Вісник ЛДУБЖД | **ISSN 2078-4643**
https://journal.ldubgd.edu.ua/index.php/Visnuk/submissions
Bulletin of Lviv State University of Life Safety
УДК 517. 912
DOI: 10.32447/20784643.18.2018.06

Р. М. Тацій, О. Ю. Чмир, О. О. Карабин
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ КУСКОВО-СТАЛОГО ПЕРЕРІЗУ

Вступ.

Методи розв'язування нестаціонарних крайових задач можна поділити на прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод функції Ґріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

У роботі досліджено поздовжні коливання стрижня, що складається з двох кусків кусково-сталого перерізу. Запропонована в даній роботі схема належить до прямих методів розв'язування крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних, яка дозволяє обходити проблему множення узагальнених функцій, метод зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, але взаємозв'язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур'є та модифікований метод власних функцій.

Мета.

В цій роботі досліджуються поздовжні коливання стрижня з двох кусків кусково-сталого перерізу.

Методи.

За допомогою методу редукції дослідження зводиться до знаходження розв'язку двох задач: стаціонарної неоднорідної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння. Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розв'язку. Такий підхід дозволяє застосовувати програмні засоби до процесу вирішення задачі.

Результати.

Рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ x\in(x_0;x_2),\ t\in(0;+\infty),$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x_0,t)=\psi_0(t), \\ u(x_2,t)=\psi_1(t), \end{cases}\quad t\in[0;+\infty)$$

і початковими умовами

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varphi_1(x), \end{cases}\quad x\in[x_0;x_2],$$

де F_0, F_1, E, ρ – сталі, $F(x)=F_0\cdot\theta_0+F_1\cdot\theta_1$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)\in C^2(0;+\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – кусково-неперервні на $(x_0;x_2)$. За допомогою методу редукції, ми можемо знайти розв'язок задачі як суму двох функцій $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$. Отримано:

$$\overline{W}_0(x,t)=\frac{1}{\dfrac{x_1-x_0}{F_0}+\dfrac{x_2-x_1}{F_1}}\cdot\begin{pmatrix}\left(\dfrac{x_1-x}{F_0}+\dfrac{x_2-x_1}{F_1}\right)\psi_0(t)+\dfrac{x-x_0}{F_0}\cdot\psi_1(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix},$$

$$\overline{W}_1(x,t)=\frac{1}{\dfrac{x_1-x_0}{F_0}+\dfrac{x_2-x_1}{F_1}}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{x_2-x}{F_1}\psi_0(t)+\left(\dfrac{x_1-x_0}{F_0}+\dfrac{x-x_1}{F_1}\right)\psi_1(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix},$$

де $x_0<x_1<x_2$.

Перші координати векторів $\overline{W}_0(x,t)$, $\overline{W}_1(x,t)$ є шукана функція $w(x,t)$. Функцію $v(x,t)$ отримано у вигляді ряду

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t+\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t\sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\cdot X_k(x,\omega_k).$$

Висновок.
Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розв'язку. Такий підхід дозволяє застосовувати програмні засоби до процесу вирішення задачі та графічної ілюстрації розв'язку. Отримані результати мають безпосереднє практичне застосування в теорії коливань стрижнів з кусково-змінним розподілом параметрів.
Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, функція Дірака, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій.

Вступ.

Методи розв'язування нестаціонарних крайових задач можна поділити на прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод функції Ґріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

Запропонована у цій роботі схема належить до прямих методів розв'язування крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних [1], метод зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, але взаємопов'язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур'є та модифікований метод власних функцій.

У роботі [2] розглянуто загальну схему дослідження поздовжніх коливань стрижнів кусково-сталого перерізу. Отримано явні формули для обчислення розв'язку та його квазіпохідної такої задачі для будь-якого підінтервалу основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду у функціях – коефіцієнтах задачі.

У роботі [3] розглядається гіперболічне рівняння з кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами з найбільш загальними локальними крайовими умовами. Виділено випадок кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин, коли розв'язки вихідної задачі можуть бути отримані в замкненій формі.

В цій роботі досліджуються поздовжні коливання стрижня з двох кусків кусково-сталого перерізу. За допомогою методу редукції дослідження зводиться до знаходження розв'язку двох задач: стаціонарної неоднорідної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння.

1. Основні позначення, формулювання задачі та допоміжні твердження

Нехай L – відкритий інтервал дійсної осі $\mathbb{R}$, $[x_0;x_2]\subset L$ – відрізок дійсної осі; $x_0<x_1<x_2$ – довільне розбиття відрізка $[x_0;x_2]$ дійсної осі Ox на дві частини.

Введемо основні позначення:

θ_i – характеристична функція проміжку $\left[x_i;x_{i+1}\right)$, тобто $\theta_i\left(x\right)=\begin{cases}1, x\in\left[x_i,x_{i+1}\right),\\ 0, x\notin\left[x_i,x_{i+1}\right),\end{cases}$ $i=\overline{0,1}$.

Нехай F_0, F_1, E, ρ – сталі. Покладемо $F(x)=F_0\cdot\theta_0+F_1\cdot\theta_1$.

Розглянемо рівняння поздовжніх коливань стрижня

$$\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$
$$x\in(x_0;x_2),\ t\in(0;+\infty)\ , \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases}u(x_0,t)=\psi_0(t),\\ u(x_2,t)=\psi_1(t),\end{cases}\quad t\in[0;+\infty) \tag{2}$$

та початковими умовами

$$\begin{cases}u(x,0)=\varphi_0(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varphi_1(x),\end{cases}\quad x\in[x_0;x_2], \tag{3}$$

де $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)\in C^2(0;+\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – кусково-неперервні на $(x_0;x_2)$.

Метод редукції відшукання розв'язку задачі детально описаний, наприклад, в [4, 5]. Згідно з цим методом, розв'язок задачі (1) - (3) шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)\ . \tag{4}$$

Одну з функцій, наприклад $w(x,t)$, конструюємо спеціальним способом, тоді функцію $v(x,t)$ визначимо, використавши побудовану функцію $w(x,t)$.

2. Побудова функції $w(x,t)$

Визначимо функцію $w(x,t)$ як розв'язок крайової задачі

$$(F(x)\cdot w_x{}')_x{}'=0\,, \tag{5}$$

$$\begin{cases}w(x_0,t)=\psi_0(t),\\ w(x_2,t)=\psi_1(t),\end{cases}\quad t\in[0;+\infty)\,. \tag{6}$$

Зауважимо, що змінна t тут вважається параметром.

В основі методу розв'язування задачі (5), (6) лежить концепція квазіпохідних, викладена в [6].

Визначимо квазіпохідну функції $w(x,t)$, як добуток функції $F(x)$ та похідної по змінній x функції $w(x,t)$, тобто $w^{[1]} = F \cdot w_x{}'$. Введемо вектор $\overline{W} = \begin{pmatrix} w \\ w^{[1]} \end{pmatrix}$. За таких позначень квазідиференціальне рівняння (5) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{W}_x{}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{W}. \qquad (7)$$

Під розв'язком системи (7) розуміємо абсолютно-неперервну вектор-функцію $\overline{W}(x,t)$, що за змінною x справджує її майже скрізь (див. [6]).

Крайові умови (6) запишемо у векторній формі

$$P \cdot \overline{W}(x_0,t) + Q \cdot \overline{W}(x_2,t) = \overline{\Gamma}(t), \qquad (8)$$

де $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix}$.

Нехай $w_i(x,t)$ та $w_i^{[1]}(x,t)$ визначені на проміжку $[x_i; x_{i+1})$, $i = \overline{0,1}$. Покладемо

$$w(x,t) = w_0(x,t)\theta_0 + w_1(x,t)\theta_1. \qquad (9)$$

На проміжках $[x_0; x_1)$ та $[x_1; x_2]$ система (7) відповідно набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_0^{[1]} \end{pmatrix}_x' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_0^{[1]} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1^{[1]} \end{pmatrix}_x' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1^{[1]} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Матриці Коші $B_0(x,s)$ та $B_1(x,s)$ таких систем відповідно матимуть вигляд

$$B_0(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_0(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{де } b_0(x,s) = \int_s^x \frac{1}{F_0} dz = \frac{x-s}{F_0},$$

$$B_1(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_1(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де
$$b_1(x,s) = \int_s^x \frac{1}{F_1} dz = \frac{x-s}{F_1}. \qquad (11)$$

Позначимо

$$B(x_1,x_0) \overset{def}{=} B_0(x_1,x_0),$$

$$B(x_2,x_0) \overset{def}{=} B_1(x_2,x_1) \cdot B_0(x_1,x_0). \qquad (12)$$

Структура (11) матриць $B_0(x,s)$, $B_1(x,s)$ дає можливість встановити структуру матриць (12)

$$B(x_1,x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_1 - x_0}{F_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B(x_2,x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_1 - x_0}{F_0} + \dfrac{x_2 - x_1}{F_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причому $B(x_i,x_i) \overset{def}{=} I$, $i = \overline{0,1}$, де I – одинична матриця.

Розв'язки систем (10) на проміжках $[x_0; x_1)$ та $[x_1; x_2]$ відповідно мають вигляд

$$\overline{W}_0(x,t) = B_0(x,x_0) \cdot \overline{P}_0,$$
$$\overline{W}_1(x,t) = B_1(x,x_1) \cdot \overline{P}_1, \qquad (13)$$

де $\overline{P}_0$, $\overline{P}_1$ – поки що невідомі вектори [1].

В точці $x = x_1$ повинна виконуватись умова спряження, а саме $\overline{W}_1(x_1,t) = \overline{W}_0(x_1,t)$ (див. [7]), в результаті чого одержимо рекурентне співвідношення

$$\overline{P}_1 = B_0(x_1,x_0) \cdot \overline{P}_0, \qquad (14)$$

де $\overline{P}_0$ – початковий (невідомий) вектор.

Нехай $\overline{W}(x_0,t) \overset{def}{=} \overline{P}_0$. Використовуючи (13) та (12), визначаємо

$$\overline{W}(x_2,t) \overset{def}{=} \overline{W}_1(x_2,t) = B_1(x_2,x_1)\overline{P}_1 =$$
$$= B_1(x_2,x_1)B(x_1,x_0)\overline{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_1 - x_0}{F_0} + \dfrac{x_2 - x_1}{F_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{P}_0.$$

Підставимо визначені таким чином $\overline{W}(x_0,t)$ та $\overline{W}(x_2,t)$ в крайові умови (8) в результаті чого вони набудуть вигляду $[P + Q \cdot B(x_2,x_0)]\overline{P}_0 = \overline{\Gamma}$, звідки одержуємо

$$\overline{P}_0 = [P + Q \cdot B(x_2,x_0)]^{-1} \cdot \overline{\Gamma}. \qquad (15)$$

Виконавши дії над матрицями, визначаємо, що

$$[P + Q \cdot B(x_2,x_0)]^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\dfrac{x_1 - x_0}{F_0} + \dfrac{x_2 - x_1}{F_1}} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 - x_0}{F_0} + \dfrac{x_2 - x_1}{F_1} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Підставимо (16) у (15) та (14)

$$\overline{P}_0 = \frac{1}{\frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}\right)\psi_0(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\overline{P}_1 = \\ = \frac{1}{\frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{F_1}\psi_0(t)+\frac{x_1-x_0}{F_0}\psi_1(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

На основі формул (13), (17), (18) після перетворень отримаємо вектор - функції $\overline{W}_0(x,t)$ та $\overline{W}_1(x,t)$ на проміжках $[x_0;x_1)$ та $[x_1;x_2]$, відповідно:

$$\overline{W}_0(x,t) = \\ = \frac{1}{\frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{x_1-x}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}\right)\psi_0(t)+\frac{x-x_0}{F_0}\cdot\psi_1(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t) \end{pmatrix},$$

$$\overline{W}_1(x,t) = \\ = \frac{1}{\frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_2-x}{F_1}\psi_0(t)+\left(\frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x-x_1}{F_1}\right)\psi_1(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Перші координати векторів $\overline{W}_0(x,t)$ та $\overline{W}_1(x,t)$ в (19) є шуканими функціями $w_0(x,t)$ та $w_1(x,t)$, відповідно. Підставляючи їх у (9), отримуємо розв'язок на всьому проміжку $[x_0;x_2]$.

3. Побудова функції $v(x,t)$

Запишемо мішану задачу для функції $v(x,t)$. Підставляючи (4) в (1) та враховуючи, що функція $w(x,t)$ задовольняє (5), одержуємо неоднорідне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$x\in(x_0;x_2),\ t\in(0;+\infty). \quad (20)$$

Підставимо (4) в початкові умови (3). Одержимо для функції $v(x,t)$ початкові умови

$$\begin{cases} v(x,0)=\Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=\Phi_1(x), \end{cases} \quad x\in[x_0;x_2], \quad (21)$$

де $$\Phi_0(x) \overset{def}{=} \varphi_0(x) - w(x,0),$$

$$\Phi_1(x) \overset{def}{=} \varphi_1(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,0).$$

Оскільки функція $w(x,t)$ справджує крайові умови (6), то із (4) випливають крайові умови для функції $v(x,t)$

$$\begin{cases} v(x_0,t)=0, \\ v(x_2,t)=0, \end{cases} \quad t\in[0;+\infty). \quad (22)$$

Отже, за умови, що розв'язок $w(x,t)$ задачі (5), (6) є відомим, функція $v(x,t)$ є розв'язком мішаної задачі (20) - (22).

4. Метод Фур'є та задача на власні значення

Для рівняння (20) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right). \quad (23)$$

з крайовими умовами (22).

Його нетривіальні розв'язки шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sin(\omega t+\varepsilon)\cdot X(x), \quad (24)$$

де ω – параметр, ε – константа, $X(x)$ – невідома функція.

Підставимо (24) в рівняння (23). Одержимо квазідиференціальне рівняння

$$\left(F(x)X'(x)\right)' + \alpha^2 F(x)X(x) = 0, \quad (25)$$

де $$\alpha^2 = \frac{\rho}{E}\cdot\omega^2.$$

Підставимо (24) в умови (22). Одержимо крайові умови

$$\begin{cases} X(x_0)=0, \\ X(x_2)=0. \end{cases} \quad (26)$$

Під розв'язком рівняння (25) розуміємо абсолютно-неперервну на $[x_0;x_2]$ функцію $X(x)$, що справджує його майже скрізь [6].

Ввівши квазіпохідну $X^{[1]} \overset{def}{=} FX'$, вектор $\overline{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^{[1]} \end{pmatrix}$ та матрицю $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{F} \\ -\alpha^2 F & 0 \end{pmatrix}$, запишемо задачу (25) - (26) у матричному вигляді

$$\overline{X}' = A\cdot\overline{X}, \quad (27)$$

$$P\overline{X}(x_0) + Q\overline{X}(x_2) = \overline{0}. \quad (28)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриці Коші $B_0(x,s,\omega)$ та $B_1(x,s,\omega)$ системи (27) відповідно на проміжках $[x_0;x_1)$ та $[x_1;x_2]$ мають вигляд

$$B_0(x,s,\omega) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(x-s) & \frac{\sin\alpha(x-s)}{F_0\,\alpha} \\ -F_0\,\alpha\sin\alpha(x-s) & \cos\alpha(x-s) \end{pmatrix},$$

$$B_1(x,s,\omega) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(x-s) & \frac{\sin\alpha(x-s)}{F_1\,\alpha} \\ -F_1\,\alpha\sin\alpha(x-s) & \cos\alpha(x-s) \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна матриця (аналог матриці Коші на всьому проміжку) системи (27) має структуру

$$B(x,x_0,\omega)\overset{def}{=}B_0(x,x_0,\omega)\cdot\tilde{B}(x_0,x_0,\omega)\cdot\theta_0+ \tag{29}$$
$$+B_1(x,x_1,\omega)\cdot B(x_1,x_0,\omega)\cdot\theta_1,$$

де, аналогічно, як і в формулі (12), $B(x_1,x_0,\omega)\overset{def}{=}B_1(x_2,x_1,\omega)\cdot B_0(x_1,x_0,\omega)$.

Позначимо також

$$B(x,x_0,\omega)\overset{def}{=}\begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega)\\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega)\end{pmatrix}. \tag{30}$$

Нетривіальний розв'язок $\overline{X}(x,\omega)$ системи (27) шукаємо у вигляді $\overline{X}(x,\omega)=B(x,x_0,\omega)\cdot\overline{C}$, де $\overline{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$ – деякий ненульовий вектор.

Вектор-функція $\overline{X}(x,\omega)$ має задовольняти крайові умови (28), тобто

$$\left[P\cdot B(x_0,x_0,\omega)+Q\cdot B(x_2,x_0,\omega)\right]\cdot\overline{C}=\overline{0},$$

врахувавши, що $B(x_0,x_0,\omega)=I$, прийдемо до рівності

$$\left[P+Q\cdot B(x_2,x_0,\omega)\right]\cdot\overline{C}=\overline{0}. \tag{31}$$

Для існування ненульового вектора $\overline{C}$ в (31) необхідно і досить виконання умови

$$\det\left[P+Q\cdot B(x_2,x_0,\omega)\right]=0. \tag{32}$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (32), врахувавши вигляд матриць P, Q та (30)

$$\det\left[P+Q\cdot B(x_2,x_0,\omega)\right]=$$
$$=\det\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}(\omega)&b_{12}(\omega)\\b_{21}(\omega)&b_{22}(\omega)\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\det\left[\begin{pmatrix}1&0\\b_{11}(\omega)&b_{12}(\omega)\end{pmatrix}\right]=b_{12}(\omega).$$

Сформулюємо наступне твердження.

Твердження 1. *Характеристичне рівняння задачі на власні значення (25), (26) має вигляд*

$$b_{12}(\omega)=0. \tag{33}$$

Як відомо (див. [8]), корені ω_k характеристичного рівняння (33), які є власними значеннями задачі (25), (26), є додатними та різними.

Для знаходження ненульового вектора $\overline{C}$ підставимо в рівність (31) ω_k замість ω. Тоді прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix}1&0\\b_{11}(\omega_k)&b_{12}(\omega_k)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases}C_1=0,\\ b_{11}(\omega_k)\cdot C_1+b_{12}(\omega_k)\cdot C_2=0.\end{cases} \tag{34}$$

Оскільки виконується (33), то $C_1=0$, а $C_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, наприклад, $C_2=1$, тобто $\overline{C}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Нехай $\overline{X}_k(x,\omega_k)$ – нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k. Справедливим є твердження.

Твердження 2. *Власні вектори системи диференціальних рівнянь (27) з крайовими умовами* (28) *мають структуру*

$$\overline{X}_k(x,\omega_k)=B(x,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C},\ k\in\mathbb{N}.$$

Наслідок. *Власні функції* $X_k(x,\omega_k)$*, як перші координати власних векторів* $\overline{X}_k(x,\omega_k)$*, можна записати у вигляді*

$$X_k(x,\omega_k)=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\cdot B(x,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C},\ k=1,2,3,\ldots \tag{35}$$

Зокрема, оскільки

$$X_k(x,\omega_k)=X_{k\,0}(x,\omega_k)\cdot\theta_0+X_{k\,1}(x,\omega_k)\cdot\theta_1, \tag{36}$$

то з (29) та (35) випливає, що

$$X_{k\,0}(x,\omega_k)=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\cdot B_0(x,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C},$$
$$X_{k\,1}(x,\omega_k)=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\cdot B_1(x,x_1,\omega_k)\cdot B(x_1,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C}. \tag{37}$$

5. Побудова розв'язку $v(x,t)$ мішаної задачі (20) - (22)

Для розв'язання задачі (20) - (22) застосуємо метод власних функцій [5], який полягає в тому, що розв'язок задачі (20) - (22) шукаємо у вигляді

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k), \tag{38}$$

де $T_k(t)$ – поки що невідомі функції.

Оскільки $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ входить в праву частину рівняння (20), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ крайової задачі (25), (26)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\sum_{k=1}^{\infty}w_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k). \tag{39}$$

Підставляючи вираз (38) у (20) та враховуючи (39), отримаємо рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k(t)\cdot\left(F(x)\cdot X_k{}'(x,\omega_k)\right)'-\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot T_k''(t)\cdot X_k(x,\omega_k)\right]=$$
$$=\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\sum_{k=1}^{\infty}w_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k).$$

Враховуючи, що власні функції $X_k(x,\omega_k)$ задовольняють рівняння (25), приходимо до рівності

$$-\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[\omega_k^2\cdot T_k(t)+T_k''(t)\right]\cdot X_k(x,\omega_k)=$$
$$=\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\sum_{k=1}^{\infty}w_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k).$$

Прирівнюємо коефіцієнти Фур'є

$$T_k''(t)+\omega_k^2\cdot T_k(t)=-w_k(t),\ k=1,2,3,\ \ldots \quad (40)$$

Загальний розв'язок кожного з диференціальних рівнянь (40) має вигляд

$$T_k(t)=a_k\cos\omega_k t+d_k\sin\omega_k t-$$
$$-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t\sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds, \quad (41)$$

де a_k, d_k – невідомі сталі [9].

Позначимо

$I(t)=\frac{1}{\omega_k}\int_0^t\sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds$. Зауважимо, що $I(0)=0$, $I_t'(0)=0$ [10].

Для визначення сталих a_k, d_k розвинемо в ряди Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ праві частини початкових умов (21)

$$\Phi_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{0\,k}\cdot X_k(x,\omega_k), \quad (42)$$

$$\Phi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{1\,k}\cdot X_k(x,\omega_k), \quad (43)$$

де $\Phi_{0\,k}$, $\Phi_{1\,k}$ – відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (41) випливає, що

$$T_k(0)=a_k, \quad (44)$$

$$T_k'(t)=-a_k\omega_k\sin\omega_k t+d_k\omega_k\cos\omega_k t-I_t'(t),$$

звідки

$$T_k'(0)=d_k\omega_k. \quad (45)$$

З (38), першої умови в (21), та врахувавши (42), одержуємо

$\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\cdot X_k(x,\omega_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{0\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)$. Звідки, використовуючи (44), маємо

$$T_k(0)=a_k=\Phi_{0\,k}.$$

Аналогічно з (38), другої умови в (21), врахувавши (43), маємо

$\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(0)\cdot X_k(x,\omega_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{1\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)$. Звідки, використовуючи (45), знаходимо

$$T_k'(0)=d_k\omega_k=\Phi_{1\,k}, \text{ або } d_k=\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}.$$

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (20) - (22) у вигляді ряду

$$v(x,t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t+\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t\sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\times$$
$$\times X_k(x,\omega_k).$$

Враховуючи (36) та те, що $v(x,t)=v_0(x,t)\cdot\theta_0+v_1(x,t)\cdot\theta_1$, де $v_0(x,t)$ та $v_1(x,t)$ визначені відповідно на проміжках $[x_0;x_1)$ та $[x_1;x_2]$, одержуємо

$$v_0(x,t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t+\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t\sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\times$$
$$\times X_{k\,0}(x,\omega_k),$$

$$v_1(x,t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t+\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t\sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\times$$
$$\times X_{k\,1}(x,\omega_k), \quad (46)$$

де функції $X_{k\,0}(x,\omega_k)$, $X_{k\,1}(x,\omega_k)$ обчислюються за формулою (37).

Врахувавши перші координати векторів $\overline{W}_0(x,t)$, $\overline{W}_1(x,t)$ в (19) та (46), отримаємо розв'язок задачі (1) - (3)

$$u(x,t)=(w_0(x,t)+v_0(x,t))\cdot\theta_0+(w_1(x,t)+v_1(x,t))\cdot\theta_1.$$

6. Застосування пакету Maple до знаходження власних значень та власних функцій задачі (27) - (28)

Сучасні програмні засоби дають змогу отримати необхідну кількість власних значень та власних функцій, що забезпечує відповідну точність розв'язку. Розглянемо результат застосування пакету Maple для отримання розв'язку поставленої задачі. Для прикладу розглянемо сталевий стрижень довжиною 1 м, що складається з двох циліндричних кусків однакової довжини, площі поперечних перерізів яких відповідно становлять $F_0=0{,}0025\pi$ м^2, $F_1=0{,}000625\,\pi$ м^2. За таких умов $x_0=0$, $x_1=0{,}5$, $x_2=1$. Модуль Юнга для сталі становить $E=20394324259$ кг/м^2, густина $\rho=7900$ кг/м^3. Обчислені перші одинадцять власних значень та власних функцій:

Знаходження перших одинадцяти ω_k

$$> \omega_1 := NextZero\left(\omega \to b_{12}(\omega), 0, guardDigits = 500, maxdistance = 1000000000000\right);\ \textbf{for } k \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 10 \textbf{ do } \omega_{k+1} := NextZero\left(\omega \to b_{12}(\omega), \omega_k, guardDigits = 500, maxdistance = 10000000000000\right) \textbf{od}$$

$$\omega_1 := 5047.6704$$
$$\omega_2 := 10095.341$$
$$\omega_3 := 15143.011$$
$$\omega_4 := 20190.682$$
$$\omega_5 := 25238.352$$
$$\omega_6 := 30286.022$$
$$\omega_7 := 35333.693$$
$$\omega_8 := 40381.363$$
$$\omega_9 := 45429.033$$
$$\omega_{10} := 50476.704$$
$$\omega_{11} := 55524.374$$

Знаходження перших одинадцяти власних функцій $X_{k\,0}$

$$> evalm\left(\left[\,1\ \ 0\,\right] \&* Matrix\left(\left[\left[\cos(\alpha\cdot(x-s)), \frac{\sin(\alpha\cdot(x-s))}{\alpha\cdot F_0}\right], \left[-\alpha\cdot F_0\cdot\sin(\alpha\cdot(x-s)), \cos(\alpha\cdot(x-s))\right]\right]\right) \&* \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) : Y_{k0} := evalf\left(subs\left(s = x_0, \%\right)\right);$$

$$Y_{k0} := \frac{127.32395\sin(\alpha x)}{\alpha}$$

$$> \textbf{for } k \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 11 \textbf{ do } X_{k,\,0} := subs\left(\alpha = \alpha_k, Y_{k0}\right) \textbf{ od}$$

$$X_{1,\,0} := 40.528473\sin(3.1415926\,x)$$
$$X_{2,\,0} := 20.264236\sin(6.2831855\,x)$$
$$X_{3,\,0} := 13.509491\sin(9.4247778\,x)$$
$$X_{4,\,0} := 10.132118\sin(12.566371\,x)$$
$$X_{5,\,0} := 8.1056945\sin(15.707963\,x)$$
$$X_{6,\,0} := 6.7547453\sin(18.849556\,x)$$
$$X_{7,\,0} := 5.7897816\sin(21.991149\,x)$$
$$X_{8,\,0} := 5.0660590\sin(25.132741\,x)$$
$$X_{9,\,0} := 4.5031637\sin(28.274333\,x)$$
$$X_{10,\,0} := 4.0528473\sin(31.415926\,x)$$
$$X_{11,\,0} := 3.6844066\sin(34.557519\,x)$$

Знаходження перших одинадцяти власних функцій $X_{k\,1}$

$$> evalm\left(\left[\,1\ \ 0\,\right] \&* Matrix\left(\left[\left[\cos(\alpha\cdot(x-s)), \frac{\sin(\alpha\cdot(x-s))}{\alpha\cdot F_1}\right], \left[-\alpha\cdot F_1\cdot\sin(\alpha\cdot(x-s)), \cos(\alpha\cdot(x-s))\right]\right]\right) \&* B \&* \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) : Y_{k1} := evalf\left(subs\left(s = x_1, \%\right)\right);$$

$$Y_{k1} := \frac{1.0228719\,10^6\cos(\alpha\,(x-0.5))\cos\left(0.00031119234\sqrt{\omega^2}\right)\sin\left(0.00031119234\sqrt{\omega^2}\right)}{\sqrt{\omega^2}} + \frac{509.29581\sin(\alpha\,(x-0.5))\left(-0.24999999\sin\left(0.00031119234\sqrt{\omega^2}\right)^2 + \cos\left(0.00031119234\sqrt{\omega^2}\right)^2\right)}{\alpha}$$

$$> \textbf{for } k \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 11 \textbf{ do } X_{k,1} := evalf\left(subs\left(\alpha = \alpha_k, \omega = \omega_k, Y_{k1}\right)\right) \textbf{ od}$$

$$X_{1,1} := -0.000014834456 \cos(3.1415926\,x - 1.5707963) - 40.528471 \sin(3.1415926\,x - 1.5707963)$$
$$X_{2,1} := 0.000014834455 \cos(6.2831855\,x - 3.1415928) + 81.056944 \sin(6.2831855\,x - 3.1415928)$$
$$X_{3,1} := -0.0000013249643 \cos(9.4247778\,x - 4.7123889) - 13.509491 \sin(9.4247778\,x - 4.7123889)$$
$$X_{4,1} := 0.000014834455 \cos(12.566371\,x - 6.2831855) + 40.528472 \sin(12.566371\,x - 6.2831855)$$
$$X_{5,1} := -0.0000067287610 \cos(15.707963\,x - 7.8539815) - 8.1056944 \sin(15.707963\,x - 7.8539815)$$
$$X_{6,1} := 0.0000047023372 \cos(18.849556\,x - 9.4247780) + 27.018982 \sin(18.849556\,x - 9.4247780)$$
$$X_{7,1} := -0.000020624237 \cos(21.991149\,x - 10.995574) - 5.7897815 \sin(21.991149\,x - 10.995574)$$
$$X_{8,1} := 0.0000097683964 \cos(25.132741\,x - 12.566370) + 20.264237 \sin(25.132741\,x - 12.566370)$$
$$X_{9,1} := -0.0000013249643 \cos(28.274333\,x - 14.137166) - 4.5031636 \sin(28.274333\,x - 14.137166)$$
$$X_{10,1} := 0.000014834456 \cos(31.415926\,x - 15.707963) + 16.211389 \sin(31.415926\,x - 15.707963)$$
$$X_{11,1} := -0.0000074656420 \cos(34.557519\,x - 17.278760) - 3.6844066 \sin(34.557519\,x - 17.278760)$$

Висновок

Теорема про розвинення за власними функціями адаптована для випадку диференціальних рівнянь з кусково-сталими (за просторовою змінною) коефіцієнтами.

Отримано явні формули для обчислення розв'язку та його квазіпохідної для будь-якого підінтервалу основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду згаданих вище коефіцієнтів.

Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розв'язку.

Такий підхід дає змогу застосовувати програмні засоби до процесу вирішення задачі та графічної ілюстрації розв'язку. Отримані результати мають безпосереднє практичне застосування в теорії коливань стрижнів з кусково-змінним розподілом параметрів.

Наведено приклад застосування пакету Maple до знаходження власних значень та власних функцій задачі коливання сталевого стрижня довжиною 1 м, що складається з двох кусків однакової довжини.

Література:

[1]. *Тацій Р. М.* Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами / Р. М. Тацій, О. О. Власій, М. Ф. Стасюк // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Серія «Фіз.-мат. науки». 2014. – № 804. – С. 64-69.

[2]. *Тацій Р. М.* Загальна схема дослідження поздовжніх коливань стрижнів кусково-сталого перерізу / Р. М. Тацій, О. О. Карабин, О. Ю. Чмир // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції “Інформаційні технології та комп'ютерне моделюваня”. – Івано-Франківськ, 14-19 травня 2018. – С. 386-391.

[3]. *Тацій Р. М.* Загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними коефіцієнтами та правими частинами / Р. М. Тацій, О. Ю. Чмир, О. О. Карабин // Дослідження в математиці і механіці. 2017. – Т. 22, вип. 2(30). – С. 55-70.

[4]. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.

[5]. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

[6]. *Тацій Р. М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. Мазуренко, О. О. Власій. – Дрогобич. Коло, 2011. – 297 с.

[7]. *Власій О. О.* Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами / О. О. Власій, М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Серія «Фіз.-мат. науки». 2009. – № 660. – С. 34-38.

[8]. *Тацій Р. М., Мазуренко В. В.* Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку. / Р. М. Тацій, В. В. Мазуренко // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2001. – 44. №1 – С. 43-53.

[9]. *Каленюк П. І.* Диференціальні рівняння: навч. посібник. / П. І. Каленюк, Ю. К. Рудавський, Р. М. Тацій, І. Ф. Клюйник, В. М. Колісник, П. П. Костробій, І. Я. Олексів. – Л. Видавництво Львівської політехніки, 2014. – 380 с.

[10]. *Мартыненко В. С.* Операционное исчисление: Учеб. пособие. – 4 – е изд., перераб. и доп. – К.: Выща школа, 1990. – 359 с.

References:

[1]. Tatsij R. M., Vlasij O. O., Stasjuk M. F (2014). *Zagalna persha krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovidnosti z kuskovo-zminnymy koefitsiyentamy* [General first boundary value problem for the heat equation with piecewise variable coefficients]. Bulletin of the University "Lviv Polytechnic", series "Physics and mathematics", Vol. 804. – P. 64-69.

[2]. Tatsij R. M., Chmyr O. Yu., Karabyn O. O. (2018). *Zagalna schema doslidzhennya pozdovzhnikh kolyvan stryzhniv kuskovo-stalogo pererizu* [The general scheme of investigation for longitudinal oscillations of rods of a piecewise-constant section]. The materials of the international scientific conference "Information technologies and computer modelling", Ivano-Frankivsk. – P. 386-391.

[3]. Tatsij R. M., Chmyr O. Yu., Karabyn O. O. (2017). *Zagalni krayovi zadachi dlya hiperbolichnogo rivnyannya iz kuskovo-neperervnymy koefitsientamy ta pravymy chastynamy* [The total boundary value problems for hyperbolic equation with piecewise continuous coeffitients and right parts], Researches in mathematics and mechanics, Vol. 22, № 2(30). – P. 55-70.

[4]. Arsenin V. Ya.(1974). *Metody matematicheskoyu phiziki* [Methods of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 432 p.

[5]. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. (1977). *Uravneniya matematicheskoyu phiziki* [Equations of Mathematicai Physics]. Moscow, Nauka, 735 p.

[6]. Tatsij R. M., Stasjuk M. F., Mazurenko V. V., Vlasij O. O. (2011). *Uzagalneni kvazidyferentsialni rivnyannya* [Generalized Quasi-differential Equations]. Drogobych, Kolo, 297 p.

[7]. Vlasij O. O., Stasjuk M. F., Tatsij R. M., (2009). *Struktura rozvyazkiv uzagalnenykh system z kuskovo-zminnymy koefitsiyentamy* [The structure of generalized solutions of systems with piecewise variable coefficients]. Bulletin of the University "Lviv Polytechnic", series "Physics and mathematics", Vol. 660. – P. 34-38.

[8]. Tatsij R. M., Mazurenko V. V. (2001). *Dyskretno-neperervni krayovi zadachi dlya kvazidyfererentsialykh rivnyan dovilnogo poryadku* [Discrete-continuous boundary problems for the quasi-differential equations of even order]. Reports of the Mathematical Methods and Physico-Mechanical Fields, Vol. 44, № 1. – P. 43-53.

[9]. Kaleniuk P. I., Rudavsky J. K., Tatsij R. M., Kliinik I. F., Kolesnik V. M., Kostrobij P. P., Oleksiv I. Ya. (2014). *Dyferentsialni rivnyannya* [Differential Equations]. Lviv, Lviv Polytechnic Publisher, 380 p.

[10]. Martynenko V. S. (1973). *Operatsionnoye ischislyeniye* [Operational Calculus]. Kiev, Vyshcha Shkola, 359 p.

R.M. Tatsij, O.Yu. Chmyr, O.O. Karabyn

THE SCHEME FOR INVESTIGATION OF A ROD WITH THE PIECEWISE-CONSTANT CROSS-SECTION FOR LONGITUDINAL OSCILLATIONS

Introduction.

Methods for solving nonstationary boundary value problems can be divided into direct methods which basis includes the separation of variables method, method of sources (Green's function method), method of integral transforms, approximate methods and numerical methods.

The longitudinal oscilations of rod, which consist of two pieces, of piecewise-constant section were investigated in this article. The scheme proposed in this article belongs to the direct methods for solving boundary value problems. In the basis of this scheme is the concept of quasi-derivatives that lets to bypass the problem of multiplication of generalized functions, the method of reducing this problem to the solving two simpler and interrelated problems, a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a reduction method of eigenfunctions.

Purpose.

This article examines the oscillations of rod of two pieces of a piecewise-constant section.

Methods.

With the use of the reduction method solving of such a problem is reduced to finding a solution of the stationary inhomogeneous boundary value problem with the initial boundary conditions and the mixed problem with the zero boundary conditions for an inhomogeneous equation. The advantage of this method is a possibility to examine a problem on each breakdown segment and then to combine obtained solutions on the basis of matrix calculation. Such an approach allows the use of software tools for solving the problem.

Results.

Hyperbolic type equation

$$\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ x\in(x_0;x_2),\ t\in(0;+\infty),$$

with the boundary conditions

$$\begin{cases} u(x_0,t)=\psi_0(t), \\ u(x_2,t)=\psi_1(t), \end{cases}\ t\in[0;+\infty)$$

and the initial conditions

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varphi_1(x), \end{cases}\ x\in[x_0;x_2],$$

where F_0, F_1, E, ρ are constants, $F(x)=F_0\cdot\theta_0+F_1\cdot\theta_1$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)\in C^2(0;+\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ are piecewise continuous on $(x_0;x_2)$. Using , the method of reducing, we can find a solution of the problem as a sum of two functions $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$. There is received:

$$\overline{W}_0(x,t)=\frac{1}{\dfrac{x_1-x_0}{F_0}+\dfrac{x_2-x_1}{F_1}}\cdot\begin{pmatrix}\left(\dfrac{x_1-x}{F_0}+\dfrac{x_2-x_1}{F_1}\right)\psi_0(t)+\dfrac{x-x_0}{F_0}\cdot\psi_1(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix},$$

$$\overline{W}_1(x,t)=\frac{1}{\dfrac{x_1-x_0}{F_0}+\dfrac{x_2-x_1}{F_1}}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{x_2-x}{F_1}\psi_0(t)+\left(\dfrac{x_1-x_0}{F_0}+\dfrac{x-x_1}{F_1}\right)\psi_1(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix},$$

where $x_0<x_1<x_2$.

The first coordinate of the vectors $\overline{W}_0(x,t)$, $\overline{W}_1(x,t)$ is indeed the searched function $w(x,t)$. The function $v(x,t)$ is received in a form of the series

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t+\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t\sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\cdot X_k(x,\omega_k).$$

Conclusion. The advantage of this method is a possibility to examine a problem on each breakdown segment and then to combine obtained solutions on the basis of matrix calculation. Such an approach allows the use of software tools for solving the problem and the graphic illustration of the solution. The received results have a direct application to applied problems in the theory of oscillation of the rods with piecewise variables by the distribution of parameters.

Key words: quazidifferential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the Dirac function, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.