УДК 517.912

Р.М. Тацій, *д-р фіз.-мат. наук, професор,* ***О.Ю. Пазен***
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ В БАГАТОШАРОВІЙ НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛИТІ ПРИ ПОЧАТКОВИХ УМОВАХ НА ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ СУМІЖНИХ ШАРІВ

У замкненій формі розв'язано задачу про визначення розподілу одновимірного стаціонарного температурного поля в багатошаровій нескінченній плиті з кусково-змінним коефіцієнтом теплопровідності за наявності дискретно-неперервних внутрішніх джерел тепла та умов в довільній точці основного проміжку. Розв'язок задачі конструктивний і виражається виключно через її вихідні дані. При розв'язуванні задачі використовуються основні положення теорії теплопередачі, теорії узагальнених систем лінійних диференціальних рівнянь та елементи теорії узагальнених функцій.

Ключові слова: температура, тепловий потік, квазідиференціальне рівняння, матриця Коші, функція Дірака, задача Коші.

1. Постановка задачі та її математична модель.

Задача про розподіл стаціонарного температурного поля в багатошаровій плиті, область якої обмежена площинами $x = x_0 = 0$ і $x = x_n = l$ та поділена на n шарів різної товщини, зводиться до розв'язування на відрізку $[0,l]$ (квазі)диференціального рівняння

$$(\lambda t')' = -f \tag{1}$$

при певних крайових умовах [1]. Тут $t(x)$ – температура, $\lambda(x)$ – коефіцієнт теплопровідності, $f(x)$ – функція розподілу внутрішніх джерел тепла, а точки $x_0, x_1, ...x_{n-1}, x_n$ – сліди перетину відповідних площин з віссю ox. Припускається, що кожен шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності та внутрішнім розподіленим джерелом тепла. На границях шарів закладається наявність зосереджених джерел температури.

Слідуючи [3, 4], надалі використовуватимемо такі позначення: θ_k – характеристична функція напіввідкритого проміжку $[x_i, x_{i+1})$, тобто $\theta_i = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}$; $\lambda_i > 0$ − коефіцієнт теплопровідності на проміжку $[x_i, x_{i+1})$; $\delta_i(x - x_i)$ − функція Дірака з носієм в точці $x = x_i$; r_i, s_i − дійсні числа; $BV^+[0;l]$ – клас неперервних праворуч функцій обмеженої на $[0;l]$ варіації [5].

Приймемо $\lambda(x) \overset{df}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i$, $f(x) \overset{df}{=} -\sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i \delta(x - x_i)$.

Тоді рівняння (1) набуде вигляду:

$$(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i \cdot t')' = -\sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i \delta(x - x_i) \tag{2}$$

Позначимо $y^{[1]} \overset{df}{=} \lambda y'$ − квазіпохідна (тепловий потік).

В класичних задачах теплопровідності (див. наприклад [1-4]) до рівняння (2) додається система двох лінійно незалежних крайових умов в точках $x = x_0$ і $x = x_n$. У цій роботі спочатку вважатимемо, що в довільній точці x_k, $k = 0,1,...,n$ задається значення температури та теплового потоку:

$$\begin{cases} t_k\left(x_k\right) = t^k \\ t_k^{[1]}\left(x_k\right) = t^{[1]k} \end{cases} \tag{3}$$

Задача (2), (3) Коші є математичною моделлю розподілу температурного поля в багатошаровій плиті при найбільш загальних припущеннях відносно характеру внутрішніх джерел тепла при заданій температурі та тепловому потоці на границях розподілу довільних двох суміжних шарів, включаючи одну із зовнішніх поверхонь.

2. Узагальнена система диференціальних рівнянь 1-го порядку

Розглянемо на [0, ℓ] систему диференціальних рівнянь

$$\bar{Y}' = \left(\sum_{i=0}^{n-1} A_i\theta_i\right)\cdot\bar{Y} + \sum_{i=0}^{n-1}\bar{R}_i\theta_i + \sum_{i=1}^{n-1}\bar{S}_i\cdot\delta\left(x - x_i\right) \tag{4}$$

з початковою умовою

$$\bar{Y}\left(x_k\right) = \bar{Y}^k, \tag{5}$$

де $\bar{Y}, \bar{R}_i, \bar{S}_i$ – 2–вимірні вектори, A_i – квадратні $\left(2\times 2\right)$ матриці, $\bar{Y}$ − невідомий вектор, $\bar{S}_i$ – числові вектори, $A_i\left(x\right)$ і $\bar{R}_i\left(x\right)$ − неперервні на проміжку $\left[x_i, x_{i+1}\right)$ матриці–функції та вектор-функції відповідно.

На кожному з проміжків $\left[x_i, x_{i+1}\right)$ система (4) має вигляд

$$\bar{Y}'_{(i)} = A_i\cdot\bar{Y}_{(i)} + \bar{R}_i + \bar{S}_i\cdot\delta\left(x - x_i\right) \tag{6}$$

Надалі вважатимемо, що для відповідної однорідної системи

$$\bar{Y}'_{(i)} = A_i\bar{Y}_{(i)}, \qquad (i = 0,1,2,\dots,n-1) \tag{7}$$

відома матриця Коші $B_i\left(x,s\right)$, що має властивості:

за змінною x вона справджує матричне рівняння $B_i'\left(x,s\right) = A_iB_i\left(x,s\right)$;

$B_i\left(s,s\right) = E$, де E –одинична матриця;

для будь-яких $x_1, x_2, x_3 \in \left[x_i, x_{i+1}\right]$ $B_i\left(x_3,x_2\right)\cdot B_i\left(x_2,x_1\right) = B_i\left(x_3,x_1\right)$;

$B_i^{-1}\left(x_i,x_{i+1}\right) = B_i\left(x_{i+1},x_i\right)$.

Для будь-яких $k > i \geq 0$ додатково позначимо

$$B\left(x_k,x_i\right) \overset{df}{=} B_{k-1}\left(x_k,x_{k-1}\right)\cdot B_{k-2}\left(x_{k-1},x_{k-2}\right)\cdots B_i\left(x_{i+1},x_i\right), \tag{8}$$

при цьому приймемо $B\left(x_k,x_k\right) = E$

Розв’язок рівняння (4) на проміжку $\left[x_j, x_{j+1}\right)$ $x_j \in\left(x_k,x_m\right)$ шукаємо у вигляді

$$\bar{Y}_j(x) = B_j\left(x,x_j\right)\cdot\bar{P}_j + \int_{x_j}^{x} B_j\left(x,s\right)\cdot\bar{R}_j\left(s\right)ds, \tag{9}$$

де $\bar{P}_j$ – невідомий вектор.

Аналогічно, на $\left[x_{j-1},x_j\right)$ маємо

$$\bar{Y}_{j-1} = B_{j-1}\left(x,x_{j-1}\right)\cdot\bar{P}_{j-1} + \int_{x_{j-1}}^{x} B_{j-1}\left(x,s\right)\bar{R}_{j-1}\left(s\right)ds \tag{10}$$

В точці $x = x_j$ повинна виконуватися умова спряження [3, 4] $\bar{Y}_j\left(x_j\right) = \bar{Y}_{j-1}\left(x_j\right) + \bar{S}_j$, що згідно з формулами (9) і (10) приводить до рекурентного співвідношення

$$\overline{P}_j = B_{j-1}(x_j, x_{j-1}) \cdot \overline{P}_{j-1} + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_j, s)\overline{R}_{j-1}(s)ds + \overline{S}_j \tag{11}$$

Якщо припустити, що $\overline{P}_k = \overline{Y}^k$, то методом математичної індукції з (11) отримуємо

$$\overline{P}_j = B\left(x_j, x_k\right)\overline{Y}^k + \sum_{i=k}^{j} B(x_j, x_i)\overline{Z}_i\ , \tag{12}$$

де позначено

$$\overline{Z}_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i, s)\overline{R}_{i-1}(s)ds + \overline{S}_i,\ j = k, k+1, ..., m-1, \tag{13}$$

Таким чином, ми отримали результат, що аналогічний [3, 4]:

Теорема. На кожному з проміжків $\left[x_j, x_{j+1}\right)$ задача Коші (4), (7) має єдиний розв'язок. $\overline{Y}_j\left(x\ \right) \in BV^+\left[0;l\right]$, що зображується у вигляді

$$\begin{gathered}\overline{Y}_j\left(x\right) = B_j\left(x, x_j\right)B\left(x_j, x_k\right)\overline{Y}^k + B_j\left(x, x_j\right)\sum_{i=k}^{j} B\left(x_j, x_i\right)\overline{Z}_i + \\ + \int\limits_{x_j}^{x} B_j\left(x, s\right)\overline{R}_j\left(s\right)ds, \quad j = k, k+1, ..., m-1\end{gathered} \tag{14}$$

Припустимо тепер, що в формулі (14) вектор $\overline{Y}^k$ невідомий, натомість відомий вектор $\overline{Y}_j \overset{df}{=} \overline{Y}^j$. Тоді підставляючи в (14) $x = x_j$, отримуємо:

$$\begin{gathered}\overline{Y}_j\left(x_j\right) = B_j\left(x_j, x_j\right)B\left(x_j, x_k\right)\overline{Y}^k + B_j\left(x_j, x_j\right)\sum_{i=k}^{j} B\left(x_j, x_i\right)\overline{Z}_i + \\ + \int\limits_{x_j}^{x} B_j\left(x_j, s\right)\overline{R}_j\left(s\right)ds, \quad j = k, k+1, ..., n-1\end{gathered}$$

Звідси

$$\overline{Y}^j = B\left(x_j, x_k\right)\overline{Y}^k + \sum_{i=k}^{j} B\left(x_j, x_i\right)\overline{Z}_i \tag{15}$$

Домножуючи тепер обидві частини (15) зліва на $B^{-1}\left(x_j, x_k\right)$, остаточно отримуємо, що

$$\overline{Y}^k = B^{-1}\left(x_j, x_k\right)\left[\overline{Y}^j - \sum_{i=k}^{j} B\left(x_j, x_i\right)\overline{Z}_i\right] \tag{16}$$

Зауваження 1. Для знаходження розв'язку можна користуватись рекурентними співвідношеннями, що випливає з (11):

$$\overline{Y}_j(x_j) = B_{j-1}(x_j, x_{j-1})\overline{Y}_{j-1}(x_{j-1}) + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_j, s)\overline{R}_{j-1}(s)ds + \overline{S}_j \tag{17}$$

$$\overline{Y}_{j-1}(x_{j-1}) = B_{j-1}(x_{j-1}, x_j)\left[\overline{Y}_j(x_j) - \overline{S}_j\right] + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} B_{j-1}(x_j, s)\overline{R}_{j-1}(s)ds \tag{18}$$

при продовженні розв'язків праворуч і ліворуч відповідно.

Зауваження 2. Слід відзначити той частинний випадок, коли вдається «виміряти» вектор $\overline{Y}_{n-1}(x_n) \overset{df}{=} \overline{Y}^n$. Тоді на кожному з проміжків $[x_k, x_{k+1}),\quad k = \overline{0, n-1}$ вектор $\overline{Y}^k$ визначається шляхом застосування рекурентної формули (18) для продовження ліворуч, або використання явної формули (16), де слід прийняти $j = n$.

3. Схема розв'язування вихідної задачі шляхом її зведення до відповідної системи

Розглянемо квазідиференціальне рівняння (2) на проміжку $\left[x_k; x_m\right]$

Введемо вектори

$$\overline{Y} = \left(t, t^{[1]}\right)^{\mathrm{T}}, \overline{R}_j\left(0, -r_j\right)^{\mathrm{T}}, \ \overline{S}_j\left(0, -s_j\right)^{\mathrm{T}} \text{ та матриці } A_j = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді квазідиференціальне рівняння (2) зводиться до еквівалентної йому системи диференціальних рівнянь першого порядку типу (4):

$$\overline{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{j=k}^{m-1} \dfrac{1}{\lambda_j}\theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{Y} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{j=k}^{m-1} r_j \theta_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{j=k}^{m-1} s_j \delta\left(x - x_j\right) \end{pmatrix} \tag{19}$$

Легко переконатися безпосередньою перевіркою, що матриця Коші $B_j\left(x, s\right)$ системи (що є аналогом системи (7))

$$\overline{Y}'_{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{Y}_{(j)}, \quad j = k, k+1 \ldots, m-1$$

має вигляд

$$B_j\left(x, s\right) = \begin{pmatrix} 1 & b_j\left(x, s\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

де позначено

$$b_j\left(x, s\right) = \int\limits_s^x \frac{d\tau}{\lambda_j\left(\tau\right)}. \tag{21}$$

Це дає можливість за допомогою формули (14) побудувати розв'язок $\overline{Y}_j\left(x\ \right)$. Слід зауважити, що матриці типу (20) перемножуються спеціальним чином. Так, якщо $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \left(a_1 + a_2\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отже за формулою (8) дістанемо

$$B\left(x_j, x_i\right) = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{l=i}^{j-1} b_l\left(x_{l+1}, x_l\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Тоді

$$B_j\left(x, x_j\right) B\left(x_j, x_i\right) = \begin{pmatrix} 1 & \left(b_j\left(x, x_j\right) + \sum\limits_{l=i}^{j-1} b_l\left(x_{l+1}, x_l\right)\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Обчислимо $\int\limits_{x_j}^{x} B_j\left(x, s\right) \overline{R}_j\left(s\right) ds$.

$$\int_{x_j}^{x} B_j(x,s)\bar{R}_j(s)ds = \int_{x_j}^{x}\begin{pmatrix}1 & b_j(x,s)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ r_j(s)\end{pmatrix}ds = \\ = \int_{x_j}^{x}\begin{pmatrix}b_j(x,s)\cdot r_j(s)\\ r_j(s)\end{pmatrix}ds = \begin{pmatrix}I_j(x)\\ I_j^{[1]}(x)\end{pmatrix}, \tag{24}$$

де позначено $I_j(x) = \int_{x_j}^{x} b_j(x,s)\cdot r_j(s)ds$, $I_j^{[1]}(x) = \int_{x_j}^{x} r_j(s)ds$.

В цих позначеннях, згідно з (13), маємо

$$\bar{Z}_i = \begin{pmatrix}\int_{x_{i-1}}^{x_i} b_{i-1}(x,s)\cdot r_{i-1}(s)ds\\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} r_{i-1}(s)ds + s_i\end{pmatrix}. \tag{25}$$

З урахуванням формул (22), (23), (24) і (25) розв'язок задачі (1), (2) (температура та тепловий потік) на довільному проміжку $\left[x_j, x_{j+1}\right)$ $\left(j = \overline{0, n-1}\right)$ є першою та другою координатами двовимірного вектора

$$\bar{Y}_j(x) = B_j(x,x_j)\cdot B(x_j,x_k)\cdot\bar{Y}^k + B_j(x,x_j)\cdot\sum_{i=k}^{m} B(x_j,x_i)\cdot\bar{Z}_i \\ +\int_{x_j}^{x} B_j(x,s)\cdot\bar{R}_j(s)ds. \tag{26}$$

відповідно.

Приклад

Восьмишарова плоска стінка складається з вапняної штукатурки – $l_0 = 3см$, $\lambda_0 = 0,7\frac{Вт}{м\cdot К}$, червоної цегли – $l_1 = 24см$, $\lambda_1 = 0,455\frac{Вт}{м\cdot К}$, силікатної цегли – $l_2 = 12см$, $\lambda_2 = 0,79\frac{Вт}{м\cdot К}$, пінобетону – $l_3 = 18см$, $\lambda_3 = 0,14\frac{Вт}{м\cdot К}$, сухого піску – $l_4 = 10см$, $\lambda_4 = 0,35\frac{Вт}{м\cdot К}$, гіпсоплити – $l_5 = 20см$, $\lambda_5 = 0,35\frac{Вт}{м\cdot К}$, шлакобетону – $l_6 = 10см$, $\lambda_6 = 0,58\frac{Вт}{м\cdot К}$, вапняної штукатурки – $l_7 = 3см$, $\lambda_7 = 0,7\frac{Вт}{м\cdot К}$. Тут очевидно, що $x_0 = 0м$, $x_1 = 0,03м$, $x_2 = 0,27м$, $x_3 = 0,39м$, $x_4 = 0,57м$, $x_5 = 0,67м$, $x_6 = 0,87м$, $x_7 = 0,97м$, $x_8 = 1м$. У шарах стінки існують *внутрішні* (r_k) розподілені джерела тепла $r_0 = -80\frac{Вт}{м^3}$, $r_1 = 40\frac{Вт}{м^3}$, $r_2 = -120\frac{Вт}{м^3}$, $r_3 = -130\frac{Вт}{м^3}$, $r_4 = -140\frac{Вт}{м^3}$, $r_5 = -120\frac{Вт}{м^3}$, $r_6 = -130\frac{Вт}{м^3}$, $r_3 = -130\frac{Вт}{м^3}$, а між шарами стінки виникають *точкові* (s_k) джерела тепла $s_1 = 50\frac{Вт}{м^2}$, $s_2 = -30\frac{Вт}{м^2}$, $s_3 = 70\frac{Вт}{м^2}$, $s_4 = -60\frac{Вт}{м^2}$, $s_5 = -80\frac{Вт}{м^2}$, $s_6 = -90\frac{Вт}{м^2}$, $s_7 = -110\frac{Вт}{м^2}$, $s_8 = 0\frac{Вт}{м^2}$.

Необхідно визначити розподіл температурного поля в кожному шарі у випадку, коли відомо температуру та тепловий потік на правій стінці плити (точка x_8)

$$\overline{T}_7(x_8) = \begin{pmatrix} t_7(x_8) = 35,93^0C \\ t_7^{[1]}(x_8) = -715,86\dfrac{Bm}{м^2} \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Для одержання значення вектора $\overline{T}_7(x_7)$ використаємо рекурентне співвідношення (18), зауваживши, що:

$$\overline{T}_8(x_8) = \overline{T}_7(x_8) + \overline{S}_8 = \begin{pmatrix} t_7(x_8) \\ t_7^{[1]}(x_8) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_8(x_8) = 35,93^0C \\ t_8^{[1]}(x_8) = -715,86\dfrac{Bm}{м^2} \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_7(x_7) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_7 - x_8}{\lambda_7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} t_8(x_8) \\ t_8^{[1]}(x_8) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ s_8 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \dfrac{r_7 \cdot (x_8 - x_7)^2}{2 \cdot \lambda_7} \\ r_7 \cdot (x_8 - x_7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{0,97 - 1}{0,7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 35,93 \\ -715,86 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{-130 \cdot (1 - 0,97)^2}{2 \cdot 0,7} \\ -130 \cdot (1 - 0,97) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66,53^0C \\ -711,96\dfrac{Bm}{м^2} \end{pmatrix}$$

Для визначення розподілу температурного поля на проміжку $[x_7, x_8)$ використовуємо (14):

$$\overline{T}_7(x) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x - x_7}{\lambda_7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_7(x_7) \\ t_7^{[1]}(x_7) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{r_7 \cdot (x - x_7)^2}{2 \cdot \lambda_7} \\ r_7 \cdot (x - x_7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x - 0,97}{0,7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 66,53 \\ -711,96 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{-130 \cdot (x - 0,97)^2}{2 \cdot 0,7} \\ -130 \cdot (x - 0,97) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -92,86x^2 - 836,94x + 965,73 \\ -130x - 585,86 \end{pmatrix}$$

Проводячи аналогічні розрахунки отримуємо:

$$\overline{T}_6(x_6) = \begin{pmatrix} 169,19^0N \\ -588,96\dfrac{Ao}{i^{\,2}} \end{pmatrix}, \qquad \overline{T}_6(x) = \begin{pmatrix} -112,07x^2 - 820,45x + 967,81 \\ -130x - 475,86 \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_5(x_5) = \begin{pmatrix} 447,45^0C \\ -474,96\dfrac{Bm}{м^2} \end{pmatrix}, \qquad \overline{T}_5(x) = \begin{pmatrix} -171,43x^2 - 1127,31x + 1279,71 \\ -120x - 394,56 \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_4(x_4) = \begin{pmatrix} 558,3^0C \\ -380,96\dfrac{Bm}{м^2} \end{pmatrix}, \qquad \overline{T}_4(x) = \begin{pmatrix} -200x^2 - 860,46x + 1113,74 \\ -140x - 301,16 \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_3(x_3) = \begin{pmatrix} 955,92^0C \\ -297,56\dfrac{Bm}{м^2} \end{pmatrix}, \qquad \overline{T}_3(x) = \begin{pmatrix} -464,29x^2 - 1763,29x + 1714,22 \\ -130x - 246,86 \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_2(x_2)=\begin{pmatrix}1010,66^0C\\ -356,16\dfrac{Bm}{м^2}\end{pmatrix},\qquad \overline{T}_2(x)=\begin{pmatrix}-75,95x^2-406,03x+1125,82\\ -120x-320,76\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_1(x_1)=\begin{pmatrix}1183,65^0C\\ -332,76\dfrac{Bm}{м^2}\end{pmatrix},\qquad \overline{T}_1(x)=\begin{pmatrix}43,96x^2-733,98x+1205,63\\ 40x-333,96\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_0(x_0)=\begin{pmatrix}1200^0C\\ -380,36\dfrac{Bm}{м^2}\end{pmatrix},\qquad \overline{T}_0(x)=\begin{pmatrix}-57,14x^2-543,37x+1200\\ -80x-380,86\end{pmatrix}$$

Розподіл температурного поля восьмишарової плоскої стінки зображено на рис.1.

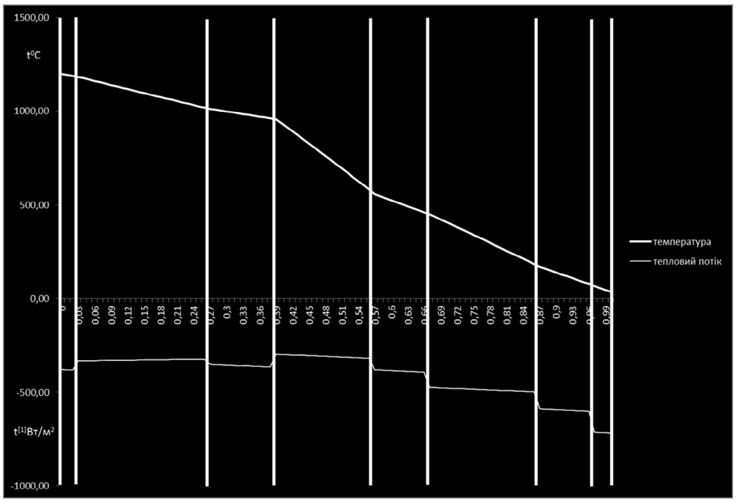

***Рис. 1** Розподіл температурного поля восьмишарової плоскої стінки*

Висновки

В даній роботі вперше поставлена і розв'язана стаціонарна задача про визначення теплообміну у багатошаровій плиті із заданою температурою та тепловим потоком на границі будь-яких двох суміжних шарів, включаючи одну із зовнішніх поверхонь.

Закладається наявність як розподілених (неперервних), так і точкових (зосереджених на границях шарів) джерел тепла, чим зумовлено наявність в правих частинах відповідних рівнянь узагальнених функцій.

При розв'язуванні цієї задачі використовується новітній апарат теорії так званих коректних узагальнених систем диференціальних рівнянь.

Розв'язки задачі, які отримано для довільної кількості шарів в замкненій формі, виражаються виключно через вихідні дані.

Запропонований метод може бути використаний, зокрема в тих випадках, коли всі границі розділу шарів, крім однієї є «недоступними».

Результати статті проілюстровано на числовому прикладі восьмишарової стінки з даними на її правій зовнішній поверхні.

Список літератури:

1. **Величко Л.Д.** Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі / Л.Д. Величко, Р.Я. Лозинський, М.М. Семерак. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 497с.

2. **Исаченко В.П.** Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энегрия, 1975. – 488с.

3. **Тацій Р.М.** Дискретно-неперервні крайові задачі для найпростіших квазідиференціальних рівнянь другого порядку / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, О.О. Власій // Вісник національного університету «Львівська політехніка», фіз-мат. науки. – 2011. – №718. – С.61–69.

4. **Тацій Р.М.** Визначення теплообміну в багатошаровій нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом тепла / Тацій Р.М., Кусій М.І., Пазен О.Ю. // Пожежна безпека. Зб.наук.пр. ЛДУ БЖД. – 2012. – №20. – С.20-26.

5. **Халанай А.** Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М.: Мир, 1971. – 309с.

Р.М. Таций, О.Ю. Пазен

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛИТЕ ПРИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ПРЕДЕЛЕ СОВМЕСТНЫХ СЛОЕВ

В замкнутой форме решено задачу об определении распределения одномерного стандартного температурного поля в многослойной бесконечной плите с кусочно-переменным коэффициентом теплопроводности при наличии дискретно-непрерывных внутренних источников тепла и условий в любой точке основного промежутку. Решение задачи конструктивно и выражается исключительно через ее исходные данные. При решении задачи используются основные положения теории теплопередачи, теории обобщенных систем линейных дифференциальных уравнений и элементы теории обобщенных функций.

Ключевые слова: температура, тепловой поток, квазидифференциальное уравнение, матрица Коши, функция Дирака, задача Коши.

R.M. Tatsiy, O.Y. Pazen

HEAT TRANSMISSION SPECIFICATION IN MULTILAYER INFINITE PLATES AT INITIAL CONDITIONS UNDER ON THE BOUNDARY SUPPRESSION OF ADJACENT LAYERS

The problem of determination of onedimensional steady temperature field distribution in a multi-layer infinitive plate with piecewise and nonuniform thermal conductivity involving discrete-continuous autothermal heat supplies and conditions at arbitrary point of the fundamental interval is solved. Task solution is practical and expressed exceptionally by its outcoming data. Fundamental principles of heat transfer theory, theories of generalized systems of linear differential equations and elements of generalized functions theory are used during task solving.

Key words: temperature, heating current, quasidifferential equation, Cauchy matrix, Dirac delta function, Cauchy problem.

❖ ❖ ❖