

*Р.М. Тацій, д-р фіз.-мат. наук, професор, О.Ю. Пазен, канд. техн. наук
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів)*

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В КОЛОНІ ПРЯМОКУТНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ЗА УМОВ СТАНДАРТНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМУ ПОЖЕЖІ

Розглядається актуальна проблема визначення розподілу двовимірного температурного поля по товщині колони прямокутного поперечного перерізу. На основі проведеного аналізу літературних джерел, розглянуто основні методи розв'язку таких задач. Запропоновано альтернативний підхід до визначення розподілу двовимірного температурного поля за умови, що температура навколишнього середовища по периметру колони змінюється однаково. В якості прикладу розглянуто задачу про нагрівання колони прямокутного перерізу розміром 0,4 на 0,3 м за умов стандартного температурного режиму пожежі.

Ключові слова: прямокутна колона, двовимірне температурне поле, прямий метод.

R.M. Tatsiy, O.Yu. Pazen

MODELING OF TEMPERATURE FIELD DISTRIBUTION IN A CRYSTAL OF TRANSMITTED TRANSFER PERIOD UNDER THE CONDITIONS OF STANDARD TEMPERATURE REFRIGERATION FIRE

The article deals with the actual problem of determining the distribution of a two-dimensional temperature field along the thickness of a column of rectangular cross-section. On the basis of the analysis of literary sources, the main methods of solving such problems are considered. An alternative approach to finding the distribution of the two-dimensional temperature field is proposed in conditions when the ambient temperature changes along the perimeter of the column equally. As an example, the problem of heating a column of a rectangular section of 0.4 by 0.3 m under the conditions of the standard temperature regime of the fire is considered.

Key words: rectangular column, two-dimensional temperature field, direct method.

Вступ. Двовимірні задачі для прямокутника, на сторонах якого підтримується заданий і змінний в часі розподіл температури були, ймовірно, уперше поставлені в роботах І. Снеддона [1] і Г. Грінберга [2]. В монографії А.В. Ликова [3], розв'язана задача про розподіл температурного поля в прямокутнику за граничних умов першого роду на одній із сторін прямокутника та з нульовими крайовими умовами на інших трьох сторонах. При розв'язанні цієї задачі був застосований метод скінченного синус-перетворення Фур'є. Слід зауважити, що з розв'язку цієї задачі, як частинні випадки, випливають розв'язки, що наведені в роботах [1, 2].

В роботі [4] розв'язана загальна перша крайова задача про визначення температурного поля в прямокутнику, де крайові умови задані на всіх його чотирьох сторонах. При цьому був застосований метод редукції з наступним застосуванням методу Фур'є. Під час спроби поширити цей підхід для випадку крайових умов третього роду виникли труднощі технічного характеру, пов'язані з необхідністю сумування потрійних рядів Фур'є. [5]

Проте, у випадку, коли температура навколишнього середовища по периметру колони однакова, більш ефективним є альтернативний підхід, схема застосування якого зrealізована нижче.

Постановка задачі. У прямокутнику $\Pi: \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ розглядається задача про розв'язування рівняння

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

з крайовими умовами третього роду

$$\begin{cases} \alpha t(x_0, y, \tau) - \lambda \frac{\partial t(x_0, y, \tau)}{\partial x} = \alpha \psi(\tau), \\ \alpha t(x_a, y, \tau) - \lambda \frac{\partial t(x_a, y, \tau)}{\partial x} = \alpha \psi(\tau), \\ \alpha t(x, y_0, \tau) - \lambda \frac{\partial t(x, y_0, \tau)}{\partial x} = \alpha \psi(\tau), \\ \alpha t(x, y_b, \tau) - \lambda \frac{\partial t(x, y_b, \tau)}{\partial x} = \alpha \psi(\tau), \end{cases} \quad (2)$$

при початковій умові

$$t(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (3)$$

де $\psi(\tau)$ – закон зміни температури середовища по периметру поперечного перерізу прямокутника (стандартний температурний режим пожежі), α – коефіцієнт теплообміну між середовищем та периметром поверхні прямокутника, c – масова питома теплоємність, ρ – густина, λ – коефіцієнт теплопровідності, $\varphi(x, y)$ – початковий розподіл температурного поля по товщині прямокутної колони.

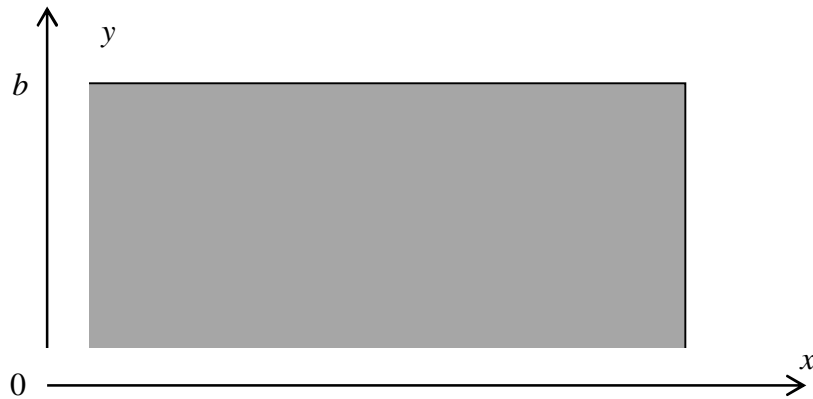


Рисунок 1 – Поперечний переріз прямокутника

Виклад основного матеріалу. У роботах [3, 6] встановлено, що розрахунок нестационарного температурного поля прямокутного поперечного перерізу з достатньою точністю може бути знайдений за допомогою відомого в теорії теплопровідності співвідношення безрозмірних відносних температур [6]:

$$\frac{\psi(\tau) - t(x, y, \tau)}{\psi(\tau) - t(x, y, 0)} = \frac{\psi(\tau) - t(x, \tau)}{\psi(\tau) - t(x, y, 0)} \cdot \frac{\psi(\tau) - t(y, \tau)}{\psi(\tau) - t(x, y, 0)}, \quad (4)$$

де $t(x, y, \tau)$ – температура двовимірного температурного поля;

$t(x, \tau)$ і $t(y, \tau)$ – температура одновимірних температурних полів;

$t(x, y, 0)$ – початкова температура.

Із співвідношення (4) знаходимо формулу для визначення двовимірного температурного поля прямокутного поперечного перерізу

$$t(x, y, \tau) = t_{cm} - \frac{(t_{cm} - t(x, \tau)) \cdot (t_{cm} - t(y, \tau))}{t_{cm} - t(x, y, 0)}. \quad (5)$$

Співвідношення (5) відображає результат накладання одновимірних температурних полів $t(x, \tau)$ і $t(y, \tau)$ одне на одне. Тому для знаходження двовимірного температурного поля необхідно і достатньо знайти розподіл одновимірного температурного поля по напрямку осі x та по напрямку осі y .

Для знаходження розподілу одновимірного температурного поля по товщині прямокутника, використовуємо алгоритм, який детально вивчений та описаний у роботах [7, 8].

Алгоритм методики такий:

Задача про розподіл нестационарного температурного поля по товщині плоскої конструкції зводиться до розв'язування на відрізку $[x_0 = 0, x_a = a]$ диференціального рівняння:

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right), \quad (6)$$

з крайовими умовами третього роду

$$\begin{cases} \alpha t(x_0, y, \tau) - \lambda \frac{\partial t(x_0, y, \tau)}{\partial x} = \alpha \psi(\tau), \\ \alpha t(x_a, y, \tau) - \lambda \frac{\partial t(x_a, y, \tau)}{\partial x} = \alpha \psi(\tau), \end{cases} \quad (7)$$

та початковою умовою

$$t(x, 0) = \varphi(x). \quad (8)$$

Розв'язок рівняння (6)-(8) шукаємо у вигляді суми двох функцій (метод редукції)

$$t(x, \tau) = u(x, \tau) + v(x, \tau). \quad (9)$$

Будь-яку з функцій $u(x, \tau)$ або $v(x, \tau)$ можна вибрати довільним чином, тоді інша визначатиметься однозначно.

Виберемо функцію $u(x, \tau)$ як розв'язок (квазі)стаціонарної задачі

$$(\lambda u')' = 0, \quad (10)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha u(x_0, \tau) - u^{[1]}(x_0, \tau) = \alpha \psi(\tau), \\ \alpha u(x_a, \tau) + u^{[1]}(x_a, \tau) = \alpha \psi(\tau). \end{cases} \quad (11)$$

У роботі [8] встановлено, що розв'язок (квазі)стаціонарної крайової задачі (10)-(11) має вигляд

$$u(x, \tau) = (1, 0) \cdot \mathbf{U}(x, \tau) = \mathbf{B}_0(x, x_0) \cdot \mathbf{P}_0(\tau), \quad (12)$$

де позначено

$$\mathbf{P}_0(\tau) = (P + Q \cdot B(x_a, x_0))^{-1} \cdot \Gamma(\tau), \quad P = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(\tau) = (\alpha \cdot \psi(\tau), \alpha \cdot \psi(\tau))^T,$$

$$B_0(x, x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_0}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(x_a, x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_a-x_0}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Провівши відповідні математичні перетворення, одержимо розв'язок крайової задачі (10)-(11), який має вигляд

$$u(x, \tau) = (1, 0) \cdot \mathbf{U}(x, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_0}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2 \frac{x_a-x_0}{\lambda} + 2\alpha} \begin{pmatrix} \left(\alpha \frac{x_a-x_0}{\lambda} + 1 \right) \alpha \psi(\tau) + \alpha \frac{x_a-x_0}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Використовуючи позначення (9) перепишемо рівняння (6) у такому вигляді

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (14)$$

Враховуючи, що $u(x, \tau)$ є розв'язком задачі (10)-(11), рівняння (14) набуде вигляду

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + c\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (15)$$

Тут слід зауважити, що функцію $c\rho \frac{\partial u}{\partial \tau}$ вважатимемо відомою, оскільки відома функція $u(x, \tau)$.

Оскільки функція $u(x, \tau)$ справджує крайові умови (7), то із зображення (9) впливають умови для функції $v(x, \tau)$

$$\begin{cases} \alpha v(x_0, \tau) - v^{[1]}(x_0, \tau) = 0, \\ \alpha v(x_a, \tau) + v^{[1]}(x_a, \tau) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

а початкова умова набуває вигляду

$$v(x, 0) = f(x) \equiv \varphi(x) - u(x, 0). \quad (17)$$

Структура розв'язку мішаної задачі (15)-(17) детально вивчена та описана у працях [7, 8]. Цей розв'язок можна побудувати таким чином:

1. Характеристичне рівняння задачі на власні значення має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \det(P + Q \cdot B(x_a, x_0, \omega)) = \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{c\rho\omega}{\lambda}}(x_a - x_0) & \frac{\sin \sqrt{\frac{c\rho\omega}{\lambda}}(x_a - x_0)}{\lambda \sqrt{\frac{c\rho\omega}{\lambda}}} \\ -\lambda \sqrt{\frac{c\rho\omega}{\lambda}} \sin \sqrt{\frac{c\rho\omega}{\lambda}}(x_a - x_0) & \cos \sqrt{\frac{c\rho\omega}{\lambda}}(x_a - x_0) \end{pmatrix} \right) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

З рівності (18) знаходимо власні значення ω_k .

2. Власні функції $X_k(x, \omega_k)$, які відповідають відповідним власним значенням ω_k , мають таку структуру

$$X_k(x, \omega_k) = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta_k(x_a - x_0) & \frac{\sin \beta_k(x_a - x_0)}{\lambda \beta_k} \\ -\lambda \beta_k \sin \beta_k(x_a - x_0) & \cos \beta_k(x_a - x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (19)$$

де позначено $\beta_k = \sqrt{\frac{c\rho\omega_k}{\lambda}}$.

3. Квадрат норми $\|X_k\|^2$ власних функцій $X_k(x, \omega_k)$ має вигляд

$$\|X_k\|^2 = c\rho \cdot \int_{x_0}^{x_a} X_k^2(x, \omega_k) dx. \quad (20)$$

4. Коефіцієнти Фур'є розвинення початкової умови $f(x)$

$$f_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} c\rho \int_{x_0}^{x_a} f(x) X_k(x, \omega_k) dx. \quad (21)$$

5. Коефіцієнти Фур'є розвинення функції $\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}$

$$u_k(s) = \frac{1}{\|X_k\|^2} c \rho \int_{x_0}^{x_a} \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} X_k(x, \omega_k) dx. \quad (22)$$

Використовуючи формули (19)-(22), розв'язок мішаної задачі (15)-(17) будемо у вигляді ряду

$$v(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] \cdot X_k(x, \omega_k). \quad (23)$$

Використовуючи зображення (9), та з урахуванням формул (13) і (23), остаточно отримуємо розв'язок задачі (6)-(8) у вигляді

$$t(x, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_0}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2 \frac{x_a-x_0}{\lambda} + 2\alpha} \begin{pmatrix} \left(\alpha \frac{x_a-x_0}{\lambda} + 1 \right) \alpha \psi(\tau) + \alpha \frac{x_a-x_0}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k e^{-\omega_k \tau} - \int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)} u_k(s) ds \right] X_k(x, \omega_k). \quad (24)$$

Аналогічні розрахунки проводяться для визначення розподілу одномірного температурного поля по напрямку осі u з заміною координат з x на u , а товщина конструкції змінюється з a на b .

Приклад. В якості прикладу розглянемо колону прямокутного перерізу з відповідними розмірами a та b . У деякий момент часу температура середовища навколо колони починає змінюватись за законом стандартного температурного режиму $\psi(\tau) = 345 \lg \left(1 + \frac{8\tau}{60} \right) + 20$ [9].

В початковий момент часу температура колони є сталою і становить 20°C . Теплофізичні характеристики колони наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Теплофізичні характеристики

Параметр	Колона
Товщина [м]	a=0,04; b=0,03
Коефіцієнт теплопровідності $[\lambda] = \frac{Вт}{м \cdot К}$	2,5
Масова питома теплосмність $[c_p] = \frac{Дж}{кг \cdot К}$	870
Густина $[\rho] = \frac{кг}{м^3}$	2400
Коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях $[\alpha] = \frac{Вт}{м^2 \cdot К}$	20

Використавши вище описаний розв'язок та програмне забезпечення Maple 13, отримуємо розв'язок цієї задачі у вигляді графіка (рис. 2) та таблиці 2.

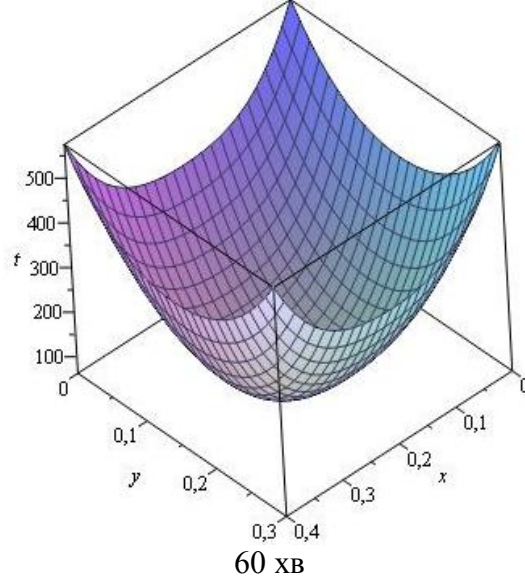
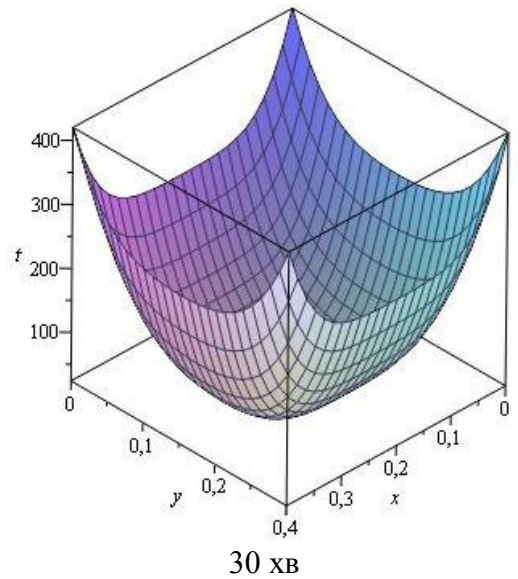
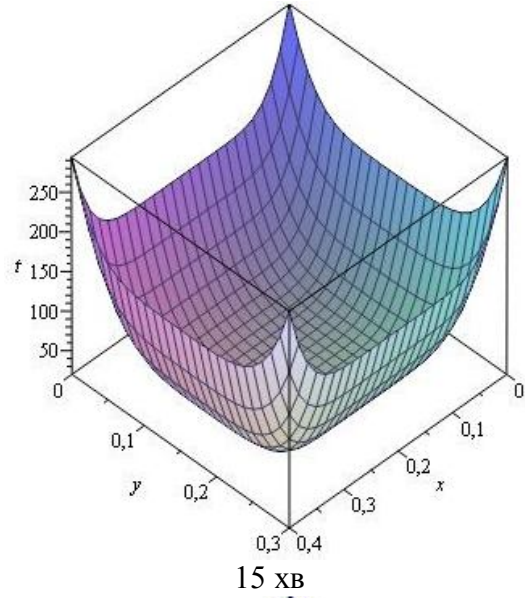
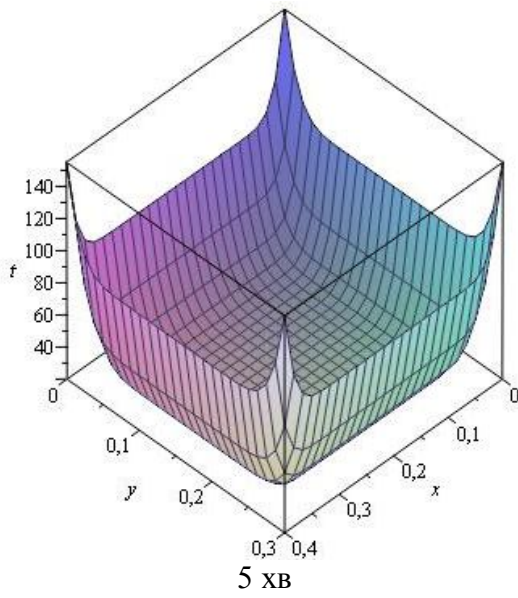


Рисунок 2 – Прогрів колони за умов пожежі

Таблиця 2

Розподіл температурного поля по товщині колони на 60 хв.

$x \backslash y$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
0	575	458	396	371	365	371	396	458	575
0,05	458	305	224	191	183	191	224	305	458
0,1	399	227	136	99	90	99	136	227	399
0,15	382	204	111	72	63	72	111	204	382
0,2	399	227	136	99	90	99	136	227	399
0,25	458	305	224	191	183	191	224	305	458
0,3	575	458	396	371	365	371	396	458	575

Висновок. Аналіз графічної залежності (рис. 2) та таблиці 2 показує чітку зміну температури по товщині колони зі зміною часу, що дає можливість оцінити її вогнестійкість за умов пожежі.

Список літератури:

1. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М.: ИЛ., 1995.
2. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г.А. Гринберг. – М.: Изд. АН СССР, 1948.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М: Высшая школа, 1967. – 559 с.
4. Тацій Р.М. Прямий метод розв'язування першої загальної крайової задачі для рівняння теплопроводності в прямокутнику / Р.М. Тацій, О.М. Трусевич // Вісник ЛДУ БЖД : Зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2016. – № 13. – С. 149-154.
5. Тацій Р. М. Розв'язання третьої крайової задачі для рівняння Лапласа в прямокутнику / Р. М. Тацій, О.М. Трусевич М. Ф. Стасюк // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання: матер. Міжнар. наук.-практ. конф. (15-20 травня). – Івано-Франківськ, 2017. – С. 441-444.
6. Огнестойкость зданий / Бушев В. П., Пчелинцев В. А., Федоренко В. С., Яковлев А. И. / Под общ. ред. В.А. Пчелинцева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1970. – 262 с.
7. O. Y. Pazen and R. M. Tatsii, "General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients," Journal of Engineering Physics and Thermophysics, vol. 89, no. 2, pp. 357-368, March 2016.
8. Тацій Р. М. Прямий метод розрахунку нестационарного температурного поля за умов пожежі / Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Пожежна безпека : Зб. наук. пр. – Львів : ЛДУ БЖД, 2015. – № 26. – С. 135-141.
9. EN 1991-1-2 (2002) (English): Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-2: General actions – Actions on structures exposed to fire [Authority: The European Union Per Regulation 305/2011, Directive 98/34/EC, Directive 2004/18/EC].

References:

1. Sneddon I. Preobrazovaniya Fur'ye [Fourier Transformation] / I. Sneddon. – М.: ИЛ., 1995.
2. Grinberg G.A. Izbrannyye voprosy matematicheskoy teorii elektricheskikh i magnitnykh yavleniy [Selected Questions of the Mathematical Theory of Electrical and Magnetic Phenomena] / G.A. Grinberg. – М.: Izd. AN SSSR, 1948.
3. Lykov A. V. Teoriya teploprovodnosti [Theory of heat conductivity] / A. V. Lykov. – М: Vysshaya shkola, 1967. – 559 s.
4. Tatsiy R.M. Pryamyi metod rozvzuvannya pershoi zahalnoyi krayovoyi zadachi dlya rivnyannya teploprovodnosti v pryamokutnyku [Direct method of the first general boundary value problem solution for heat equation in a rectangle] / R.M. Tatsiy, O.M. Trusevych // Visnyk LDU BZHD : Zb. nauk. pr. – Lviv : LDU BZHD, 2016. – № 13. – S. 149-154.
5. Tatsiy R. M. Rozvyazannya tretroyi krayovoyi zadachi dlya rivnyannya Laplasa v pryamokutnyku [The Solution of Third Boundary Problem for Laplace's Equation Inside a Rectangle] / R. M. Tatsiy, O.M. Trusevych M. F. Stasyuk // Informatsiyni tekhnolohiyi ta kompyuterne modelyuvannya: mater. Mizhnar. nauk.-prakt. konf. (15-20 travnya). – Ivano-Frankivsk, 2017. – S. 441-444.
6. Ohnestoykost zdanyy [Fire resistance of buildings] / Bushev V. P., Pchelyntsev V. A., Fedorenko V. C., Yakovlev A. Y. / Pod obshch. red. V.A. Pchelyntseva. – 2-e yzd., pererab. y dop. – М.: Stroyzdat, 1970. – 262 s.
7. O. Y. Pazen and R. M. Tatsii, "General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients," Journal of Engineering Physics and Thermophysics, vol. 89, no. 2, pp. 357-368, March 2016.
8. Tatsiy R. M. Pryamyi metod rozrakhunku nestatsionarnoho temperaturnoho polya za umov pozhezhi [Direct method of calculation unsteady temperature field in a fire] / R. M. Tatsiy, O. YU. Pazen // Pozhezha bezpeka : Zb. nauk. pr. – Lviv : LDU BZHD, 2015. – № 26. – S. 135-141.
9. EN 1991-1-2 (2002) (English): Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-2: General actions – Actions on structures exposed to fire [Authority: The European Union Per Regulation 305/2011, Directive 98/34/EC, Directive 2004/18/EC].