389 с.

8. **Королев В.А.** Связанная вода в горных породах: новые факты и проблемы / В.А. Королев // Соросовский образовательный журнал, 1996, № 9. – С. 79-85.

9. **Стебновский С.В.** О сдвиговой прочности структурированной воды / С.В. Стебновский // Журнал технической физики, 2004, т. 74, вып. 1. – С. 21-23.

10. **Овчинников П.Ф.** Виброреология / П.Ф. Овчинников – Киев: Наук. думка, 1983. – 272 с.

11. **Прохоров В.М.** Миграция радиоактивных загрязнений в почвах / В.М. Прохоров – Москва: Энергоатомиздат, 1981. – 106 с.

12. **Бреховских Л.М.** Введение в механику сплошных сред / Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров – Москва: Наука, 1982. – 335с.

13. **Ландау Л.Д.** Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – Москва: Наука, 1986. – 736 с.

14. **Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range / M.A. Biot / J.Acoust. Soc. Of Amer. – 1956. – **28**, No 2. – P. 179-191.

References

1. **Kuznetsov O.L.** Preobrazovanije i vzaimodiejstvije geophizicheskikh polej v litosfere / O.L. Kuznetsov, E.M. Simkin – Moskva: Nedra. – 1990. –269 s. (in Rus)

2. **Physical Principles of Medical Ultrasonics** / Ed. C.R.Hill. – Ellis Harwood Limited Publishers, Chichester, 1986. – 398 p. (in Eng)

3. **Kondrat V.F.** Vplyv mechanichnykh kolyvan na perenos domishok v tverdomu rozchyni / V.F.Kondrat, Ye.Ya.Chalpa, M.I.Vasunyk // Matematychni metody i fizyko-mekhanichni pola. – 2007, t.50, № 2. – S. 147-159. (in Ukr)

4. **Deriagin B.V.** Osnovnyje svojstva zhidkostiej / B.V.Deriagin, N.V. Churaiev – Moskva: Nauka. – 1971. – 175 s. (in Rus)

5. **Kubik J.** Modeling of diffusive transport of chemicals in porous media accounting for solid matrix vibrations / J.Kubik, Y.Chapla, V.Kondrat // Studia Geotechnica et Mechanika. – 1999, v. XXI, No 3-4. - P. 21-29. (in Eng)

6. **Deriagin B.V.** Poverkhnostnyje sily / / B.V.Deriagin, N.V. Churaiev, V.M. Muller – Moskva: Nauka, 1985. – 398 s. (in Rus)

7. **Gruntovedenije** / Pod red. akad. E.S.Sergeeva / Moskva: Izd-vo Moskovskogo un-ta, 1983. – 389 s. (in Rus)

8. **Korolev V.A.** Svjazannaja voda v gornykh porodakh: novye fakty i problemy / V.A.Korolev // Sorosovskij obrazovatelnyj zhurnal, 1996, № 9. – S. 79-85. (in Rus)

9. **Stebnovskij S.V.** O sdvigovoj prochnosti strukturirovannoj vody / S.V. Stebnovskij // Zhurnal tekhnicheskoj fiziki, 2004, t. 74, vyp. 1. – S. 21-23. (in Rus)

10. **Ovchinnikov P.F**. Vibroreologija / P.F. Ovchinnikov – Kyiv: Nauk. dumka, 1983. – 272 s. (in Rus)

11. **Prokhorov V.M.** Migratsija radioaktivnykh zagriaznienij v pochvakh / V.M. Prokhorov – Moskva: Energoatomizdat, 1981. – 106 s. (in Rus)

12. **Brekhovskikh L.M.** Vvedenije v mekhaniku sploshnykh sred / L.M. Brekhoskikh, V.V. Honcharov – Moskva: Nauka, 1982. – 335 s. (in Rus)

13. **Landau L.D.** Teoreticheskaja fizika: Uchebnoje posobije. V 10 t. T. VI. Gidrodinamika / L.D. Landau, E.M. Lifshits – Moskva: Nauka, 1986. – 736 s. (in Rus)

14.**Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range / M.A. Biot / J.Acoust. Soc. Of Amer. – 1956. – **28**, No 2. – P. 179-191. (in Eng)

❖❖❖