

І. М. Ольховий, канд. техн. наук, доцент, Л. Ф. Дзюба, канд. техн. наук, доцент (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності), Х. І. Ліщинська, канд. техн. наук (НУ «Львівська політехніка»)

ПРО ВПЛИВ СТІЛИ ПІДЙОМУ ДВОШАРНІРНОЇ АРКИ ПОСТІЙНОГО РАДІУСА КРИВИЗНИ НА ЇЇ НЕСУЧУ ЗДАТНІСТЬ

Для двошарнірних статично невизначних арок, вісь яких має постійний радіус кривизни, досліджено вплив стріли підйому осі арки на величину внутрішніх сил. Наведено формули для визначення сили розпирання та внутрішніх сил в арках з однаковою довжиною прогону залежно від кута, що визначає значення радіуса кривизни осі та величину стріли підйому. Наведено дані розрахунків з визначення згинальних моментів за різних значень указанного кута. Проведено порівняння отриманих результатів з відповідними згинальними моментами в статично визначних арках.

Ключові слова: арка, радіус кривизни, стріла підйому, сила розпирання, згинальний момент.

Постановка проблеми. Арочні конструкції часто зустрічаються в будівництві як несучі елементи перекриттів, мостів тощо. Якщо арка статично визначна і закріплення її країв дозволяє їм віддалятися по горизонталі один від одного при навантаженні її вертикальною, прикладеною посередині прогону, силою, то в небезпечному перерізі арки виникатиме тільки згинальний момент. Тоді найбільші нормальні напруження згину визначають за формулою для балки

$$\sigma_{\max}^{\text{зг}} = \pm \frac{M_{\max}}{W} = \pm \frac{Fl}{4W}, \quad (1)$$

де M_{\max} – найбільший згинальний момент, F – зосереджена сила, l – довжина прогону арки, W – осьовий момент опору перерізу арки. В арках великих прогонів максимальний згинальний момент і, відповідно, напруження розтягу та стиску можуть досягати великих значень. Якщо взяти до уваги, що в багатьох випадках матеріал арки може бути крихким, то наявність великих напружень розтягу може зумовити появу тріщин і, як наслідок, виникнення небезпеки руйнування арочної конструкції. З метою зменшення максимальних напружень опори арки часто роблять шарнірно нерухомими (двошарнірні арки) [1] (рис. 1). У разі навантаження таких арок вертикальними силами в опорах виникають горизонтальні сили розпирання X , наявність яких призводить до зменшення максимальних згинальних моментів і максимальних напружень. Окрім цього від згаданих сил виникають поздовжні стискуючі сили N , які в небезпечному перерізі арки створюють додаткові напруження стиску $\sigma_c = -\frac{N}{A}$, зменшуючи

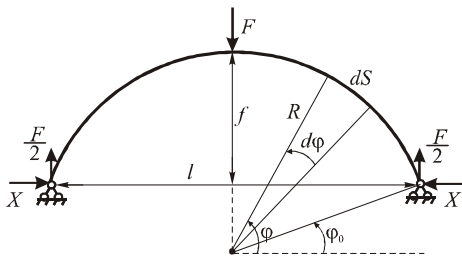
цим небезпечні для крихких матеріалів напруження розтягу. За відомих сил розпирання X найбільші внутрішні сили в навантаженій посередині прогону вертикальною силою F арці постійного радіуса кривизни, вісь якої описана частиною кола радіуса R , визначають із виразів

$$M_{\max} = \frac{Fl}{4} - X \cdot f; \quad N = -X, \quad (2)$$

де f – стріла підйому осі арки.

Як видно з наведених виразів, величина, напружень, а отже і міцність двошарнірних арок, окрім довжини прогону, значно залежать від стріли підйому арки та залежних від стріли підйому сил розпирання $X = X(f)$.

Мета роботи. Дослідження впливу величини стріли підйому двошарнірних арок, навантажених посередині прогону вертикальною силою, на значення сили розпирання та на величину максимальних згинальних моментів.



Виклад основного матеріалу. За постійної довжини l прогону арки (рис.1), стріла підйому f залежить від радіуса кривизни осі арки R і кута φ_0 , що визначає кутове положення опор арки відносно горизонтальної прямої, яка проходить через центр кривизни осі арки.

Рис. 1. Схема двошарнірної арки

Ці залежності можна подати у вигляді

$$\sin \varphi_0 = \frac{R-f}{R}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{l}{2R}, \quad R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f}. \quad (3)$$

Арка, схема якої наведена на рис. 1, один раз статично невизначна. Реакції в її опорах дорівнюють: $Y_A = Y_B = \frac{F}{2}$, $X_A = X_B = X$.

Канонічне рівняння методу сил, яке служить для визначення невідомої сили розпирання X , має вигляд [2]:

$$\delta_{11} \cdot X + \Delta_{1F} = 0, \quad (4)$$

де коефіцієнти, у разі нехтування переміщеннями від поздовжніх і поперечних сил, визначають методом інтегралу Мора за формулами:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \int_s \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 ds = \frac{2}{EI} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 \cdot R d\varphi; \\ \Delta_{1F} &= \frac{1}{EI} \int_s M_F \cdot \bar{M}_1 ds = \frac{2}{EI} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} M_F \cdot \bar{M}_1 \cdot R d\varphi, \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

де $ds = R d\varphi$ – елементарна довжина дуги кола; EI – жорсткість перерізу арки; \bar{M}_1, M_F – відповідно вирази згинальних моментів від одиничної сили $\bar{X} = 1$ та заданої сили F . Відповідно до рис. 1 ці вирази можна записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1 &= 1 \cdot R (\sin \varphi - \sin \varphi_0); \\ M_F &= \frac{F}{2} R (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Після підстановки першого з виразів системи (6) у перше рівняння системи (5) отримаємо:

$$\delta_{11} = \frac{2R^3}{EI} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi_0 \sin \varphi + \sin^2 \varphi_0) d\varphi. \quad (7)$$

Ураховуючи значення інтегралів, що входять у вираз (7), отримуємо вираз для визначення коефіцієнта δ_{11} :

$$\delta_{11} = \frac{2R^3}{EI} \left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0}{4} \right) - 2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \sin^2 \varphi_0 \right]. \quad (8)$$

Значення коефіцієнта Δ_{1F} визначають із співвідношення

$$\Delta_{1F} = -\frac{2R^3}{EI} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi_0 \sin \varphi - \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi_0 \cos \varphi) d\varphi, \quad (9)$$

з якого, після врахування значень інтегралів, знаходимо:

$$\Delta_{1F} = -\frac{FR^3}{EI} \left[\cos^2 \varphi_0 - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi_0) + \sin \varphi_0 (1 - \sin \varphi_0) \right]. \quad (10)$$

Підставивши вирази (8), (10) у формулу (4), визначаємо величину сили розпирання

$$X = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = 0,5F \frac{\left[\cos^2 \varphi_0 - \left(\frac{\pi - 2\varphi_0}{4} \right) \sin 2\varphi_0 - \frac{1}{2} (1 - \sin^2 \varphi_0) + \sin \varphi_0 (1 - \sin \varphi_0) \right]}{\left[\left(\frac{\pi - 2\varphi_0 + \sin 2\varphi_0}{4} \right) - \sin 2\varphi_0 + \left(\frac{\pi - 2\varphi_0}{2} \right) \sin^2 \varphi_0 \right]}. \quad (11)$$

За відомої сили X сумарний згинальний момент у довільному перерізі арки (рис.1) визначаємо за формулою

$$M(\varphi) = M_F + \bar{M}_1 \cdot X = 0,5FR(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) - XR(\sin \varphi - \sin \varphi_0). \quad (12)$$

За формулою (11) отримано значення сил розпирання X у двошарнірних арках з довжиною прогону $l = 5,2$ м за таких значень кута φ_0 і радіуса кривизни осі арки R :

а) якщо вісь арки півкола; тоді $\varphi_0 = 0^\circ$, $f = R = 0,5l = 2,6$ м, $X = 0,32F$;

б) якщо $\varphi_0 = 30^\circ$; тоді $f = 1,5$ м, $R = 3,0$ м, $X = 0,63F$;

в) якщо $\varphi_0 = 45^\circ$; тоді $f = 1,07$ м, $R = 3,7$ м, $X = 0,91F$;

г) якщо $\varphi_0 = 60^\circ$; тоді $f = 0,70$ м, $R = 5,2$ м, $X = 1,44F$.

Для першого випадку, коли вісь арки є дугою півкола, з загальних виразів (8), (10)-(12) отримуємо такі значення коефіцієнтів та силового навантаження:

$$\delta_{11} = \frac{\pi R^3}{2EI}, \quad \Delta_{1F} = -\frac{FR^3}{2EI}, \quad X = \frac{F}{\pi}, \quad M(\varphi) = FR \left[\frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{\pi} \sin \varphi \right].$$

Величини згинального моменту $M_{ca} = M(\varphi)$ у характерних точках такі:

$$M_{зг}(0) = 0, \quad M_{зг}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,182FR = 0,091Fl.$$

Екстремального значення момент набуде в перерізі, положення якого визначаємо з умови:

$$\frac{dM}{d\varphi} = 0,5 \sin \varphi - \frac{1}{\pi} \cos \varphi = 0.$$

Звідси $tg \varphi = 0,636$, $\varphi = 32,5^\circ$. Тоді $M_{зг}^{екстр} = M_{зг}(32,5^\circ) = -0,0465Fl$.

Еюра згинальних моментів для цього випадку показана на рис. 2 (крива 1). Для порівняння, на цьому ж рисунку показана еюра згинальних моментів (крива 2) для аналогічної статично визначної арки, в якій сила розпирання $X=0$. Для такої арки величини згинальних моментів, визначені за виразом:

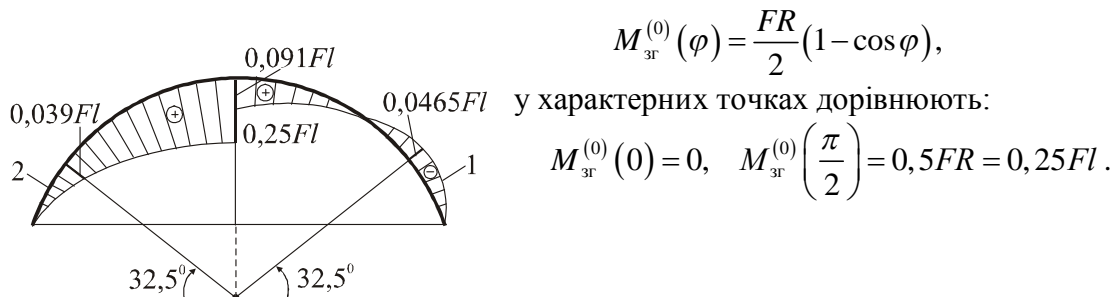


Рис. 2. Еюри згинальних моментів

Порівняння максимальних значень згинальних моментів у вказаних випадках показує, що для двошарнірної арки момент у k раз менший від аналогічного моменту в статично визначній шарнірно опертій арці:

$$k = \frac{\max M_{зг}^{(0)}}{\max M_{зг}} = \frac{0,25Fl}{0,091Fl} = 2,74.$$

У табл. 1 наведені дані розрахунків, що характеризують величини і закони змін згинальних моментів в двохшарнірних арках за інших значень стріли підйому f та кута φ_0 .

Таблиця 1

Згинальні моменти в арках з різною стрілою підйому

f м	R м	φ_0 град	X/F	$\varphi_{\text{екстр}}$ град	$\frac{M_{зг}(\pi/2)}{Fl}$	$\frac{M_{\text{екстр}}}{Fl}$	k
1,5	3,0	30	0,61	51,6	0,067	-0,032	3,73
1,07	3,7	45	0,91	61,3	0,051	-0,048	4,90
0,70	5,2	60	1,6	72,6	0,036	-0,065	6,94

Висновки. Дослідження залежності зміни згинальних моментів, а отже і максимальних напружень в перерізах двохшарнірних арок, вісь яких зігнута по дузі кола, навантажених вертикальною силою, показують, що розподіл величини цих моментів вздовж осі арки значно залежать від стріли підйому осі арки. При цьому екстремальні значення згинальних моментів у таких арках істотно менші від відповідних значень згинальних моментів в аналогічних шарнірно опертих статично визначних арках.

Список літератури:

1. Киселев В. А. Строительная механика / В. А. Киселев. – М. – Госстройиздат, 1960. – 560 с.
2. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко., А.П.Яковлев, В.В.Матвеев. – К.: Наукова думка, 1975. – 704 с.

И.М. Ольховый, Л.Ф.Дзюба, Х.И.Лищинская

О ВЛИЯНИИ СТРЕЛЫ ПОДЪЕМА ДВУХШАРНИРНОЙ АРКИ ПОСТОЯННОГО РАДИУСА КРИВИЗНЫ НА ЕЕ НЕСУЩЮЮ СПОСОБНОСТЬ

Для двухшарнирных статически неопределимых арок, ось которых имеет постоянный радиус кривизны, исследовано влияние стрелы подъема оси арки на величину внутренних сил. Приведены формулы для определения сил распора и изгибающих моментов в зависимости от угла, определяющего стрелу подъема оси арки и ее радиус кривизны. Даны результаты расчетов и их анализ.

Ключевые слова: арка, радиус кривизны, стрела подъема, сила распора, изгибающий момент.

I.M. Olkhovyi, L.F. Dzyuba, H. I. Lishchynska

TWO-HINGED ARCH RISE IMPACT OF CONSTANT RADIUS OF CURVATURE ON ITS LOADING CAPACITY

Arch chamber impact on internal force size for two-hinged statically indeterminate arches, axis of which have constant radius of curvature, is researched. Formulas for spreading force determination and internal force in arches with equal length of passage in relation to oblique angle determining radius definition of axis curvature and arch chamber size are deduced. Computed data of resisting moments determination at various values of indicated angle are analyzed. The comparison of obtained results with specific resisting moments in statically determinate arches is conducted.

Keywords: arch, radius of curvature, arch chamber, spreading force, resisting moment.